

2021-2022 学年上海师大第三附属实验学校八年级（下）期中数学试卷

一、选择题（共 6 小题，共 12 分）

1. 一次函数 $y = -2(x-1)$ 在 y 轴上的截距是 ()

- A. 1 B. -1 C. 2 D. -2

【答案】C

【解析】

【分析】一次函数在 $y = -2(x-1)$ 轴的截距求是一次函数一般式 $y = kx + b$ 中 b 的值

【详解】解：当 $x = 0$ 时， $y = -2 \times (0-1) = 2$ ，

$\therefore$ 一次函数 $y = -2(x-1)$ 在 y 轴上的截距是 2.

故选：C.

【点睛】本题主要考查：对一次函数一般式的掌握，一次函数 $y = kx + b$ 在 y 轴上的截距是 b .

2. 下列关于 x 的方程一定有实数根的是 ()

- A. $ax + 1 = 0$ B. $ax^2 + 1 = 0$ C. $x + a = 0$ D. $x^2 + a = 0$

【答案】C

【解析】

【分析】利用一元一次方程及一元二次方程的定义以及方程解的定义逐一选项判断即可.

【详解】解：A、方程 $ax + 1 = 0$ ，

整理得： $ax = -1$ ，

当 $a = 0$ 时，方程无解；

当 $a \neq 0$ 时，方程解为 $x = -\frac{1}{a}$ ，

不符合题意；

B、方程 $ax^2 + 1 = 0$ ，

整理得： $ax^2 = -1$ ，

当 $a = 0$ 时，方程无解；

当 $a > 0$ 时，方程无解；

当 $a < 0$ 时，方程的解为 $x = \pm \sqrt{-\frac{1}{a}}$ ，

不符合题意；

C、方程 $x+a=0$ ，

解得： $x=-a$ ，符合题意；

D、方程 $x^2+a=0$ ，

整理得： $x^2=-a$ ，

当 $a \leq 0$ ，即 $-a \geq 0$ 时，方程解为 $x = \pm\sqrt{-a}$ ；

当 $a > 0$ 时，方程无解，

不符合题意.

故选：C.

【点睛】本题考查了方程有无解的情况，熟练掌握一元一次方程及一元二次方程的定义及方程解的定义是解题的关键.

3. 下列事件，是必然事件的是（ ）

- A. 掷一枚均匀的普通正方形骰子，骰子停止后朝上的点数是 1
- B. 掷一枚均匀的普通正方形骰子，骰子停止后朝上的点数是偶数
- C. 打开电视，正在播广告
- D. 抛掷一枚硬币，掷得的结果不是正面就是反面

【答案】D

【解析】

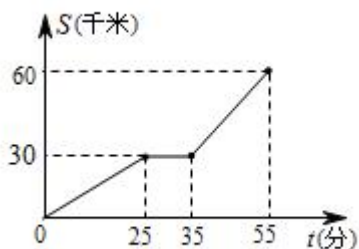
【分析】根据必然事件就是必然发生的事件逐项判断即可.

- 【详解】A. 掷一枚均匀的普通正方形骰子，骰子停止后朝上的点数是 1 是随机事件，不符合题意；
- B. 掷一枚均匀的普通正方形骰子，骰子停止后朝上的点数是偶数是随机事件，不符合题意；
- C. 打开电视，正在播广告是随机事件，不符合题意；
- D. 抛掷一枚硬币，掷得的结果不是正面就是反面是必然事件，符合题意.

故选 D

【点睛】本题考查随机事件. 掌握必然事件就是必然发生的事件是解题关键.

4. 如图反映了一辆汽车从甲地开往乙地的过程中，汽车离开甲地的距离 s (千米)与所用时间 t (分)之间的函数关系. 已知汽车在途中停车加油一次，根据图象，下列描述中，不正确的是（ ）



- A. 汽车在途中加油用了 10 分钟
B. 汽车在加油前后，速度没有变化
C. 汽车加油后的速度为每小时 90 千米
D. 甲乙两地相距 60 千米

【答案】B

【解析】

【分析】根据函数的图象可知，横坐标表示时间，纵坐标表示距离，由于函数图象不是平滑曲线，故应分段考虑.

【详解】解：A、图中加油时间为 25 至 35 分钟，共 10 分钟，故本选项正确；

B、汽车加油前的速度为 $\frac{30}{25} = \frac{6}{5}$ 千米/分；

汽车加油后的速度为 $\frac{60-30}{55-35} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$ 千米/分；

汽车在加油前后，速度发生了变化，故本选项错误；

C、由 B 可知，汽车加油后的速度为 $\frac{3}{2} \times 60 = 90$ 千米/时；故本选项正确；

D、由图可知，甲、乙两地相距 60 千米；故本选项正确.

故选：B.

