

2022 学年第二学期初二年级期末考试数学学科试卷

完卷时间：100 分钟 满分：100 分

一、填空题（每空 2 分，共 32 分）

1. 当 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 时，函数 $y = x^{m^2-15} + (4-m)$ 是一次函数，且不是正比例函数.

【答案】 -4

【解析】

【分析】 根据一次函数的解析式为： $y = kx + b$ ，则 $m^2 - 15 = 1$ ；根据题意， $b \neq 0$ ，则 $4 - m \neq 0$ ，即可.

【详解】 $\because$ 函数 $y = x^{m^2-15} + (4-m)$ 是一次函数，且不是正比例函数，

$$\therefore \begin{cases} m^2 - 15 = 1 \\ 4 - m \neq 0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m = \pm 4 \\ m \neq 4 \end{cases},$$

$$\therefore m = -4,$$

故答案为： -4.

【点睛】 本题考查一次函数的知识，解题的关键是掌握一次函数的定义.

2. 把直线 $y = -2x + 4$ 向左平移 3 个单位后，在 y 轴上的截距为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 根据“上加下减，左加右减”的原则求出平移后的解析式，再根据在 y 轴上的截距为当 $x = 0$ 时，求 y 的值即可.

【详解】 解：由“左加右减”的原则可知，将直线 $y = -2x + 4$ 向左平移 3 个单位后，所得直线的表达式为

$$y = -2(x+3) + 4, \text{ 即 } y = -2x - 2,$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } y = -2,$$

$\therefore$ 在 y 轴上的截距为 -2.

故答案为： -2.

【点睛】 本题考查的是一次函数的图象与几何变换，熟知“上加下减，左加右减”的原则是解答此题的关键.

3. 方程 $\sqrt{x-4} \cdot \sqrt{x+2} = 0$ 的根为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x = 4$

【解析】

【分析】 利用有理数积的乘法得到 $x - 4 = 0$ 或 $x + 2 = 0$ ，然后解一元一次方程后进行检验确定原方程的解.

【详解】 解：根据题意得 $x - 4 = 0$ 或 $x + 2 = 0$,

解得 $x = 4$ 或 $x = -2$,

经检验 $x = 4$ 为原方程的解.

故答案为： $x = 4$.

【点睛】 考查了解无理方程，解题关键是熟记解无理方程的基本思想是把无理方程转化为有理方程来解，在变形时要注意根据方程的结构特征选择解题方法. 常用的方法有：乘方法，配方法，因式分解法，设辅助元素法，利用比例性质法等.

4. 用换元法解方程 $\frac{x^2-1}{2x} - \frac{4x}{x^2-1} = 1$ 时，如果设 $\frac{x^2-1}{x} = y$ ，那么所得到的关于 y 的整式方程为_____.

【答案】 $y^2 - 2y - 8 = 0$

【解析】

【分析】 由 $\frac{x^2-1}{x} = y$ ，则 $\frac{x^2-1}{2x} = \frac{y}{2}$ ， $\frac{4x}{x^2-1} = \frac{4}{y}$ ，转化后再进一步整理得到整式方程即可.

【详解】 解： $\because \frac{x^2-1}{x} = y$,

$$\therefore \frac{x^2-1}{2x} = \frac{y}{2}, \quad \frac{4x}{x^2-1} = \frac{4}{y},$$

$$\text{则原方程为: } \frac{y}{2} - \frac{4}{y} = 1,$$

$$\text{整理得: } y^2 - 2y - 8 = 0,$$

$$\text{故答案为: } y^2 - 2y - 8 = 0.$$

【点睛】 本题考查了用换元法解分式方程，掌握换元法、变量代换法，通过引进新的变量，可以把分散的条件联系起来，隐含的条件显露出来，或者把条件与结论联系起来，或者变为熟悉的形式，把复杂的计算和推证简化是解题的关键.

5. 若方程组 $\begin{cases} x^2 + y = 1 \\ x - 3y + k = 0 \end{cases}$ 有实数解，则实数 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k \leq \frac{37}{12}$ ## $k \leq 3\frac{1}{12}$

【解析】

【分析】 将方程组转化为一元二次方程，根据方程组有实数根，得到 $\Delta \geq 0$ ，进行求解即可.

【详解】 解：
$$\begin{cases} x^2 + y = 1 \textcircled{1} \\ x - 3y + k = 0 \textcircled{2} \end{cases}$$

由②，得： $x = 3y - k$ ，

把 $x = 3y - k$ ，代入①，得： $(3y - k)^2 + y = 1$ ，

整理，得： $9y^2 + (1 - 6k)y + k^2 - 1 = 0$ ，

$\therefore$ 方程组有实数根，

$$\therefore \Delta = (1 - 6k)^2 - 4 \times 9(k^2 - 1) \geq 0,$$

解得： $k \leq \frac{37}{12}$ ；

故答案为： $k \leq \frac{37}{12}$.

【点睛】 本题考查解二元二次方程组. 解题的关键是将二元二次方程组转化为一元二次方程，利用根的判别式进行求解.

6. 已知直线 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 与 x 轴和 y 轴的交点分别是 $(-1, 0)$ 和 $(0, -2)$ ，那么关于 x 的不等式 $kx + b < 0$ 的解集是_____.

【答案】 $x > -1$

【解析】

【分析】 由题意可以求得 k 和 b 的值，代入不等式即可得到正确答案 .

【详解】 解： 由题意可得：
$$\begin{cases} 0 = -k + b \\ -2 = b \end{cases},$$

$$\therefore k = -2, b = -2$$

$$\therefore \text{原不等式即为 } -2x - 2 < 0,$$

解得： $x > -1$ ，

故答案为： $x > -1$.

【点睛】 本题考查一次函数与一元一次不等式的综合应用，利用直线与坐标轴的交点求出不等式的系数是解题关键.

7. 不透明的布袋里有 2 个黄球、3 个红球，它们除颜色外其它都相同，那么

(1) 从布袋中任意摸出一个球，这个球恰好是红球的概率是_____.

(2) 从布袋中一次摸出两个球，这两个球颜色相同的概率是_____.

