

2023 学年第二学期期中考试八年级数学试卷

(考试时间: 90 分钟 总分: 100 分)

一、选择题 (每题 3 分, 共 18 分)

1. 下列四个函数中, 为一次函数的是 ()

- A. $y = x^2 - 2x$ B. $y = \frac{1}{x} + 1$ C. $y = -2x$ D. $y = kx + 1$ (k 为常数)

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的定义, 根据形如 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 为一次函数, 进行逐一分析作答.

【详解】解: A、 $y = x^2 - 2x$, 不符合 $y = kx + b$ ($k \neq 0$), 故该选项是错误的;

B、 $y = \frac{1}{x} + 1$, 不符合 $y = kx + b$ ($k \neq 0$), 故该选项是错误的;

C、 $y = -2x$, 符合 $y = kx + b$ ($k \neq 0$), 故该选项是正确的;

D、 $y = kx + 1$ (k 为常数), 不符合 $y = kx + b$ ($k \neq 0$), 故该选项是错误的;

故选: A.

2. 直线 $y = -2x - 1$ 不经过第 () 象限.

- A. 一 B. 二 C. 三 D. 四

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查的是一次函数的性质, 熟知一次函数的图象与系数的关系是解答此题的关键.

根据一次函数的图象与系数的关系解答即可.

【详解】解: $\because$ 一次函数 $y = -2x - 1$ 中, $k = -2 < 0, b = -1 < 0$,

$\therefore$ 直线的图象经过第二, 三, 四象限, 不经过第一象限.

故选: A.

3. 下列说法正确的是 ()

- A. $\sqrt{3}x^2 - 2x = \sqrt{5}$ 是无理方程 B. $x^2 + x = 0$ 是二次方程
C. $x^2 - 2y = 8$ 是二元二次方程 D. $\frac{1}{x} - \sqrt{x} = 0$ 是分式方程

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查无理方程, 二元二次方程, 一元二次方程等知识, 解题的关键是掌握无理方程, 二元二

次方程，一元二次方程的定义.

根据二元二次方程，无理方程，分式方程的定义一一判断即可.

【详解】解：A、 $\sqrt{3}x^2 - 2x = \sqrt{5}$ ，是一元二次方程，本选项不符合题意；

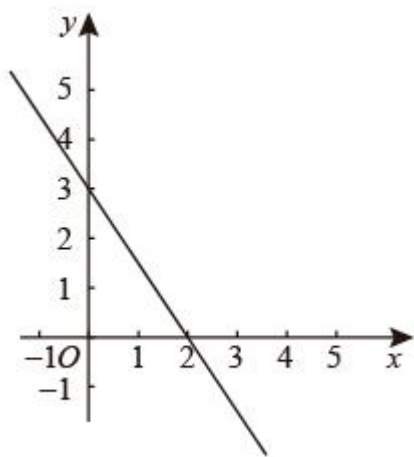
B、 $x^2 + x = 0$ 是一元二次方程，本选项不符合题意；

C、 $x^2 - 2y = 8$ 是二元二次方程，本选项正确，符合题意；

D、 $\frac{1}{x} - \sqrt{x} = 0$ ，是无理方程，本选项不符合题意.

故选：C.

4. 一次函数 $y = kx + b$ 的图象如图所示，当 $y < 3$ 时， x 的取值范围是（ ）



A. $x > 2$

B. $x < 0$

C. $x > 0$

D. $x < 2$

【答案】C

【解析】

【分析】观察函数图象得到函数值小于 3 所对应的自变量的范围为 $x > 0$.

【详解】观察函数图象， $x > 0$ 时，函数值小于 3，

当 $x > 0$ 时， $y < 3$.

故选 C.

【点睛】本题考查了一次函数的图象，能利用数形结合求出 x 的取值范围是解答此题的关键.

5. 一个多边形的内角和为 1800° ，则这个多边形的边数为（ ）

A. 10

B. 11

C. 12

D. 13

【答案】C

【解析】

【分析】由多边形内角和定理，即可求解.