【点睛】此题考查了函数图象，根据函数图象的变化分段考虑是解题的关键，同时要明确公式：路程=速度 $\div$ 时间.

5. 已知四边形 $ABCD$ ，有以下四个条件：① $AB \parallel CD$ ；② $AB = CD$ ；③ $BC \parallel AD$ ；④ $BC = AD$. 从这四个条件中任选两个，能使四边形 $ABCD$ 成为平行四边形的选法种数共有 ()

- A. 6 种
B. 5 种
C. 4 种
D. 3 种

【答案】C

【解析】

【分析】根据平行四边形的判定定理判断即可.

【详解】根据两组对边分别平行的四边形是平行四边形，可构成①③；

根据两组对边分别相等的四边形是平行四边形，可构成②④；

根据一组对边平行且相等的四边形是平行四边形，可构成①②或③④，

一共有 4 种组合，

故选 C.

【点睛】 本题考查了平行四边形的判定，熟练掌握判定定理是解题的关键.

6. 下列命题为假命题的是 ()

A. 四个内角相等的四边形是矩形

B. 对角线的交点到各边距离都相等的四边形是菱形

C. 一组邻边相等的矩形是正方形

D. 两组邻边分别相等的四边形是平行四边形

【答案】 D

【解析】

【分析】 利用平行四边形、矩形、菱形及正方形的判定方法分别判断，即可确定正确的选项.

【详解】 解： A、四个内角相等的四边形是矩形，正确，是真命题，不符合题意；

B、对角线的交点到各边距离都相等的四边形是菱形，正确，是真命题，不符合题意；

C、一组邻边相等的矩形是正方形，正确，是真命题，不符合题意；

D、两组对边分别相等的四边形是平行四边形，故原命题错误，是假命题，符合题意，

故选： D.

【点睛】 本题考查了命题与定理的知识，解题的关键是了解平行四边形、矩形、菱形及正方形的判定方法，难度不大.

二、填空题 (本大题共 14 小题，共 28 分)

7. 方程 $x^3 + 2 = 0$ 在实数范围内的解是_____.

【答案】 $x = -\sqrt[3]{2}$

【解析】

【分析】 由 $x^3 + 2 = 0$ ，得 $x^3 = -2$ ，根据立方根定义即可解答.

【详解】 解：由 $x^3 + 2 = 0$ ，得

$$x^3 = -2,$$

$$x = -\sqrt[3]{2},$$

故答案为： $x = -\sqrt[3]{2}$.

【点睛】 本题考查了立方根，正确理解立方根的意义是解题的关键.

8. 直线 $y = x - 1$ 与 x 轴的交点坐标为_____.

【答案】 $(1, 0)$

【解析】

【分析】 在 $y = x - 1$ 中, 令 $y = 0$ 即可求得答案.

【详解】 解: 在 $y = x - 1$ 中, 令 $y = 0$ 可得 $x - 1 = 0$, 解得 $x = 1$,
则直线 $y = x - 1$ 与 x 轴的交点坐标为 $(1, 0)$,

故答案为: $(1, 0)$.

【点睛】 本题主要考查求一次函数与坐标轴的交点坐标, 熟练掌握一次函数与坐标轴的交点的求法是解题的关键.

9. 换元法解方程 $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - \frac{5x}{x+1} + 2 = 0$ 时, 可设 $\frac{x}{x+1} = y$, 那么原方程变形为_____.

【答案】 $y^2 - 5y + 2 = 0$

【解析】

【分析】 设 $\frac{x}{x+1} = y$, 可得 $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = y^2$, 再代入原方程, 即可求解.

【详解】 解: 设 $\frac{x}{x+1} = y$,

$$\therefore \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = y^2,$$

$\therefore$ 原方程变形为 $y^2 - 5y + 2 = 0$.

故答案为 $y^2 - 5y + 2 = 0$.

【点睛】 本题考查用换元法整理分式方程的能力, 用换元法解分式方程, 可简化计算过程, 减少计算量, 是一种常用的方法.

10. 某件商品连续两次降价后, 零售价由原来的 500 元降为 405 元, 设此商品平均每次降价的百分率为 x , 则根据题意列出的方程是_____.

【答案】 $500(1-x)^2 = 405$

【解析】

【分析】 设平均每次降价的百分率为 x , 则第一次降价后售价为 $500(1-x)$, 第二次降价后售价为 $500(1-x)^2$,

然后根据两次降价后的售价建立等量关系即可.

【详解】解: 根据题意得 $500(1-x)^2 = 405$.

故答案为: $500(1-x)^2 = 405$.

【点睛】 本题考查的是由实际问题抽象出一元二次方程, 要注意题意指明的是降价, 应该是 $(1-x)$ 而不是 $(1+x)$.

11. 已知一次函数的图象过点 $(2,1)$, 且与直线 $y = -\frac{1}{2}x$ 平行, 则函数的解析式是_____.