【答案】 ①. $\frac{3}{5}$ ## 0.6 ②. $\frac{2}{5}$ ## 0.4

【解析】

【分析】(1) 直接根据概率公式求解即可；

(2) 列表得出所有可能出现的结果，从中找出符合条件的结果数，再根据概率公式求解即可.

【详解】(1) 解：从布袋中任意摸出一个球，这个球恰好是红球的结果有 3 种，

∴ 恰好是红球的概率为： $\frac{3}{5}$ ，

故答案为： $\frac{3}{5}$ ；

(2) 列表如下：

	红	红	红	黄	黄
红		(红，红)	(红，红)	(黄，红)	(黄，红)
红	(红，红)		(红，红)	(黄，红)	(黄，红)
红	(红，红)	(红，红)		(黄，红)	(黄，红)
黄	(红，黄)	(红，黄)	(红，黄)		(黄，黄)
黄	(红，黄)	(红，黄)	(红，黄)	(黄，黄)	

由表知，共有 20 种可能出现的结果，其中另个颜色相同的结果有 8 种，

所以这两个球颜色相同的概率为： $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ ，

故答案为： $\frac{2}{5}$.

【点睛】 本题考查了概率公式和利用列表法和画树状图法求概率，注意列表法和画树状图法不要遗漏和重复出现的结果是解题的关键.

8. 一个多边形的内角和是 1440° ，则这个多边形的边数为_____.

【答案】 10

【解析】

【分析】 设这个多边形的边数为 n ，根据多边形内角和公式列出方程，解方程即可求解.

【详解】 解：设这个多边形的边数为 n ，

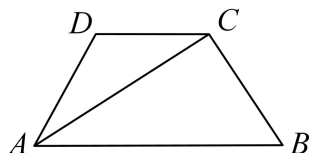
则 $(n-2) \times 180^\circ = 1440^\circ$ ，

解得 $n = 10$.

故答案为: 10.

【点睛】 本题考查了多边形内角和公式, 熟练掌握多边形内角和公式是解题的关键.

9. 如图, 梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle ACB = 90^\circ$, 且 AC 平分 $\angle BAD$, $\angle D = 120^\circ$, $CD = 3\text{cm}$, 则梯形的周长是_____ cm.



【答案】 15

【解析】

【分析】 由 $AB \parallel CD$ 推出 $\angle DCA = \angle BAC$, 得到 $\angle DAB = 60^\circ$, 由角平分线的定义得到 $\angle DAC = \angle BAC = 30^\circ$ 因此 $\angle DCA = \angle DAC$, 推出 $AD = CD = 3\text{cm}$ 求出 $\angle B = 90^\circ - \angle BAC = 60^\circ$, 得到梯形 $ABCD$ 是等腰梯形, 即可求解.

【详解】 解: $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle D + \angle DAB = 180^\circ, \quad \angle DCA = \angle BAC,$$

$$\because \angle D = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB = 60^\circ,$$

$$\because AC \text{ 平分 } \angle BAD,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle BAC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DCA = \angle DAC,$$

$$\therefore AD = CD = 3\text{cm},$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 90^\circ - \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle DAC,$$

$\therefore$ 梯形 $ABCD$ 是等腰梯形,

$$\therefore AD = BC = 3\text{cm},$$

$$\therefore AB = 2BC = 6\text{cm},$$

$$\therefore \text{梯形 } ABCD \text{ 的周长} = AD + CD + BC + AB = 3 + 3 + 3 + 6 = 15\text{cm},$$

故答案为: 15.

【点睛】 本题考查梯形, 等腰三角形的判定与性质, 直角三角形的性质, 关键是证明 $AD = BC = 3\text{cm}$.

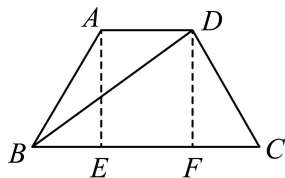
10. 等腰梯形的对角线为 17, 底边分别为 10 和 20, 则梯形的面积是_____.

【答案】 120

【解析】

【分析】 过 A 、 D 作 BC 的垂线, 易证 $\triangle ABE \cong \triangle DCF$, 从而得出 $AD = EF$, $BE = CF$, 根据勾股定理可求得 DF 的长, 即可求出答案.

【详解】 解: 过 A 、 D 作 BC 的垂线, 垂足分别为 E 、 F ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形,

$\therefore AB = CD$, $\angle ABC = \angle DCB$, $AD \parallel BC$,

$\because AE \perp BC$, $DF \perp BC$,

$\therefore \angle AEB = \angle DFC = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DCF$,

$\therefore BE = CF$,

$\because AE \perp BC$, $DF \perp BC$,

$\therefore AE \parallel DF$,

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是平行四边形,

$\therefore AD = EF$,

$\because$ 等腰梯形的对角线为 17, 底边分别为 10 和 20,

$\therefore AD = EF = 10$, $BD = 17$,

$\therefore BE = CF = 5$,

$\therefore BF = 15$,

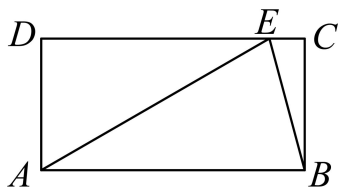
在 $\text{Rt}\triangle BDF$ 中, 由勾股定理得: $DF = \sqrt{BD^2 - BF^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$,

$\therefore$ 梯形的面积是: $\frac{1}{2} (10 + 20) \cdot 8 = 120$.

故答案为: 120 .

【点睛】 本题考查了等腰梯形的性质, 能够将等腰梯形的问题通过作高线转化成直角三角形是解决问题的关键.

11. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2BC$, 在 CD 上取一点 E , 使 $AE = AB$, 则 $\angle EBC$ 的度数为_____.



【答案】 15° ##15 度

【解析】

【分析】作 $EF \perp AB$ 于 F ，延长 AD 到 F ，使得 $AD = DF$ ，先证明 $\triangle AEF$ 是等边三角形，从而得到 $\angle AED = \frac{1}{2} \angle AEF = 30^\circ$ ，继而求出 $\angle EAF = 30^\circ$ ，再根据等腰三角形的底角相等求出 $\angle ABE$ ，最后利用 $\angle ABC = 90^\circ$ 求出 $\angle EBC$ 即可.