【详解】解：设这个多边形的边数为 n ,

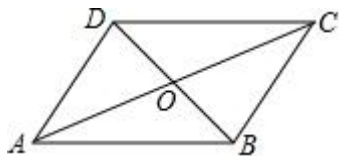
由题意得： $(n-2) \times 180^\circ = 1800^\circ$,

$\therefore n = 12$,

故选：C.

【点睛】本题考查多边形内角和定理，关键是掌握多边形内角和计算公式 $(n-2) \cdot 180^\circ$ ($n \geq 3$ 且 n 为整数).

6. 四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，下列条件不能判定这个四边形是平行四边形的是 ()



A. $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$

B. $AB = DC$, $AD = BC$

C. $AO = CO$, $BO = DO$

D. $AB \parallel DC$, $AD = BC$

【答案】D

【解析】

【详解】解：A、由“ $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$ ”可知，四边形 $ABCD$ 的两组对边互相平行，则该四边形是平行四边形. 故本选项不符合题意；

B、由“ $AB = DC$, $AD = BC$ ”可知，四边形 $ABCD$ 的两组对边相等，则该四边形是平行四边形. 故本选项不符合题意；

C、由“ $AO = CO$, $BO = DO$ ”可知，四边形 $ABCD$ 的两条对角线互相平分，则该四边形是平行四边形. 故本选项不符合题意；

D、由“ $AB \parallel DC$, $AD = BC$ ”可知，四边形 $ABCD$ 的一组对边平行，另一组对边相等，据此不能判定该四边形是平行四边形. 故本选项符合题意.

故选 D.

二、填空题 (每题 2 分，共 24 分)

7. 直线 $y = 2x - 1$ 在 y 轴上的截距是_____.

【答案】-1

【解析】

【分析】本题考查了一次函数图象上点的坐标特征以及一次函数的性质，牢记截距的定义是解题的关键.

代入 $x = 0$ 求出与之对应的 y 值，此题得解.

【详解】解：当 $x=0$ 时， $y=2x-1=-1$ ，

$\therefore$ 直线 $y=2x-1$ 的截距为 -1 。

故答案为： -1 。

8. 函数 $y=-x-3$ 的图像向下平移 3 个单位，所得新图像的函数解析式_____。

【答案】 $y=-x-6$

【解析】

【分析】 本题考查的是一次函数的图象与几何变换，熟知函数图象平移时“上加下减，左加右减”的法则
是解答此题的关键。

根据“上加下减”的原则进行解答即可。

【详解】解：函数 $y=-x-3$ 的图象向下平移 3 个单位，所得新图象的函数解析式 $y=-x-3-3$ ，即
 $y=-x-6$ 。

故答案为： $y=-x-6$ 。

9. 如果点 $A(-1, a)$ 、 $B(2, b)$ 在直线 $y=-2024x+2024$ 上，那么 a _____ b 。（填“ $>$ ”或“ $<$ ”）。

【答案】 $>$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征，熟练掌握一次函数增减性是关键。
根据 $k < 0$, y 随 x 增大而减小判断即可。

【详解】解： $\because y=-2024x+2024$ ， $-2024 < 0$ ，
 $\therefore y$ 随 x 增大而减小，
 $\because -1 < 2$ ，
 $\therefore a > b$ 。

故答案为： $>$ 。

10. 如果一次函数 $f(x)=\frac{1}{3}x+5$ ，那么 $f(-3)=$ _____。

【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查了函数值，把自变量的值代入函数解析式是解题关键。
根据自变量与函数值的对应关系，可得答案。

【详解】解： $f(-3)=\frac{1}{3}\times(-3)+5=4$ ，

故答案为：4.

11. 方程 $x^3 - 125 = 0$ 的根是 $x =$ _____.

【答案】 5

【解析】

【分析】 根据立方根的定义解答即可.

【详解】 解：方程 $x^3 - 125 = 0$ 即为 $x^3 = 125$,

所以 $x = 5$;

故答案为：5.

【点睛】 本题考查了利用立方根解方程，熟知立方根的概念是解题的关键.

12. 方程的 $(2x-5)\sqrt{x-3} = 0$ 根是_____.