【答案】 $y = -\frac{1}{2}x + 2$

【解析】

【分析】 设直线的解析式为 $y = kx + b$, 根据一次函数平行的性质得到 k 的值, 再将点 $(2, 1)$ 代入计算求出 b 即可.

【详解】 解: 设直线的解析式为 $y = kx + b$,

$\because$ 直线 $y = kx + b$ 与直线 $y = -\frac{1}{2}x$ 平行,

$$\therefore k = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x + b,$$

把 $(2,1)$ 代入得 $-\frac{1}{2} \times 2 + b = 1$, 解得 $b = 2$,

故直线的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

故答案为: $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

【点睛】 此题考查了一次函数图象平移的规律: k 值相等, 待定系数法求一次函数的解析式, 正确掌握求一次函数的方法是解题的关键.

12. 若一个多边形外角和与内角和相等, 则这个多边形是_____.

【答案】 四边形

【解析】

【分析】 根据多边形的内角和公式与多边形的外角和定理列出方程, 然后解方程即可求出多边形的边数:

【详解】 解: 设这个多边形的边数是 n , 则

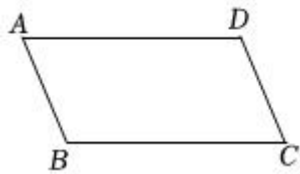
$$(n-2) \cdot 180^\circ = 360^\circ,$$

解得 $n=4$.

故答案为：四边形.

【点睛】 本题考查了多边形内角和公式的应用，多边形的外角和，解题的关键是要能列出一元一次方程.

13. 如图，在 $\square ABCD$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ，则 $\angle C$ 的度数为_____.



【答案】 60°

【解析】

【分析】 根据平行四边形的对角相等即可求解.

【详解】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore \angle C = \angle A = 60^\circ$.

故答案为 60° .

【点睛】 本题考查了平行四边形的性质，掌握平行四边形的对角相等是解题的关键.

14. 已知菱形 $ABCD$ 中，对角线 $AC = 12$ ， $BD = 16$ ，则菱形 $ABCD$ 的面积是_____.

【答案】 96

【解析】

【分析】 根据菱形的面积等于对角线乘积的一半即可解决问题.

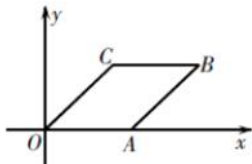
【详解】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形， $AC = 12$ ， $BD = 16$ ，

$\therefore$ 菱形 $ABCD$ 的面积 $= \frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} \times 12 \times 16 = 96$;

故答案为：96.

【点睛】 本题考查了菱形的性质；数据菱形的面积公式是解题的关键.

15. 菱形 $OABC$ 在平面直角坐标系中的位置如图所示， $\angle AOC = 45^\circ$ ， $OC = 2\sqrt{2}$ ，则点 B 的坐标为_____.

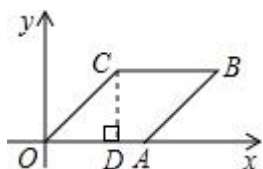


【答案】 $(2\sqrt{2} + 2, 2)$

【解析】

【分析】 根据菱形的性质，作 $CD \perp x$ 轴，先利用三角函数求出 OD 、 CD 的长度，从而得出 C 点坐标，然后利用菱形的性质求得点 B 的坐标.

【详解】解：



由题意可得 $OA=OC=2\sqrt{2}$ ， $\angle AOC=45^\circ$ ，

$\therefore CD=OC\sin 45^\circ=2$ ， $OD=OC\cos 45^\circ=2$ ，

点 C 的坐标为 $(2, 2)$ ，

则点 B 的坐标为 $(2\sqrt{2}+2, 2)$ 。

故答案为 $(2\sqrt{2}+2, 2)$ 。

【点睛】本题综合考查了菱形的性质和坐标的确定，解答本题的关键有两点，①掌握菱形的四边相等，②理解三角函数的定义，及各三角函数在直角三角形中的表示形式。

16. 平行四边形 $ABCD$ 中， $AB=8\text{cm}$ ， $BC=10\text{cm}$ ，对边 AD 和 BC 的距离是 6cm ，则对边 AB 和 CD 间的距离是_____ cm 。

【答案】 7.5

【解析】

【分析】根据平行四边形的面积公式求解即可。

【详解】解：设对边 AB 和 CD 间的距离是 $x\text{cm}$ ，

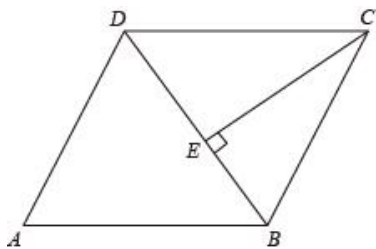
根据平行四边形的面积公式可得： $8x=10\times 6$ ，

可得 $x=7.5$ 。

故答案为 7.5。

【点睛】此题考查平行四边形的性质，“等面积法”是数学中的重要解题方法。在三角形和四边形中，以不同的边为底其高也不相同，但面积是定值，从而可以得到不同底的高的关系。