先求出 $\angle ADE$

【详解】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle D = 90^\circ$ ， $AD = BC$ ， $AB \parallel CD$ ， $\angle ABC = 90^\circ$

作 $EF \perp AB$ 于 F ，则 $EF = BC$ ，

延长 AD 到 F ，使得 $AD = DF$ ，

则 DE 垂直平分 AF ， $AF = 2AD$ ，

$\therefore AE = EF$ ，

又 $AB = 2BC$ ， $AE = AB$ ，

$\therefore AE = 2EF = 2AD$ ，

$\therefore AE = EF = AF$ ，

$\therefore \triangle AEF$ 是等边三角形， $\angle AEF = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle AED = \frac{1}{2} \angle AEF = 30^\circ$ ，

又 $\because AB \parallel CD$

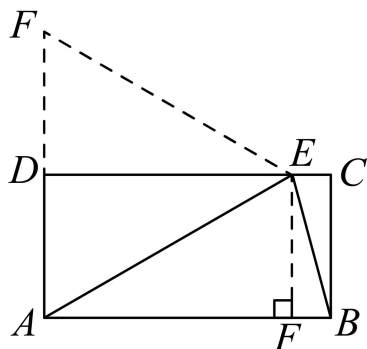
$\therefore \angle EAF = \angle AED = 30^\circ$ ，

又 $\because AE = AB$ ，

$\therefore \angle ABE = \angle AEB = 75^\circ$ ，

$\therefore \angle EBC = \angle ABC = 90^\circ - \angle ABE = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$.

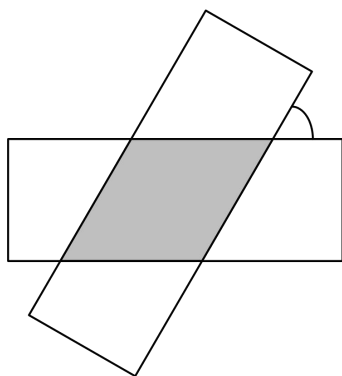
故答案为： 15°



【点睛】本题考查等边三角形的判定与性质，等边对等角，矩形的性质等

知识，正确作出辅助线求解是解题的关键.

12. 如图，两条宽度都为 1 的纸条，交叉重叠放在一起，它们的夹角 $\alpha = 60^\circ$ ，它们重叠部分（图中阴影部分的面积是_____.



【答案】 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】如图：过 C 作 $CE \perp AB$ ， $CF \perp AD$ ，垂足为 E ， F ，则重叠部分为平行四边形，运用三角函数定义先求边长 BC ，再根据平行四边形的面积公式求解即可.

【详解】解：如图：过 C 作 $CE \perp AB$ ， $CF \perp AD$ ，垂足为 E ， F ，
由题意可得： $\angle EBC = \angle \alpha = 60^\circ$ ， $CE = CF = 1$ ，

$$\therefore \sin \angle EBC = \frac{CE}{BC} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 即 } \frac{1}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

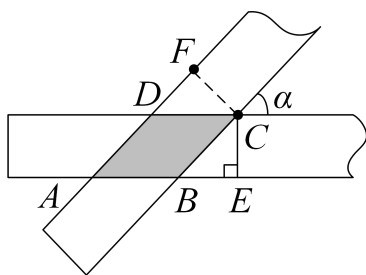
$$\therefore BC = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore AB \parallel CD, AD \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore \text{重叠部分 (图中阴影部分) 的面积为 } BC \cdot CF = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times 1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

故答案为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.



【点睛】此题主要考查了平行四边形的判定与性质、三角函数的应用，利

用三角函数求出 BC 的长是解答本题的关键.

13. 若关于 x 的方程 $\sqrt{4-x} - a + 1 = 0$ 有实数解, 则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a \geq 1$

【解析】

【分析】先将原方程变换为 $\sqrt{4-x} = a-1$, 再根据算术平方根的非负性列不等式求解即可.

【详解】解: $\because \sqrt{4-x} - a + 1 = 0$,

$$\therefore \sqrt{4-x} = a-1,$$

$$\because \sqrt{4-x} \geq 0,$$

$$\therefore a-1 \geq 0, \text{ 即 } a \geq 1.$$

故答案为: $a \geq 1$.

【点睛】本题主要考查了算术平方根的非负性, 掌握算术平方根大于等于零成为解答本题的关键.

14. 若关于 x 的方程 $\frac{2}{x} - \frac{x-m}{x^2-x} = 1 + \frac{1}{x-1}$ 无实根, 则 m 取值范围是_____.

【答案】 $m < \frac{7}{4}$ 或 $m = 2$

【解析】

【分析】将分式方程转化为整式方程, 分两种情况, 整式方程无解和分式方程有增根, 进行求解即可.

【详解】解: 将分式方程转化为整式方程为: $2(x-1) - (x-m) = x^2 - x + x$,

$$\text{整理得: } x^2 - x + 2 - m = 0,$$

$\therefore$ 分式方程无实数根,

$$\text{①整式方程无实数根, 则: } \Delta = (-1)^2 - 4(2-m) < 0, \text{ 解得: } m < \frac{7}{4};$$

$$\text{②分式方程有增根, 则: } x^2 - x = 0,$$

$$\therefore x_1 = 1, x_2 = 0,$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时: } 1^2 - 1 + 2 - m = 0, \text{ 解得: } m = 2,$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时: } 2 - m = 0, \text{ 解得: } m = 2,$$

综上: m 取值范围是 $m < \frac{7}{4}$ 或 $m = 2$;

故答案为: $m < \frac{7}{4}$ 或 $m = 2$.

【点睛】 本题考查分式方程解的情况求参数的取值范围. 解题的关键是熟练掌握分式方程无实数根的情况, 正确的计算.

15. 已知平面内有两点 $A(-1, 0)$ 、 $B(5, 0)$, P 点在 y 轴上, M 点在直线 $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ 上, 若以 A 、 B 、 P 、 M 为顶点的四边形是平行四边形, 则 M 点的坐标是_____.