【答案】 $x = 3$

【解析】

【分析】 先把无理方程化为 $2x-5=0$ 或 $\sqrt{x-3}=0$ ，分别求解，再检验，即可.

【详解】 解： $\because (2x-5)\sqrt{x-3} = 0$,

$\therefore 2x-5=0$ 或 $\sqrt{x-3}=0$,

解得： $x = \frac{5}{2}$ 或 $x = 3$,

$\because x-3 \geq 0$,

$\therefore x \geq 3$

检验： $x = 3$ 为方程的根， $x = \frac{5}{2}$ 不是方程的根，

故答案为： $x = 3$.

【点睛】 本题主要考查解无理方程，无理方程要对根进行检验.

13. 用换元法解分式方程 $\frac{x}{x-1} - \frac{2x-2}{x} - 3 = 0$ ，如果设 $\frac{x}{x-1} = y$ ，那么原方程化为关于 y 的整式方程为

【答案】 $y^2 - 3y - 2 = 0$

【解析】

【分析】 直接把 $\frac{x}{x-1}$ 换成 y ，整理即可.

【详解】解：由 $\frac{x}{x-1} - \frac{2x-2}{x} - 3 = 0$ 得： $\frac{x}{x-1} - 2 \cdot \frac{x-1}{x} - 3 = 0$,

把 $\frac{x}{x-1}$ 换成 y 得： $y - \frac{2}{y} - 3 = 0$,

整理得： $y^2 - 3y - 2 = 0$,

故答案为： $y^2 - 3y - 2 = 0$.

【点睛】本题考查的是换元法解分式方程，换元的实质是转化，关键是构造元和设元，理论依据是等量代换，目的是变换研究对象，将问题移至新对象的知识背景中去研究，从而使非标准型问题标准化、复杂问题简单化，变得容易处理.

14. 关于的方程 $1 + \sqrt{2x-3} = k$ ，当 k ___ 时，方程无实数解.

【答案】 < 1

【解析】

【分析】本题考查了二次根式的性质，正确理解二次根式的性质是解题的关键. 先将方程变形为 $\sqrt{2x-3} = k-1$ ，再根据二次根式的性质，即可列出不等式，即得答案.

【详解】 $\because 1 + \sqrt{2x-3} = k$,

$\therefore \sqrt{2x-3} = k-1$,

$\because \sqrt{2x-3} \geq 0$,

要是方程无实数解，则 $k-1 < 0$,

$\therefore k < 1$.

故答案为： < 1 .

15. 如果一个十边形每个内角的度数都相等，那么它的一个内角的度数是_____度.

【答案】 144

【解析】

【分析】本题主要考查了正多边形内角和定理，正 n 边形的内角和为 $180^\circ \times (n-2)$ ，且正 n 边形有 n 个内角，据此可求出正 n 边形每个内角的度数，根据题意可知该多边形是正十边形，据此列式求解即可.

【详解】解：由题意得：该十边形的一个内角的度数为 $\frac{180^\circ \times (10-2)}{10} = 144^\circ$,

故答案为： 144.

16. 已知平行四边形 $ABCD$ 的周长是 28cm， AC 和 BD 交于 O ， $\triangle OAB$ 的周长比 $\triangle OBC$ 的周长小 2cm，则

$AB =$ _____.

【答案】 6cm

【解析】

【分析】 根据平行四边形的性质可得 $AB + BC = 14\text{cm}$, $OA = OC$, 再根据 $\triangle OAB$ 的周长比 $\triangle OBC$ 的周长小 2cm, 即可求得.

【详解】 解: $\because$ 平行四边形 $ABCD$ 的周长为 28cm,

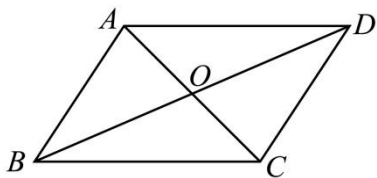
$$\therefore AB + BC = 14\text{cm}, \quad OA = OC,$$

$\therefore \triangle OAB$ 的周长比 $\triangle OBC$ 的周长小 2cm,

$$\therefore (OB + OC + BC) - (OA + OB + AB) = BC - AB = 2\text{cm},$$

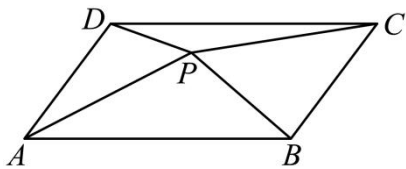
$$\therefore AB = 6\text{cm}, \quad BC = 8\text{cm}.$$

故答案为: 6cm.