17. 如图，在 $\square ABCD$ 中， $DB=DC$ ， $\angle A=65^\circ$ ， $CE\perp BD$ 于 E ，则 $\angle BCE=$ _____。



【答案】 25°

【解析】

【分析】由平行四边形 $ABCD$ 中，易得 $\angle BCD = \angle A = 65^\circ$ ，又因为 $DB = DC$ ，所以 $\angle DBC = \angle DCB = 65^\circ$ ；再根据 $CE \perp BD$ ，可得 $\angle BCE = 25^\circ$ 。

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore \angle BCD = \angle A = 65^\circ,$$

$$\because DB = DC,$$

$$\therefore \angle DBC = \angle DCB = 65^\circ,$$

$$\because CE \perp BD,$$

$$\therefore \angle CEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCE = 25^\circ.$$

故答案为： 25° 。

【点睛】本题主要考查了平行四边形的性质，以及等腰三角形的性质，关键是掌握平行四边形的对角相等。

18. 甲乙两人参加社会实践活动，随机选择“做社区志愿者”和“做交通引导员”两项中的一项，那么两人同时选择“做社区志愿者”的概率是 ____。

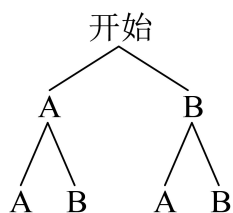
【答案】 $\frac{1}{4}$ 或 0.25

【解析】

【分析】画树状图，展示所有 4 种等可能的结果数，找出符合条件的结果数，然后根据概率公式求解即可。

【详解】解：把“做社区志愿者”和“做交通引导员”分别记为 A 、 B ，

画树状图如下：



共有 4 种等可能的结果，其中两人同时选择“做社区志愿者”的结果有 1 种，

$$\therefore \text{两人同时选择“做社区志愿者”的概率为 } \frac{1}{4},$$

$$\text{故答案为： } \frac{1}{4}.$$

【点睛】本题考查了树状图法与列表法求概率，解题的关键是用树状图列出所有等可能的结果以及熟记概率 = 所求情况数与总情况数之比。

19. 某商店以 2400 元购进某种盒装茶叶，第一个月每盒按进价增加 20% 作为售价，售出 50 盒，第二个月每盒以低于进价 5 元作为售价，售完余下的茶叶，在整个买卖过程中盈利 350 元，设每盒茶叶的进价为 x 元，

则可列方程为_____.

【答案】 $50 \times x(1+20\%) + (x-5) \times \left(\frac{2400}{x} - 50 \right) - 2400 = 350$

【解析】

【分析】 利用等量关系：总售价 - 总进价 = 350 列方程即可.

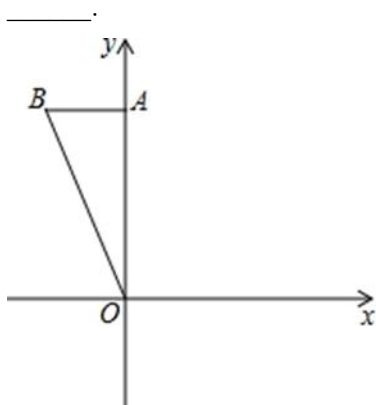
【详解】 解：设每盒茶叶的进价为 x 元. 根据题意得

$$50 \times x(1+20\%) + (x-5) \times \left(\frac{2400}{x} - 50 \right) - 2400 = 350.$$

故答案为： $50 \times x(1+20\%) + (x-5) \times \left(\frac{2400}{x} - 50 \right) - 2400 = 350.$

【点睛】 本题考查了由实际问题抽象出分式方程，找到合适的等量关系是解决问题的关键，难点是得到余下茶叶的数量.

20. 如图，在直角坐标系中， O 为原点，点 A 在 y 轴的正半轴上， $\angle OAB = 90^\circ$ ， $B(-5,12)$ ，将 $\triangle ABO$ 绕着点 O 顺时针旋转 90° ，使得点 A 落在点 C 处，点 B 落在点 D 处，联结 AD 、 BD . 那么 $\angle ABD$ 的余切值为

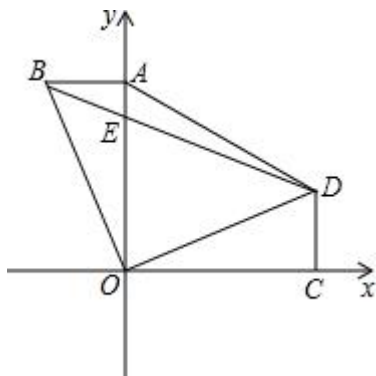


【答案】 $\frac{17}{7}$

【解析】

【分析】 根据旋转的性质写出点 D 的坐标，设直线 BD 的解析式为 $y=kx+b$ ($k \neq 0$)，然后利用待定系数法求一次函数解析式求出直线 BD 的解析式，再设 BD 与 y 轴相交于点 E ，求出点 E 的坐标，再求出 AE ，然后根据锐角的余切值等于邻边比对边列式计算即可得解.