【答案】 $\left(4, \frac{1}{2}\right)$ 或 $\left(-6, -\frac{9}{2}\right)$ 或 $\left(6, \frac{3}{2}\right)$

【解析】

【分析】 设 $P(0, a)$, $M\left(m, \frac{1}{2}m - \frac{3}{2}\right)$, 分别以 AB , AP , BP 为平行四边形的对角线, 三种情况讨论求解即可.

【详解】 解: 由题意, 设: $P(0, a)$, $M\left(m, \frac{1}{2}m - \frac{3}{2}\right)$,

$\therefore$ 以 A 、 B 、 P 、 M 为顶点的四边形是平行四边形,

①当 AB 为对角线时: $-1 + 5 = 0 + m$, 解得: $m = 4$,

$$\therefore M\left(4, \frac{1}{2}\right);$$

②当 AP 为对角线时: $-1 + 0 = 5 + m$, 解得: $m = -6$,

$$\therefore M\left(-6, -\frac{9}{2}\right);$$

③当 BP 为对角线时: $5 + 0 = -1 + m$, 解得: $m = 6$,

$$\therefore M\left(6, \frac{3}{2}\right);$$

综上: $M\left(4, \frac{1}{2}\right)$ 或 $M\left(-6, -\frac{9}{2}\right)$ 或 $M\left(6, \frac{3}{2}\right)$;

故答案为: $\left(4, \frac{1}{2}\right)$ 或 $\left(-6, -\frac{9}{2}\right)$ 或 $\left(6, \frac{3}{2}\right)$.

【点睛】 本题考查坐标与图形, 平行四边形的性质, 熟练掌握平行四边形的对角线互相平分, 以及中点坐标公式, 是解题的关键, 注意, 分类讨论.

二、选择题 (每题 3 分, 共 18 分)

16. 关于函数 $y = -2x + 1$, 下列结论正确的是 ()

A. 图象必经过点 $(-2, 1)$

B. 图象经过第一、二、三象限

C. 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $y < 0$

D. y 随 x 的增大而增大

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据一次函数的性质, 依次分析即可.

【详解】 A. $x = -2$ 时, $y = -2 \times (-2) + 1 = 5$, 故图象必经过 $(-2, 5)$, 故错误,

B. $k = -2 < 0$, $b = 1 > 0$, 则图象经过第一、二、四象限, 故错误,

C. 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $y < 0$, 故正确;

D. $k < 0$, 则 y 随 x 的增大而减小, 故错误,

故选 C.

【点睛】 本题考查了一次函数的图象以及一次函数的性质, 解题的关键是逐条分析四个选项. 本题属于基础题, 难度不大, 解决该题时, 熟悉一次函数的性质、一次函数图象上点的坐标特征以及一次函数图象与系数的关系是解题的关键.

17. 下列方程中, 有实数根的是 ()

A. $\sqrt{x-1} = -x$

B. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = 0$

C. $\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{x^2-1}$

D. $\sqrt{x+2} = x$

【答案】 D

【解析】

【分析】 分别解无理方程和分式方程, 进行判断即可.

【详解】 解: A、 $\sqrt{x-1} = -x$,

$$\therefore x-1 \geq 0, \sqrt{x-1} \geq 0$$

$$\therefore x \geq 1,$$

$$\therefore -x < 0,$$

$\therefore$ 原方程没有实数根，不符合题意；

$$\text{B、} \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = 0,$$

$$\therefore \sqrt{x-1} \geq 0, \sqrt{x-2} \geq 0,$$

$$\therefore x-1=0 \text{ 且 } x-2=0,$$

$\therefore$ 原方程没有实数根，不符合题意；

$$\text{C、} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{x^2-1},$$

$$\therefore x=1,$$

$$\text{当 } x=1 \text{ 时, } x^2-1=0,$$

$\therefore$ 原方程没有实数根，不符合题意；

$$\text{D、} \sqrt{x+2} = x,$$

$$\therefore x^2 - x - 2 = 0,$$

$$\therefore (x-2)(x+1) = 0,$$

$$\therefore x=2 \text{ 或 } x=-1 \text{ (舍去);}$$

$\therefore$ 方程有实数根，符合同意；

故选 D.

【点睛】 本题考查解分式方程和无理方程. 熟练掌握解分式方程和无理方程的步骤，正确的计算是解题的关键.

18. 下面有四个命题:

- ①两组对边分别相等的四边形是平行四边形;
- ②一组对边平行且相等的四边形是平行四边形;
- ③一组对边平行另一组对边相等的四边形是平行四边形;
- ④一组对角相等且一条对角线平分另一条对角线的四边形是平行四边形.

其中，正确的命题的个数是 ()

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

【答案】 B

【解析】

【分析】根据平行四边形的判定，对命题进行判断，即可．

【详解】①两组对边分别相等的四边形是平行四边形，故①正确；

②一组对边平行且相等的四边形是平行四边形，故②正确；

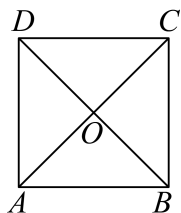
③一组对边平行另一组对边相等的四边形不一定是平行四边形，如等腰梯形，故③错误；

④一组对角相等且一条对角线平分另一条对角线的四边形不能判定四边形是平行四边形，故④错误； $\therefore$ 正确的命题为：①②．

故选：B．

【点睛】本题考查平行四边形的知识，解题的关键是掌握平行四边形的判定．

19. 如图，已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，那么添加下列条件能判定四边形 $ABCD$ 是正方形的是（ ）



A. $AB = AD$ 且 $AC \perp BD$

B. $AC \perp BD$ 且 AC 和 BD 互相平分

C. $\angle BAD = \angle ABC$ 且 $AC = BD$

D. $AC = BD$ 且 $AB = AD$

【答案】D

【解析】

【分析】根据正方形的判定方法，逐一进行判断即可．

【详解】解：A、 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形， $AB = AD$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AC \perp BD$ ，

不能证明四边形 $ABCD$ 是正方形，不符合题意；

B、 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AC$ 和 BD 互相平分，

$\therefore AC \perp BD$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

不能证明四边形 $ABCD$ 是正方形，不符合题意；

C、 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形， $AC = BD$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore \angle BAD = \angle ABC = 90^\circ,$$

不能证明四边形 $ABCD$ 是正方形，不符合题意；

D、 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形， $AC = BD$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

又 $AB = AD$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，符合题意；

故选 D.