【点睛】 本题考查了平行四边形的性质, 三角形的周长, 利用二元一次方程组求解, 采用方程思想是解决本题的关键.

17. 如图, 平行四边形 $ABCD$ 内有一点 P , 已知 $\triangle APB$ 、 $\triangle BPC$ 、 $\triangle CPD$ 的面积分别为 4、3、1, 则 $\triangle APD$ 的面积为 _____.



【答案】 2

【解析】

【分析】 由于平行四边形的两组对边分别相等, 且 $S_{\triangle BPC}$, $S_{\triangle APD}$ 的高的和是 AD , BC 间的距离, 所以得到

$$S_{\triangle BPC} + S_{\triangle APD} = \frac{1}{2} S_{\square ABCD}, \quad \text{同理可得 } S_{\triangle APB} + S_{\triangle CPD} = \frac{1}{2} S_{\square ABCD}, \quad \text{即可求出结果.}$$

【详解】 解: $\because$ 平行四边形的两组对边分别相等, 且 $S_{\triangle BPC}$, $S_{\triangle APD}$ 的高的和是 AD , BC 间的距离, 它们的底分别是 AD , BC , 而 $AD = BC$,

$$\therefore S_{\triangle BPC} + S_{\triangle APD} = \frac{1}{2} S_{\square ABCD},$$

$$\text{同理可得 } S_{\triangle APB} + S_{\triangle CPD} = \frac{1}{2} S_{\square ABCD},$$

$$\therefore S_{\triangle APB} + S_{\triangle CPD} = S_{\triangle BPC} + S_{\triangle APD},$$

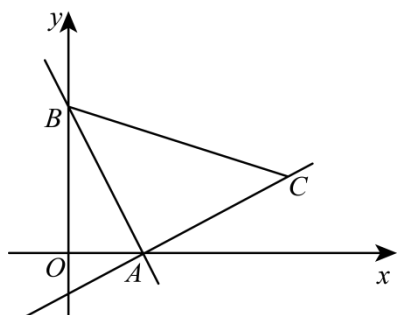
$$\therefore 4 + 1 = 3 + S_{\triangle APD},$$

$$\therefore S_{\triangle APD} = 2;$$

故答案为：2.

【点睛】主要考查了平行四边形的性质、三角形面积的计算方法，熟练掌握平行四边形的性质，由底和高的关系得出三角形面积之间的关系是解决问题的关键.

18. 如图，已知直线 $y = -3x + 3$ 与 x 轴交于点 A ，与 y 轴交于点 B ，以线段 AB 为边在直线 AB 的右侧作以 AB 为直角边的等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ ，则直线 BC 的表达式为_____.



【答案】 $y = -\frac{1}{2}x + 3$

【解析】

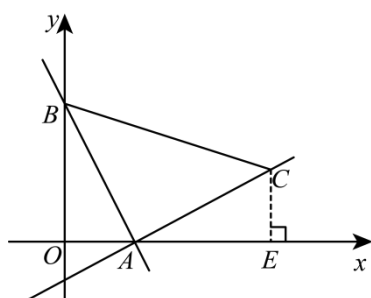
【分析】首先求出点 A 、 B 的坐标，可得 $OA = 1$ ， $OB = 3$ ，然后作 $CE \perp x$ 轴于 E ，证明 $\triangle BOA \cong \triangle AEC$ (AAS)，可得 $AE = BO = 3$ ， $CE = OA = 1$ ，求出点 C 坐标，利用待定系数法可得答案.