【详解】 解：如图，



$\because \triangle ABO$ 绕着点 O 顺时针旋转 90° , 点 $B(-5, 12)$ 落在点 D 处,

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(12, 5)$,

设直线 BD 的解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$,

$$\text{则} \begin{cases} -5k + b = 12 \\ 12k + b = 5 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -\frac{7}{17} \\ b = \frac{169}{17} \end{cases},$$

所以, 直线 BD 的解析式为 $y = -\frac{7}{17}x + \frac{169}{17}$,

设 BD 与 y 轴相交于点 E , 则点 E 的坐标为 $(0, \frac{169}{17})$,

$$\therefore AE = 12 - \frac{169}{17} = \frac{35}{17},$$

$$\therefore \cot \angle ABD = \frac{AB}{AE} = \frac{5}{\frac{35}{17}} = \frac{17}{7}.$$

故答案为: $\frac{17}{7}$.

【点睛】 本题考查了坐标与图形变化-旋转, 锐角三角函数的定义, 待定系数法求一次函数解析式, 作出图形并确定出以 $\angle ABD$ 为锐角的直角三角形是解题的关键.

三、计算题 (本大题共 1 小题, 共 6 分)

21. 解方程: $\frac{3}{x^2 - 4} + \frac{2}{x + 2} = 1$.

【答案】 $x_1 = -1, x_2 = 3$

【解析】

【分析】观察可得最简公分母是 $(x+2)(x-2)$ ，方程两边乘以最简公分母，可以把分式方程化为整式方程，再求解.

【详解】解：方程两边同乘 $(x+2)(x-2)$ ，得： $3+2(x-2)=x^2-4$ ，

整理，得 $x^2-2x-3=0$ ，

$$\therefore (x+1)(x-3)=0,$$

$$\therefore x_1=-1, \quad x_2=3.$$

经检验： $x=-1$ ， $x=3$ 都是原方程的根.

所以原方程的根是 $x_1=-1$ ， $x_2=3$.

【点睛】本题考查解分式方程. 解题的关键在于利用解分式方程的基本思想“转化思想”，把分式方程转化为整式方程求解. 注意解分式方程一定要注意要验根.

四、解答题 (本大题共 8 小题, 共 54 分)

22. 解方程组:
$$\begin{cases} x+y=2 \\ x^2-3xy+2y^2=0 \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2=\frac{4}{3} \\ y_2=\frac{2}{3} \end{cases}$$

【解析】

【分析】由①可知 $y=2-x$ 代入②可得一个关于 x 的一元二次方程，进行解答，求出 x 值，再进一步求 y 即可.

【详解】
$$\begin{cases} x+y=2 \text{ ①} \\ x^2-3xy+2y^2=0 \text{ ②} \end{cases}$$

由①得： $y=2-x$ ，

代入②化简得 $3x^2-7x+4=0$ ，解得 $x_1=1$ ， $x_2=\frac{4}{3}$ ，

分别将 $x_1=1$ ， $x_2=\frac{4}{3}$ 代入①，得 $y_1=1$ ， $y_2=\frac{2}{3}$.

$$\therefore \text{原方程组的解为} \begin{cases} x_1=1 \\ y_1=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2=\frac{4}{3} \\ y_2=\frac{2}{3} \end{cases}.$$

【点睛】 本题考查了解二元二次方程组，掌握十字相乘法，把原方程组转化为两个二元一次方程组是解决本题的关键.

23. 解方程: $x - \sqrt{x+1} - 1 = 0$.

【答案】 $x = 3$

【解析】

【分析】 首先移项，然后两边平方，再移项，合并同类项，即可.

【详解】 解: $x - \sqrt{x+1} - 1 = 0$

$$x - 1 = \sqrt{x+1},$$

$$x^2 - 2x + 1 = x + 1,$$

$$x^2 - 3x = 0,$$

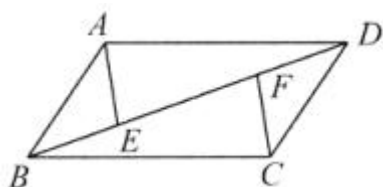
解得: $x_1 = 0$; $x_2 = 3$,

经检验: $x_1 = 0$ 是增根, 舍去, $x_2 = 3$ 是原方程的根,

所以原方程的根是 $x = 3$.