【点睛】 本题考查正方形的判定. 熟练掌握正方形的判定方法：对角线相等的菱形是正方形，邻边相等的矩形是正方形，是解题的关键.

20. 下列命题中，真命题是 ()

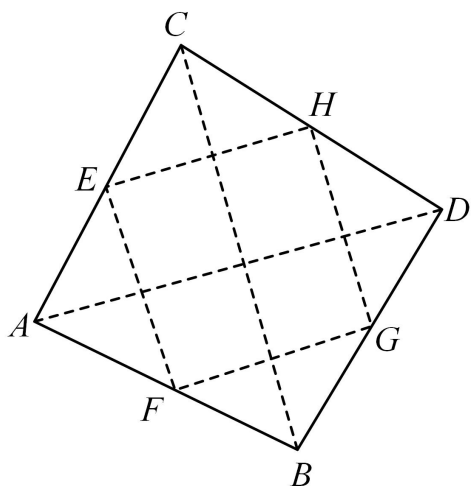
- A. 顺次联结平行四边形各边的中点，所得的四边形一定是矩形
- B. 顺次联结等腰梯形各边的中点，所得的四边形一定是菱形
- C. 顺次联结对角线垂直的四边形各边的中点，所得的四边形一定是菱形
- D. 顺次联结对角线相等的四边形各边的中点，所得的四边形一定是矩形

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据平行四边形、特殊的平行四边形的判定、中位线定理、中点四边形的定义进行判定即可.

【详解】 解：如图：



观察图形： E, F, G, H 分别为 AC, AB, BD, CD 的中点，根据中位线定理：

$$EF \parallel BC, GH \parallel BC, EF = GH = \frac{1}{2}BC, \quad EH \parallel AD, GF \parallel AD, EH = FG = \frac{1}{2}AD,$$

∴ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形;

A、顺次联结平行四边形各边的中点, 所得的四边形是平行四边形, 原命题为假命题, 不符合题意;

B、∵ 等腰梯形的对角线相等, 即: 当 $AD = BC$ 时,

∴ $EF = FG$,

∴ 四边形 $EFGH$ 为菱形;

∴ 顺次联结等腰梯形各边的中点, 所得的四边形一定是菱形, 原命题为真命题, 符合题意;

C、当 $AD \perp BC$ 时, 则: $EF \perp FG$,

∴ $\angle EFG = 90^\circ$,

∴ 四边形 $EFGH$ 为矩形;

∴ 顺次联结对角线垂直的四边形各边的中点, 所得的四边形一定是矩形, 原命题为假命题, 不符合题意;

D、当 $AD = BC$ 时, 则: $EF = FG$,

∴ 四边形 $EFGH$ 为菱形;

∴ 顺次联结对角线相等的四边形各边的中点, 所得的四边形一定是菱形, 原命题为假命题, 不符合题意.

故答案选: B.

【点睛】 本题考查中位线定理应用、平行四边形、特殊的平行四边形的判定, 掌握四边形的判定是解题关键.

21. 如果 $\overline{AB} = \overline{CD}$, 那么下列结论中, 正确的是 ()

A. $\overline{AC} = \overline{BD}$

B. $\overline{AC} = \overline{DB}$

C. $\overline{AD} = \overline{BC}$

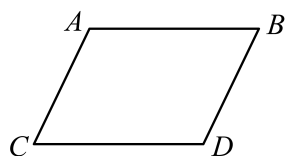
D. $\overline{AD} = \overline{CB}$

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据相等向量的定义判断四边形 $ABDC$ 是平行四边形, 进而即可解答.

【详解】 解: 如图: $\overline{AB} = \overline{CD}$, 即 $AB \parallel CD, AB = CD$, 则四边形 $ABDC$ 是平行四边形;



A. $\overline{AC}, \overline{BD}$ 长度相等, 方向相同, $\overline{AC} = \overline{BD}$, 符合题意;

B. $\overline{AC}, \overline{DB}$ 方向相反, $\overline{AC} \neq \overline{DB}$, 即不符合题意;

C. $\overline{AD}, \overline{BC}$ 方向不同, $\overline{AD} \neq \overline{BC}$, 即不符合题意;

D. $\overline{AD}, \overline{CB}$ 方向不同, $\overline{AD} \neq \overline{CB}$, 即不符合题意.

故选 A.

【点睛】 本题考查了平行四边形的性质和相等向量的定义，掌握长度相等且方向相同的向量叫做相等向量是解答本题的关键.

三、解下列方程（组）（每小题 6 分，共 12 分）

22. $2x + \sqrt{x^2 - 9} = 6.$

【答案】 $x = 3$

【解析】

【分析】 此题是无理方程，在求解时，注意将不含有根号的部分移到方程的左边，求平方即可求解，注意最后要检验.

【详解】 解：移项，得： $\sqrt{x^2 - 9} = 6 - 2x$,

两边同时平方，得： $x^2 - 9 = 36 - 24x + 4x^2$,

移项，合并同类项，化简得： $x^2 - 8x + 15 = 0$,

因式分解，得： $(x - 3)(x - 5) = 0$,

解得： $x_1 = 3, x_2 = 5$,

经检验，原方程的根为 $x = 3$.

【点睛】 本题主要考查解无理方程的知识点，去掉根号把无理式化成有理方程是解题的关键.

23. $\begin{cases} x^2 - xy - 6y^2 = 0 \\ x^2 + 2xy + y^2 = 4 \end{cases}.$

【答案】 $\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ y_1 = \frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2} \\ y_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} x_3 = 4 \\ y_3 = -2 \end{cases}, \begin{cases} x_4 = -4 \\ y_4 = 2 \end{cases}$

【解析】

【分析】 由于组中的两个二元二次方程都可以分解为两个二元一次方程，所以先分解组中的两个二元二次方程，得到四个二元一次方程，重新组合成四个二元一次方程组，再解答即可.