【详解】解：在一次函数 $y = -3x + 3$ 中，当 $x = 0$ 时， $y = 3$ ；
当 $y = 0$ ，即 $-3x + 3 = 0$ 时，解得： $x = 1$ ，

$$\therefore A(1, 0), B(0, 3),$$

$$\therefore OA = 1, OB = 3,$$

如图，作 $CE \perp x$ 轴于 E ，



由等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 可得 $BA = AC$, $\angle BAC = 90^\circ$,

$$\therefore \angle BAO + \angle EAC = 90^\circ,$$

$$\because \angle EAC + \angle ACE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAO = \angle ACE,$$

$$\text{又} \because \angle BOA = \angle AEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle BOA \cong \triangle AEC (\text{AAS}),$$

$$\therefore AE = BO = 3, CE = OA = 1,$$

$$\therefore OE = OA + AE = 4,$$

$$\therefore C(4,1),$$

设直线 BC 的表达式为 $y = kx + b (k \neq 0)$,

$$\text{代入 } B(0,3), C(4,1) \text{ 得: } \begin{cases} b = 3 \\ 4k + b = 1 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = 3 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } BC \text{ 的表达式为 } y = -\frac{1}{2}x + 3,$$

$$\text{故答案为: } y = -\frac{1}{2}x + 3.$$

【点睛】 本题考查了一次函数的图象和性质，全等三角形的判定和性质，待定系数法的应用，作出合适的辅助线，证明三角形全等，求出点 C 坐标是解题的关键。

二、简答题 (第 19-22 题每题 6 分，第 23 题 4 分，共 28 分)

19. 解方程: $\frac{x}{x+3} + \frac{6}{x^2-9} = \frac{1}{x-3}$

【答案】 $x=1$.

【解析】

【分析】 首先去掉分母，观察可得最简公分母是 $(x+3)(x-3)$ ，方程两边乘最简公分母，可以把分式方程转化为整式方程求解，然后解一元二次方程，最后检验即可求解。

【详解】 方程的两边同乘以 $(x+3)(x-3)$ ，得

$$x(x-3) + 6 = x+3,$$

$$\text{整理, 得 } x^2 - 4x + 3 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1=1, x_2=3.$$

经检验: $x=3$ 是方程的增根, $x=1$ 是原方程的根.

$\therefore$ 原方程的解为 $x=1$.

20. 解方程: $x - \sqrt{x-1} - 3 = 0$.

【答案】 $x = 5$

【解析】

【分析】先移项得到 $x - 3 = \sqrt{x-1}$, 再把方程两边平方, 整理得到 $x^2 - 7x + 10 = 0$, 解得 $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, 然后进行检验确定原方程的解.

【详解】解: $x - \sqrt{x-1} - 3 = 0$,

$$\therefore x - 3 = \sqrt{x-1},$$

$$\therefore (x-3)^2 = x-1, \text{ 整理得 } x^2 - 7x + 10 = 0,$$

解得 $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, 检验: 当 $x = 2$ 时, 方程左边 $= 2 - \sqrt{2-1} - 3 = -2 \neq 0$,

所以方程左边 $\neq$ 方程右边, $x = 2$ 不是原方程的解,

当 $x = 5$ 时, 方程左边 $= 5 - \sqrt{5-1} - 3 = 0$,

所以方程左边 = 方程右边, $x = 5$ 是原方程的解;

所以原方程的解为 $x = 5$.

【点睛】本题考查了无理方程: 解无理方程的基本思想是把无理方程转化为有理方程来解, 解无理方程, 往往会产生增根, 应注意验根.

21. 解方程组
$$\begin{cases} x^2 - 9y^2 = 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 4 \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$$

【解析】

【分析】本题主要考查解高次方程, 关键在于对原方程组的两个方程进行化简, 重新组合.

首先对原方程组进行化简, 然后分别重新组合, 成为 4 个方程组, 最后解这两个方程组即可.

【详解】解:
$$\begin{cases} x^2 - 9y^2 = 0 \text{ ①} \\ x^2 - 2xy + y^2 = 4 \text{ ②} \end{cases}$$

方程①可变形为 $(x+3y)(x-3y) = 0$.