【点睛】 本题主要考查解无理方程，关键在于掌握好方法，认真正确地进行运算，注意最后要把 x 的值代入原方程进行检验.

24. 如图，在 $\square ABCD$ 中， E, F 是对角线 BD 上的两点，且 $BE = DF$ ，连接 AE, CF 。求证: $AE = CF$ 。



【答案】 见详解

【解析】

【分析】 由题意易得 $AB = CD$, $AB \parallel CD$, 则有 $\angle ABE = \angle CDF$, 进而可得 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$, 然后问题可求证.

【详解】 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB = CD, AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle CDF,$$

$$\because BE = DF,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore AE = CF.$$

【点睛】 本题主要考查平行四边形的性质及全等三角形的性质与判定，熟练掌握平行四边形的性质及全等

三角形的性质与判定是解题的关键.

25. 一项工程, 甲、乙两人合作 8 天可完成, 若甲单独做 6 天后, 剩下的由乙独做还需 12 天才能完成. 甲、乙两人单独完成此项工程各需多少天.

【答案】甲单独完成此项工程需要 12 天, 乙单独完成此项工程需要 24 天

【解析】

【分析】可以设甲、乙单独完成此项工程各自需要 x, y 天, 根据甲、乙两人合作, 8 天可以完成; 甲独做 6 天后, 剩下的由乙做, 还需 12 天才能完成, 即可列方程组求得 x, y 的值.

【详解】解: 设甲、乙单独完成此项工程各自需要 x, y 天,

根据题意得:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8} \\ \frac{6}{x} + \frac{12}{y} = 1 \end{cases},$$

解得:
$$\begin{cases} x = 12 \\ y = 24 \end{cases},$$

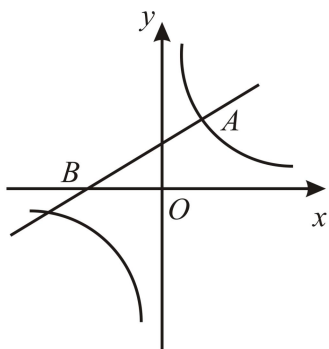
经检验 $\begin{cases} x = 12 \\ y = 24 \end{cases}$ 是方程组的解.

答: 甲单独完成此项工程需要 12 天, 乙单独完成此项工程需要 24 天.

【点睛】本题主要考查了分式方程的应用, 正确理解题目中的相等关系, 理解工作时间、工作量、工作效率之间的关系是解题关键.

26. 已知: 如图, 一次函数的图象与 x 轴负半轴交于点 B , 与反比例函数 $y = \frac{\sqrt{3}}{x}$ 的图象交于点 $A(1, n)$, 若

$\triangle ABO$ 的面积为 $\sqrt{3}$. 求一次函数的解析式.



【答案】 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】根据题意，可以求得点 B 的坐标，从而可以得到这两个函数的解析式；

【详解】解：∵ 反比例函数 $y = \frac{\sqrt{3}}{x}$ 的图象交于点 $A(1, n)$,

$$\therefore n = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3},$$

$$\therefore A(1, \sqrt{3}),$$

∵ $\triangle ABO$ 的面积为 $\sqrt{3}$,

$$\therefore \frac{1}{2}OB \times \sqrt{3} = \sqrt{3},$$

$$\therefore OB = 2,$$

$$\therefore B(-2, 0),$$

设一次函数 $y = kx + b$,

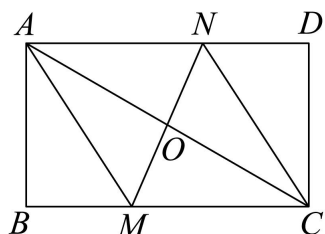
$$\text{代入 } A、B \text{ 的坐标得 } \begin{cases} k + b = \sqrt{3} \\ -2k + b = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ b = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\text{即一次函数的解析式为 } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

【点睛】本题是反比例函数与一次函数的交点问题，考查了反比例函数图象上点的坐标特征，三角形面积以及待定系数法求一次函数的解析式，求得交点坐标是解答本题的关键。

27. 如图，矩形 $ABCD$ 中， AC 为对角线， O 为 AC 中点， $AB = 2$ ， $BC = 4$ ，当四边形 $AMCN$ 为菱形时，求 BM 的值。



$$\text{【答案】 } \frac{3}{2}$$

【解析】

【分析】设出 $BM = x$ ，利用菱形的性质可得 $AM = CM = BC - BM = 4 - x$ ，在 $Rt\triangle ABM$ 中，由勾股

定理列出方程即可求解.