【详解】 解： $\begin{cases} x^2 - xy - 6y^2 = 0 \text{ ①} \\ x^2 + 2xy + y^2 = 4 \text{ ②} \end{cases}$

将①因式分解得： $(x - 3y)(x + 2y) = 0$,

$\therefore x - 3y = 0$ 或 $x + 2y = 0$

将②因式分解得: $(x+y)^2 = 4$

$\therefore x+y=2$ 或 $x+y=-2$

$\therefore$ 原方程化为: $\begin{cases} x-3y=0 \\ x+y=2 \end{cases}$, $\begin{cases} x-3y=0 \\ x+y=-2 \end{cases}$, $\begin{cases} x+2y=0 \\ x+y=2 \end{cases}$, $\begin{cases} x+2y=0 \\ x+y=-2 \end{cases}$

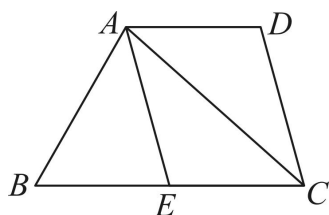
解这些方程组得: $\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ y_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$, $\begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2} \\ y_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$, $\begin{cases} x_3 = 4 \\ y_3 = -2 \end{cases}$, $\begin{cases} x_4 = -4 \\ y_4 = 2 \end{cases}$

$\therefore$ 原方程组的解为: $\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ y_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$, $\begin{cases} x_2 = -\frac{3}{2} \\ y_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$, $\begin{cases} x_3 = 4 \\ y_3 = -2 \end{cases}$, $\begin{cases} x_4 = -4 \\ y_4 = 2 \end{cases}$.

【点睛】 本题考查了二元二次方程组的解法, 解题的关键是利用因式分解法将原方程组转化为四个方程组.

四、解答题 (共 38 分)

24. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $BC = 2AD$, 点 E 是 BC 的中点.



(1) 填空: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \underline{\hspace{2cm}}$, $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 如果把图中的线段都画成有向线段, 那么在这些有向线段所表示的向量中, 与 $\overrightarrow{BC}$ 平行的向量共有 个;

(3) 求作: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EC}$. (不写作法, 保留作图痕迹, 写出结果)

【答案】 (1) $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BC}$

(2) 7

(3) 图形见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据平行四边形的性质, 向量的运算, 即可;

(2) 根据平行向量的意义求解;

(3) 根据三角形的作图, 即可.

【小问 1 详解】

$\because$ 点 E 是 BC 的中点,

$$\therefore BC = 2BE = 2EC,$$

$$\because BC = 2AD,$$

$$\therefore EC = AD,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AE = CD,$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC},$$

故答案为: $\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC}$.

【小问 2 详解】

与 $\overrightarrow{BC}$ 平行的向量有: $\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CB}$ 共 7 个,

故答案为: 7.

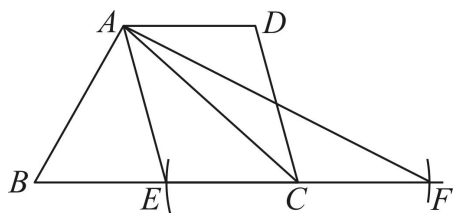
【小问 3 详解】

以点 C 为圆心, EC 长为半径, 延长 BC , 连接 AF ,

$$\therefore EC = CF,$$

$$\therefore AC + EC = AC + CF = AF.$$

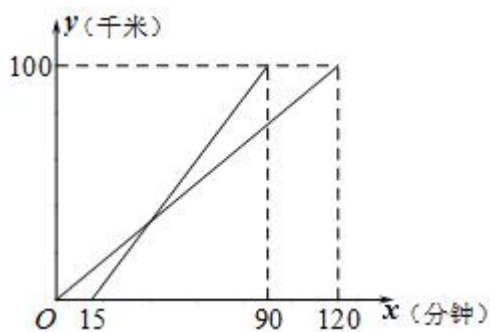
图形见下:



【点睛】 本题考查向量, 平行四边形的知识, 解题的关键是掌握平

行向量的性质, 平行四边形的性质.

25. 甲、乙两辆汽车沿同一公路从 A 地出发前往路程为 100 千米的 B 地, 乙车比甲车晚出发 15 分钟, 行驶过程中所行驶的路程分别用 y_1 、 y_2 (千米) 表示, 它们与甲车行驶的时间 x (分钟) 之间的函数关系如图所示.



(1) 分别求出 y_1 、 y_2 关于 x 的函数解析式并写出定义域；

(2) 乙车行驶多长时间追上甲车？

【答案】 (1) $y_1 = \frac{5}{6}x$ ($0 \leq x \leq 120$), $y_2 = \frac{4}{3}x - 20$ ($15 \leq x \leq 90$); (2) 25 分

【解析】

【分析】 (1) 根据函数图象中的数据，可以求得 y_1 、 y_2 关于 x 的函数解析式并写出定义域；

(2) 令 (1) 中的两个函数的函数相等，求出 x 的值，然后再减去 15，即可得到乙车行驶多长时间追上甲车.

【详解】 解：(1) 设 y_1 关于 x 的函数解析式是 $y_1 = k_1x$ ($k_1 \neq 0$),

根据题意，得： $120k_1 = 100$, $\therefore k_1 = \frac{5}{6}$,

$\therefore y_1$ 关于 x 的函数解析式是 $y_1 = \frac{5}{6}x$ ($0 \leq x \leq 120$),

设 y_2 关于 x 的函数解析式是 $y_2 = k_2x + b_2$ ($k_2 \neq 0$),

根据题意，得：
$$\begin{cases} 15k_2 + b_2 = 0 \\ 90k_2 + b_2 = 100 \end{cases}$$

解得： $k_2 = \frac{4}{3}$, $b_2 = -20$,

$\therefore y_2$ 关于 x 的函数解析式是 $y_2 = \frac{4}{3}x - 20$ ($15 \leq x \leq 90$).

(2) 根据题意，得： $\frac{5}{6}x = \frac{4}{3}x - 20$,

解得： $x = 40$,

$40 - 15 = 25$ (分钟),

答：乙车行驶 25 分钟追上甲车.

【点睛】 本题考查一次函数的应用，解答本题的关键是明确题意，利用一次函数的性质和数形结合的思想解答.