得 $x+3y=0$ 或 $x-3y=0$.

方程②可变形为 $(x-y)^2=4$.

得 $x-y=2$ 或 $x-y=-2$.

因此, 原方程组可组成以下四个二元一次方程组:

$$\begin{cases} x+3y=0 \\ x-y=2 \end{cases}, \begin{cases} x+3y=0 \\ x-y=-2 \end{cases}, \begin{cases} x-3y=0 \\ x-y=2 \end{cases}, \begin{cases} x-3y=0 \\ x-y=-2 \end{cases}.$$

分别解这四个方程组,

$$\text{得原方程组的解是 } \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}.$$

22. 解关于 x 的方程: $bx^2-1=1-x^2$ ($b \neq -1$).

【答案】 $b > -1$, $\pm \frac{\sqrt{2(b+1)}}{b+1}$; $b < -1$, 方程无解.

【解析】

【详解】 方程整理后, 利用平方根定义开方即可求出解.

解: 方程整理得: $(b+1)x^2=2$,

即 $x^2=\frac{2}{b+1}$ ($b \neq -1$, 即 $b+1 \neq 0$),

若 $b+1 > 0$, 即 $b > -1$, 开方得: $x=\pm \sqrt{\frac{2}{b+1}}=\pm \frac{\sqrt{2(b+1)}}{b+1}$;

若 $b+1 < 0$, 即 $b < -1$, 方程无解.

23. 已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过点 $A(1,3)$ 且平行于直线 $y=-3x+2$.

(1) 求这个一次函数的解析式;

(2) 画出这个一次函数的图象.

【答案】 (1) $y=-3x+6$

(2) 见解析

【解析】

【分析】 本题主要考查了求一次函数的关系式, 画一次函数的图象, 对于 (1), 先求出 k , 再将点 $A(1,3)$ 代入, 即可求出答案;

对于 (2), 先求出另一个点, 再过两个点画直线即可.

【小问 1 详解】

$\because$ 一次函数 $y = kx + b$ 平行于直线 $y = -3x + 2$,

$$\therefore k = -3.$$

又 $\because$ 一次函数 $y = -3x + b$ 经过点 $A(1, 3)$,

$$\therefore 3 = -3 \times 1 + b,$$

解得 $b = 6$,

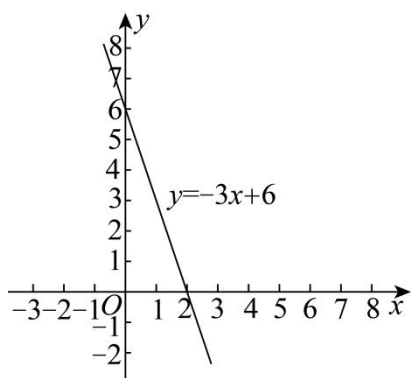
$\therefore$ 一次函数的关系式为 $y = -3x + 6$;

【小问 2 详解】

当 $x = 0$ 时, $y = 6$,

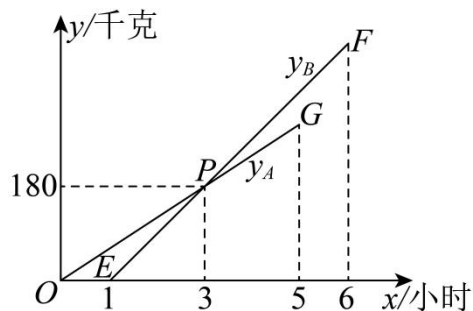
$\therefore$ 这个一次函数的图象经过点 $(1, 3)$, $(0, 6)$,

经过两点作直线, 图象如图所示.



四、解答题 (本大题共 4 题, 共 30 分)

24. 某物流公司引进 A, B 两种机器人用来搬运某种货物, 这两种机器人充满电后可以连续搬运 5 小时, A 种机器人于某日 0 时开始搬运, 过了 1 小时, B 种机器人也开始搬运, 如图, 线段 OG 表示 A 种机器人的搬运量 y_A (千克) 与时间 x (时) 的函数图象, 线段 EF 表示 B 种机器人的搬运量 y_B (千克) 与时间 x (时) 的函数图象, 根据图象提供的信息, 解答下列问题:



(1) 求 y_B 关于 x 的函数解析式;

(2) 如果 A、B 两种机器人连续搬运 5 个小时, 那么 B 种机器人比 A 种机器人多搬运了多少千克?