【详解】解: $\because$ 四边形 $AMCN$ 为菱形,

$$\therefore AM = CM,$$

$$\text{设 } BM = x, \text{ 则 } AM = CM = BC - BM = 4 - x,$$

$$\because \text{矩形 } ABCD \text{ 中, } \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle ABM \text{ 中, 由勾股定理得: } AB^2 + BM^2 = AM^2,$$

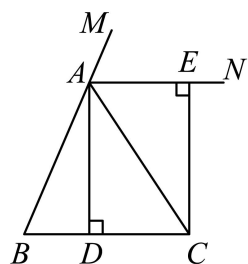
$$\text{即 } 2^2 + x^2 = (4 - x)^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{3}{2},$$

$$\therefore BM \text{ 的值为 } \frac{3}{2}.$$

【点睛】本题考查了矩形的性质, 菱形的性质, 勾股定理等知识, 熟练掌握矩形与菱形的性质是解题的关键.

28. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $AD \perp BC$, 垂足为点 D , AN 是 $\triangle ABC$ 外角 $\angle CAM$ 的平分线, $CE \perp AN$, 垂足为点 E .



(1) 求证: 四边形 $ADCE$ 为矩形;

(2) 当 $\triangle ABC$ 满足什么条件时, 四边形 $ADCE$ 为正方形? 给出证明.

【答案】(1) 见解析 (2) 当 $\angle BAC = 90^\circ$ 时, 四边形 $ADCE$ 是一个正方形, 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 根据矩形的有三个角是直角的四边形是矩形, 已知 $CE \perp AN$, $AD \perp BC$, 所以求证 $\angle DAE = 90^\circ$, 可以证明四边形 $ADCE$ 为矩形.

(2) 根据正方形的判定, 我们可以假设当 $AD = \frac{1}{2}BC$, 由已知可得, $DC = \frac{1}{2}BC$, 由 (1) 的结论可知四边形 $ADCE$ 为矩形, 所以证得, 四边形 $ADCE$ 为正方形.

【小问 1 详解】

解: 证明: 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $AD \perp BC$,

$$\therefore \angle BAD = \angle DAC,$$

$\because AN$ 是 $\triangle ABC$ 外角 $\angle CAM$ 的平分线,

$$\therefore \angle MAE = \angle CAE,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle DAC + \angle CAE = \frac{1}{2}180^\circ = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because AD \perp BC, CE \perp AN,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle CEA = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 为矩形.

【小问 2 详解】

当 $\triangle ABC$ 满足 $\angle BAC = 90^\circ$ 时, 四边形 $ADCE$ 是一个正方形.

理由: $\because AB = AC,$

$$\therefore \angle ACB = \angle B = 45^\circ,$$

$$\because AD \perp BC,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle ACD = 45^\circ,$$

$$\therefore DC = AD,$$

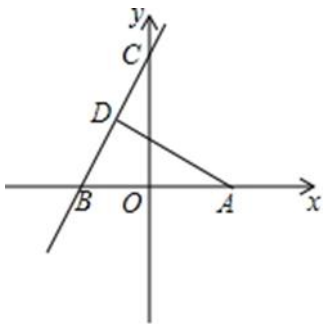
$\because$ 四边形 $ADCE$ 为矩形,

$\therefore$ 矩形 $ADCE$ 是正方形.

$\therefore$ 当 $\angle BAC = 90^\circ$ 时, 四边形 $ADCE$ 是一个正方形.

【点睛】本题是一道开放型试题, 主要考查了对矩形的判定, 正方形的判定, 等腰三角形的性质, 及角平分线的性质等知识的综合运用.

29. 如图, 在直角坐标系 xOy 中, 点 $A(2,0)$ 和点 $B(-2,0)$, 直线 BC 与 y 轴正半轴交于点 $C(0,b)$, 过点 A 作 $AD \perp BC$, 垂足为 D , 联结 OD .



(1) 求 OD 的长;

(2) 当 $\angle ODA = 30^\circ$ 时, 求点 C 的坐标;

(3) 在(2)的条件下, 已知点 E 在直角坐标平面内, 如果以 A 、 C 、 D 、 E 为顶点的四边形是平行四边形, 请直接写出点 E 的坐标.

【答案】(1) 2 (2) $C(0, 2\sqrt{3})$.

$$(3) E_1(3, \sqrt{3}), E_2(-3, 3\sqrt{3}), E_3(1, -\sqrt{3})$$

【解析】

【分析】(1) 根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半即可求出答案；

(2) 根据含 30° 角的直角三角形 $\triangle ABD$ 及 $OA = OB = OD$ 可求出 $Rt\triangle BCO$ 及边长，即可求出答案；

(3) 根据题意作图，结合直角三角形，角度，勾股定理，即可求出答案。

【小问 1 详解】

解：如图所示，

$$\therefore AD \perp BC,$$

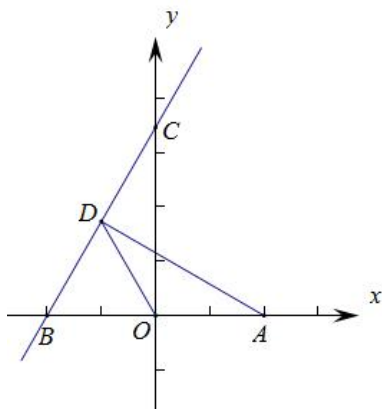
$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore A(2, 0), B(-2, 0),$$

$$\therefore OA = OB = 2, \text{ 即点 } O \text{ 是 } AB \text{ 的中点, 在 } Rt\triangle ABD,$$

$$\therefore OD = \frac{1}{2}AB = 2.$$

故答案是：2.