26. 甲、乙两位同学同时从学校出发，骑自行车前往距离学校 10 千米的郊野公园. 已知甲同学比乙同学平

均每小时多骑行 2 千米，甲同学在路上因事耽搁了 15 分钟，结果两人同时到达公园．问：甲、乙两位同学平均每小时各骑行多少千米？

【答案】甲平均每小时行驶 8 千米，乙平均每小时行驶 10 千米．

【解析】

【分析】设乙平均每小时骑行 x 千米，则甲平均每小时骑行 $(x+2)$ 千米，根据题意可得，同样 10 千米的距离，乙比甲多走 15 分钟，据此列方程求解．

【详解】设甲平均每小时行驶 x 千米，

$$\text{则 } \frac{10}{x} - \frac{10}{(x+2)} = \frac{1}{4},$$

$$\text{化简为: } x^2 + 2x - 80 = 0,$$

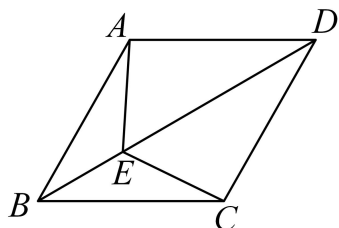
$$\text{解得: } x_1 = 8, x_2 = -10,$$

经检验 $x_2 = -10$ 不符合题意， $x_1 = 8$ 是原方程的解，

答：甲平均每小时行驶 8 千米，乙平均每小时行驶 10 千米．

【点睛】本题考查了分式方程的应用，解答本题的关键是读懂题意，设出未知数，找出合适的等量关系，列方程求解，注意检验．

27. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， E 是 BD 上一点，且 $DE = 2BE$ ， $AE = CE$ ．



(1) 求证：平行四边形 $ABCD$ 是菱形；

(2) 若 $AE = 2$ ， $AB = 4$ ，求对角线 BD 的长．

【答案】(1) 见解析 (2) $BD = 3\sqrt{6}$

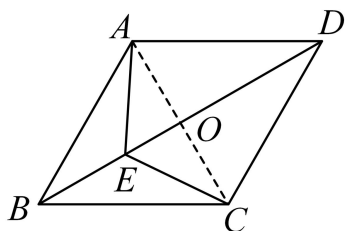
【解析】

【分析】(1) 连接 AC 交 BD 于点 O ，根据四边形 $ABCD$ 是平行四边形得 $AO = CO$ ，再根据 $AE = CE$ 得 $\triangle AEC$ 是等腰三角形，利用等腰三角形的性质证明即可；

(2) 设 $BE = x$ ，则 $DE = 2x$ ，利用勾股定理得 $AB^2 - OB^2 = AO^2 = AE^2 - OE^2$ ，列出方程求解即可．

【小问 1 详解】

证明：如图，连接 AC 交 BD 于点 O ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AO = CO,$$

$$\because AE = CE,$$

$\therefore \triangle AEC$ 是等腰三角形，

$$\therefore EO \perp AC,$$

$$\therefore BD \perp AC,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形；

【小问 2 详解】

解： $\because DE = 2BE$ ，

设 $BE = x$ ，则 $DE = 2x$ ，

$$\therefore BD = DE + BE = 3x,$$

$$\therefore OB = OD = 1.5x,$$

$$\therefore OE = OB - BE = 0.5x,$$

$$\because AB^2 - OB^2 = AO^2 = AE^2 - OE^2,$$

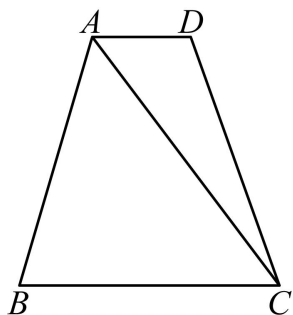
$$\therefore 4^2 - (1.5x)^2 = 2^2 - (0.5x)^2,$$

$$\therefore x = \sqrt{6} \text{ 或 } x = -\sqrt{6} \text{ (舍去)},$$

$$\therefore BD = 3x = 3\sqrt{6}.$$

【点睛】 本题考查了平行四边形的性质，菱形的判定和性质、勾股定理，解决本题的关键是掌握菱形的判定方法.

28. 在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AD < BC$ ， $AB = 5$ ， $BC = 5$ ， $AC = 6$.



- (1) 若梯形 $ABCD$ 是直角梯形，求 CD 的长；
- (2) 设 $AD = x$ ， $CD = y$ ，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出其定义域；
- (3) 当梯形 $ABCD$ 是等腰梯形时，在直线 CD 上取一点 P ，使得 $\triangle BCP$ 是以 BC 为腰的等腰三角形，直接写出此时 $\triangle BCP$ 的底边长。

【答案】(1) $\frac{24}{5}$

(2) $y^2 = x^2 - \frac{36}{5}x + \frac{178}{5} \left(0 < x < \frac{18}{5} \right)$

(3) 6 或 $\frac{14}{5}$ 或 8.

【解析】

【分析】(1) 先说明 AB 与 CD 不可能垂直，只有 $BC \perp CD$ ，如图：过 B 作 $BH \perp AC$ 、过 A 作 $AE \perp BC$ ，然后运用等面积法可求得 AE ，再说明四边形 $AECD$ 是矩形，最后根据矩形的性质得到 $CD = AE$ 即可解答；

(2) 如图：过点 A 作 $AE \perp BC$ ，过点 D 作 $DF \perp BC$ ，根据勾股定理可得 $BE = \frac{7}{5}$ ，进而得到 $FC = \frac{18}{5} - x$ ，再在 $\text{Rt}\triangle DFC$ 中利用勾股定理即可得到关系式；

(3) 分点 P 在 C 、 D 之间、点 D 与点 P 重合、点 P 在射线 DC 上三种情况，分别画出图形，然后根据图形解答即可。

【小问 1 详解】

解： $\because AB = 5$ ， $BC = 5$ ， $AC = 6$.