【答案】 (1) $y_B = 90x - 90$ ($1 \leq x \leq 6$); (2) B 种机器人比 A 种机器人多搬运了 150 千克.

【解析】

【分析】 (1) 设 y_B 关于 x 的函数解析式为 $y_B = k_1x + b$, 把 E、P 的坐标代入即可得到结论;

(2) 设 y_A 关于 x 的函数解析式为 $y_A = k_2x$, 把 P 的坐标代入即可得到 y_A 的表达式, 令 $x=6$, 代入 y_B , 令 $x=5$, 代入 y_A , 两者相减即可得到结论.

【详解】 (1) 设 y_B 关于 x 的函数解析式为 $y_B = k_1x + b$ ($k_1 \neq 0$),

由线段 EF 过点 $E(1,0)$ 和点 $P(3,180)$,

$$\text{得} \begin{cases} k_1 + b = 0 \\ 3k_1 + b = 180 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k_1 = 90 \\ b = -90 \end{cases},$$

所以 y_B 关于 x 的函数解析式为 $y_B = 90x - 90$ ($1 \leq x \leq 6$);

(2) 设 y_A 关于 x 的函数解析式为 $y_A = k_2x$ ($k_2 \neq 0$), 由题意, 得 $180 = 3k_2$, 即 $k_2 = 60$,

$$\therefore y_A = 60x;$$

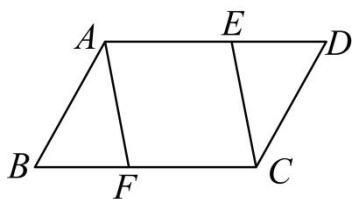
当 $x=5$ 时, $y_A = 5 \times 60 = 300$ (千克),

当 $x=6$ 时, $y_B = 90 \times 6 - 90 = 450$ (千克),

$$450 - 300 = 150 \text{ (千克)}.$$

答: 如果 A、B 两种机器人各连续搬运 5 小时, 那么 B 种机器人比 A 种机器人多搬运了 150 千克.

25. 如图, 在平行四边形 ABCD 中, 点 E 和点 F 分别在边 AD, BC 上, 且 $\angle BAF = \angle DCE$. 求证: 四边形 AFCE 是平行四边形.



【答案】 见解析

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质得到相应条件，证明 $\triangle ABF \cong \triangle CDE$ (ASA)，得到 $BF = DE$ ，继而推出 $CF = AE$ ，再根据一组对边平行且相等的四边形是平行四边形判定即可。

【详解】解：证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore BC = AD, \angle B = \angle D, AB = CD.$$

在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle CDE$ 中，

$$\begin{cases} \angle BAF = \angle DCE \\ AB = CD \\ \angle B = \angle D \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CDE \text{ (ASA)},$$

$$\therefore BF = DE.$$

$$\text{又} \because BC = AD,$$

$$\therefore BC - BF = AD - DE, \text{ 即 } CF = AE.$$

$$\text{又} \because AD \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 是平行四边形.

【点睛】此题考查了平行四边形的判定与性质，全等三角形的判定和性质，注意掌握有一组对边平行且相等的四边形是平行四边形定理的应用是解此题的关键.

26. 小正同学带着 48 元钱去水果店买水果，看到水果店里的苹果比梨每千克贵 2 元，数学能手小正同学发现：如果将 48 元全部买苹果就比将 48 元全部买梨少 4 千克，求这家水果店的苹果和梨每千克的价格各是多少元？

【答案】这家水果店的苹果和梨每千克的价格分别是 6 元与 4 元

【解析】

【分析】本题考查了分式方程的应用，正确理解题意并找出等量关系是解题的关键. 设这家水果店的苹果每千克的价格是 x 元，则梨每千克为 $(x-2)$ 元，根据题意列方程 $\frac{48}{x} + 4 = \frac{48}{x-2}$ ，解方程得 $x = 6$ ，或 $x = -4$ ，经检验即可得到答案.