【小问 2 详解】

$$\text{解：} \because \angle ODA = 30^\circ, OD = OA,$$

$$\therefore \angle ODA = \angle OAD = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle OBD = 60^\circ,$$

$$\text{在 } Rt\triangle OBC \text{ 中, } OC = OB \cdot \tan 60^\circ = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore C(0, 2\sqrt{3}).$$

故点 C 的坐标是： $(0, 2\sqrt{3})$.

【小问 3 详解】

解：如图 1 所示，过点 A 作 $AE_1 \parallel DC$,

$\therefore$ 四边形 $ADCE_1$ 是平行四边形, 由 (2) 可知 $BD = CD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 4 = 2$,

$\therefore AE_1 = DC = 2$, 且 $AE_1 \parallel DC$, 过点 E_1 作 $E_1M \perp x$ 轴于 M , $\angle MAE_1 = 60^\circ$,

$\therefore E_1(3, \sqrt{3})$.

如图 2 所示, 联结 AC , 过点 D 作 $DE_2 \parallel AC$,

$\therefore$ 四边形 $ACDE_2$ 是平行四边形, 过点 E_2 作 $E_2H \perp x$ 轴于 H ,

$\therefore E_2(1, -\sqrt{3})$.

如图 3 所示, 联结 AC , 过点 D 作 $DE_3 \parallel AC$,

$\therefore$ 四边形 ACE_3D 是平行四边形,

$\therefore$ 同理得 $E_3(-3, 3\sqrt{3})$,

故点 E 的坐标是: $(3, \sqrt{3})$, $(-3, 3\sqrt{3})$, $(1, -\sqrt{3})$.

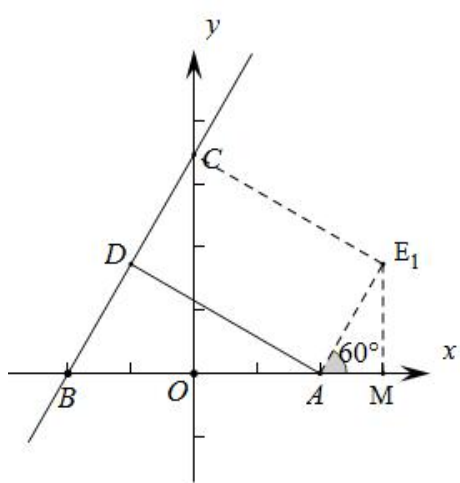


图1

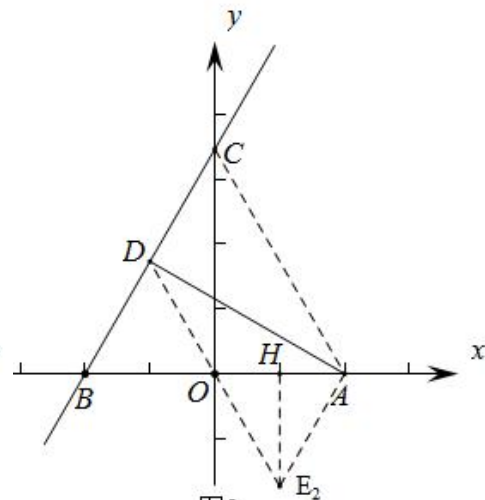


图2

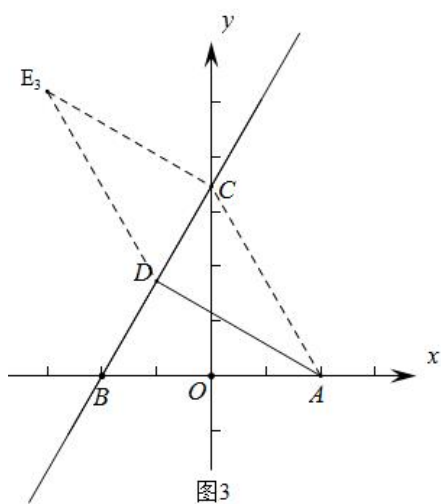


图3

【点睛】 本题主要考查的是平行四边形的性质，结合平面直角坐标系，直角三角形，勾股定理考查坐标点的确定，理解和掌握平行四边形的性质，解直角三角形的知识是解题的关键.