$\therefore \triangle ABC$ 不可能是直角三角形，即 AB 与 CD 不可能垂直，

$\therefore$ 梯形 $ABCD$ 是直角梯形，

$\therefore BC \perp CD$ ，

如图：过 B 作 $BH \perp AC$ ，

$\therefore AB = BC = 5$ ，

$$\therefore AH = HC = \frac{1}{2}AC = 3$$

$$\therefore BH = \sqrt{AB^2 + AH^2} = 4,$$

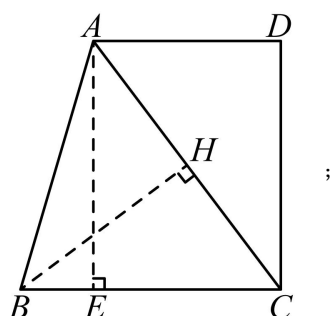
过 A 作 $AE \perp BC$,

$$\text{则 } \frac{1}{2} \times BC \times AE = \frac{1}{2} \times BC \times BH, \text{ 即 } \frac{1}{2} \times 5AE = \frac{1}{2} \times 6 \times 4, \text{ 解得 } AE = \frac{24}{5},$$

$$\therefore AD \parallel BC, AE \perp BC, BC \perp CD,$$

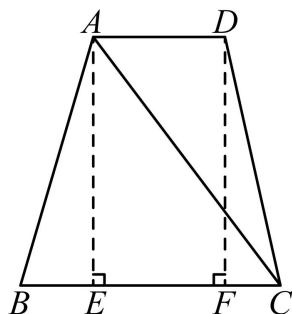
$\therefore$ 四边形 $AECD$ 是矩形,

$$\therefore CD = AE = \frac{24}{5}.$$



【小问 2 详解】

解：如图：过点 A 作 $AE \perp BC$ ，过点 D 作 $DF \perp BC$ ，



$$\text{由 (1) 可知 } AE = DF = \frac{24}{5}, BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \frac{7}{5},$$

$$\therefore EC = BC - BE = \frac{18}{5},$$

$$\therefore AD = x, CD = y,$$

$$\therefore EF = x,$$

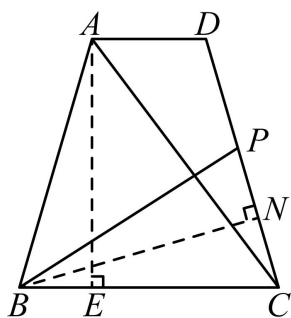
$$\therefore FC = \frac{18}{5} - x > 0, \text{ 即 } x < \frac{18}{5}$$

在 $\text{Rt}\triangle DFC$ 中, $DC^2 = DF^2 + FC^2$,

$$\therefore y^2 = \left(\frac{24}{5}\right)^2 + \left(\frac{18}{5} - x\right)^2, \text{ 整理得: } y^2 = x^2 - \frac{36}{5}x + \frac{178}{5} \left(0 < x < \frac{18}{5}\right).$$

【小问3详解】

解：①当点 P 在 C 、 D 之间时， $\triangle BCP$ 是以 BC 为腰的等腰三角形，则 $BC = BP$ ，如图：



过点 A 作 $AE \perp BC$ ，过点 B 作 $BN \perp DC$ ，

由题意知 $\angle ABC = \angle BCN$ ， $AB = AB$ ，

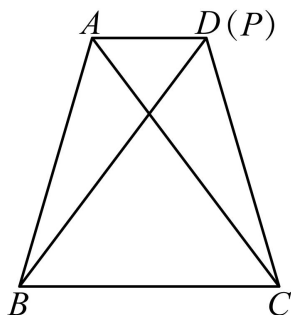
又 $\because \angle AEB = \angle BNC$ ，

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle BCN$ (AAS)，

$\therefore CN = BE = \frac{7}{5}$ ， $BN = AE = \frac{24}{5}$ ，

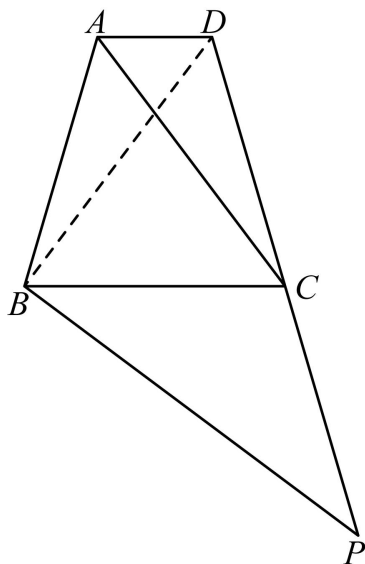
$\therefore$ 底边 $PC = 2CN = \frac{14}{5}$ ；

②如图：当点 D 与点 P 重合时， $BC = PC$ ， $\triangle BCP$ 是以 BC 为腰的等腰三角形，



此时底边 $BD = AC = 6$ ；

③如图：当点 P 在射线 DC 上时， $\triangle BCP$ 是以 BC 为腰的等腰三角形，则 $BC = BP$ ，连接 BD ，



$$\because BC = CD = PC = 5,$$

$$\therefore \angle DBC = \angle BDC, \angle CBP = \angle P,$$

$$\therefore \angle DBC + \angle CBP = 90^\circ, \text{ 即 } \angle DBP = 90^\circ,$$

$$\because BD = 6, DP = 10,$$

$$\therefore BP = \sqrt{DP^2 - BD^2} = 8.$$

综上所述，底边的长为 6 或 $\frac{14}{5}$ 或 8.

【点睛】 本题主要考查了等腰三角形的性质、直角三角形的性质、三角形的面积、勾股定理等知识点，正确作出辅助线、掌握数形结合和分类讨论思想是解题关键.

免费增值服务介绍



- ✓ 学科网 (<https://www.zxxk.com/>) 致力于提供K12教育资源方服务。
- ✓ 网校通合作校还提供学科网高端社群出品的《老师请开讲》私享直播课等增值服务。



扫码关注学科网

每日领取免费资源

回复“ppt”免费领180套PPT模板

回复“天天领券”来抢免费下载券



- ✓ 组卷网 (<https://zujuan.xkw.com>) 是学科网旗下智能题库，拥有小初高全学科超千万精品试题，提供智能组卷、拍照选题、作业、考试测评等服务。



扫码关注组卷网

解锁更多功能