【详解】设这家水果店的苹果每千克的价格是 x 元，则梨每千克为 $(x-2)$ 元，

$$\text{根据题意得：} \frac{48}{x} + 4 = \frac{48}{x-2},$$

$$\text{解方程得：} x = 6, \text{ 或 } x = -4,$$

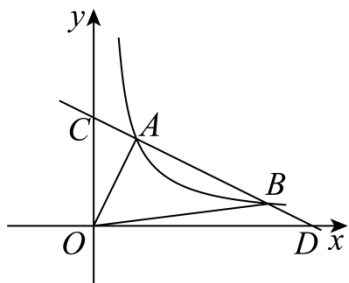
经检验， $x = 6$ 、 $x = -4$ 都是原方程的解，

但 $x = -4$ 不符合题意，故舍去，

$$\therefore x - 2 = 6 - 2 = 4 \text{ (元)},$$

答：这家水果店的苹果和梨每千克的价格分别是 6 元与 4 元.

27. 如图，一次函数的图象与反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ (m 为常数) 的图象交于点 $A(a, 4)$ 和 $B(8, 1)$.



(1) 求一次函数的解析式.

(2) 求 $\triangle AOB$ 的面积.

(3) 若点 E 是 x 轴上一动点，且 $\angle OAE = \angle AOC$ ，请直接写出点 E 的坐标.

【答案】(1) $y = -\frac{1}{2}x + 5$

(2) 15 (3) 点 E 的坐标为 $(2, 0)$ 或 $(-\frac{10}{3}, 0)$

【解析】

【分析】(1) 设一次函数解析式为 $y = kx + b$ ，先将 $B(8, 1)$ 代入 $y = \frac{m}{x}$ ，求得反比例函数解析式，再将点 A 坐标代入反比例函数解析式，求得点 A 坐标，利用待定系数法即可求解；

(2) 求得点 D 的坐标，根据 $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOD} - S_{\triangle BOD}$ 即可求解.

(3) 分两种情况讨论，①过点 A 作 $AE_1 \perp x$ 轴，则 $AE_1 \parallel OC$ ，即可得到 $E_1(2, 0)$ ，②作 $\angle OAE_2 = \angle AOC$ ， AE_2 交 y 轴于点 F ，过点 A 作 $AG \perp y$ 轴，设 $OF = a$ ，则 $AF = a$ ，由勾股定理求得点 F 坐标，再求出直线 AF 的解析式，即可求解.

【小问 1 详解】

解：设一次函数解析式为 $y = kx + b$ ，

将 $B(8, 1)$ 代入 $y = \frac{m}{x}$ ，可得 $m = 8$ ，

$$\therefore y = \frac{8}{x},$$

将 $A(a, 4)$ 代入 $y = \frac{8}{x}$ ，

可得 $a = 2$ ，

$$\therefore OG = 4, \quad AG = 2,$$

$$\because \angle OAE_2 = \angle AOC,$$

$$\therefore AF = OF,$$

设 $OF = a$, 则 $AF = a$,

$$\therefore FG = 4 - a,$$

由勾股定理可得: $AG^2 + FG^2 = AF^2$,

$$\therefore 2^2 + (4 - a)^2 = a^2,$$

$$\text{解得 } a = \frac{5}{2},$$

$$\therefore OF = \frac{5}{2}, \quad F\left(0, \frac{5}{2}\right),$$

设直线 AF 的解析式为 $y = mx + n$, 代入 $F\left(0, \frac{5}{2}\right)$, $A(2, 4)$,

$$\text{可解得 } y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2},$$

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时, } x = -\frac{10}{3},$$

$$\therefore E_2\left(-\frac{10}{3}, 0\right),$$

综上, 点 E 的坐标为 $(2, 0)$ 或 $\left(-\frac{10}{3}, 0\right)$.

【点睛】 本题考查反比例函数与一次函数的综合问题, 以及勾股定理, 利用数形结合的思想是解题的关键.