

虹口区 2023 学年度第二学期初二年级期末学生学习诊断练习

数学 练习卷

(满分 100 分, 时间 90 分钟)

注意:

1. 本练习卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 请务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本练习卷上答题一律无效.

2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分) [下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.]

1. 下列四个函数中, 一次函数是 ()

A. $y = x^2 - 2x$

B. $y = 2x - 1$

C. $y = \frac{1}{x} + 3$

D. $y = \sqrt{x} + 1$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查一次函数的定义, 掌握一次函数的定义是解题的关键. 依据一次函数的定义进行解答即可, 一次函数的定义: 一般地, 形如 $y = kx + b$ ($k \neq 0$, k 、 b 是常数) 的函数, 叫做一次函数.

【详解】解: A、 $y = x^2 - 2x$, 自变量 x 的最高次数为 2, 不是一次函数, 故 A 错误;

B、 $y = 2x - 1$, 是一次函数, 故 B 正确;

C、 $y = \frac{1}{x} + 3$, 自变量 x 的最高次数为 -1, 不是一次函数, 故 C 错误;

D、 $y = \sqrt{x} + 1$ 中, 自变量次数不为 1, 不是一次函数, 故 D 错误.

故选: B.

2. 已知一次函数 $y = (3 - m)x + 3$, 如果函数值 y 随 x 增大而减小, 那么 m 的取值范围是 ()

A. $m > 3$

B. $m < 3$

C. $m \geq 3$

D. $m \leq 3$

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了一次函数图象与系数的关系. 根据一次函数 $y = (3 - m)x + 3$ 的增减性列出不等式 $3 - m < 0$, 通过解该不等式即可求得 m 的取值范围.

【详解】解: 由题意得 $3 - m < 0$,

解得 $m > 3$.

故选: A.

3. 下列事件中, 必然事件是 ()

- A. 上海明天太阳从西边升起
- B. 任意选取两个非零实数, 它们的积为正
- C. 抛掷一枚质地均匀的硬币, 落地后正面朝上
- D. 在平面内画一个平行四边形, 它的内角和等于 360° 度

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了随机事件, 不可能事件, 必然事件的概念. 必然事件: 必然事件指在一定条件下一定发生的事件; 不可能事件: 在一定条件下不可能发生的事件叫不可能事件; 随机事件: 随机事件是在随机试验中, 可能出现也可能不出现, 而在大量重复试验中具有某种规律性的事件叫做随机事件(简称事件); 根据必然事件, 不可能事件, 随机事件的概念可区别各类事件.

【详解】 解: A、上海明天太阳从西方升起是不可能事件, 不符合题意;
B、任意选取两个非零实数, 它们的积为正是随机事件, 不符合题意;
C、抛掷一枚质地均匀的硬币, 落地后正面朝上是随机事件, 不符合题意;
D、在平面内画一个平行四边形, 它的内角和等于 360° 度是必然事件, 符合题意;
故选: D.

4. 下列方程中, 有实数解的是 ()

- A. $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}$
- B. $x^2 + 1 = 0$
- C. $\sqrt{x^2 - 1} = 0$
- D. $\frac{1}{x^2 + 1} = 0$

【答案】 C

【解析】

【分析】 此题考查了分式方程、平方的非负性、二次根式的性质等知识, 分别解方程和利用二次根式的性质进行计算后, 即可得到答案.

【详解】 解: A. $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}$
去分母得, $x = 1$,
当 $x = 1$ 时, $x - 1 = 0$,
则 $x = 1$ 是增根, 原分式方程无解,
故选项不符合题意;

B. $x^2 + 1 = 0$,

则 $x^2 = -1 < 0$,

$\therefore$ 原方程没有实数根,

故选项不符合题意;

C. $\sqrt{x^2 - 1} = 0$

则 $x^2 - 1 = 0$,

解得 $x = \pm 1$,

故选项有实数解, 符合题意;

D. $\frac{1}{x^2 + 1} = 0$,

$\because x^2 + 1 > 0$,

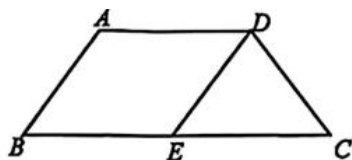
$\therefore \frac{1}{x^2 + 1} > 0$,

即原方程没有实数解,

故选项不符合题意.

故选: C.

5. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 点 E 是边 BC 的中点, 连接 DE , $DE \parallel AB$, 下列向量中, 不是 $\overrightarrow{AD}$ 的相反向量的是 ()



A. $\overrightarrow{DA}$

B. $\overrightarrow{EB}$

C. $\overrightarrow{CE}$

D. $\overrightarrow{BC}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查平面向量, 平行四边形的性质, 平行向量, 相反向量等知识, 解题的关键是平行向量, 相反向量的定义, 属于中考常考题型. 根据相反向量, 平行向量的定义一一判断即可.

【详解】解: A、 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{DA}$ 是相反的向量, 本选项不符合题意;

B、 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{EB}$ 是相反的向量, 本选项不符合题意.

C、 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{CE}$ 互为相反向量, 本选项不符合题意.

D、 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 是平行向量, 方向相同, 不是相反向量, 本选项符合题意.

故选：D.

6. 小明用四根相同长度的木条制作了一个正方形学具（如图 1），测得对角线 $AC = 10\sqrt{2}\text{cm}$ ，将正方形学具变形为菱形（如图 2）， $\angle DAB = 60^\circ$ ，则图 2 中对角线 AC 的长为（ ）

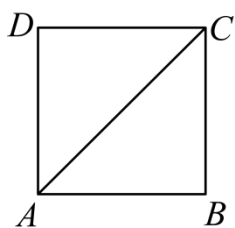


图1

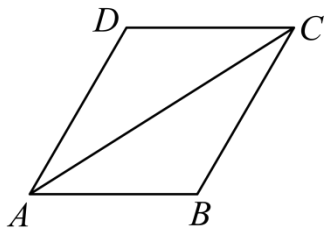


图2

A. 20cm

B. $10\sqrt{6}\text{cm}$

C. $10\sqrt{3}\text{cm}$

D. $10\sqrt{2}\text{cm}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查正方形的性质，菱形的性质，勾股定理. 熟练掌握特殊平行四边形的性质是解题关键. 由正方形的性质可求出 $AB = AD = 10\text{cm}$ ，当四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $\angle DAB = 60^\circ$ 时，连接 BD 交 AC 于 O ，可得 $\triangle ABD$ 是等边三角形，则 $BD = 10\text{cm}$ ，进而得到 $BO = \frac{1}{2}BD = 5\text{cm}$ ，由勾股定理可求出 AO ，进而可求出 AC .

【详解】解：如图 1， $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形， $AC = 10\sqrt{2}\text{cm}$ ，

$$\therefore AB = AD = \frac{\sqrt{2}}{2}AC = 10\text{cm},$$

在图 2 中，连接 BD 交 AC 于 O ，

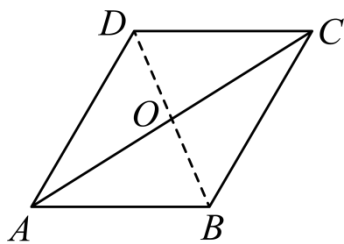


图2

$\because \angle DAB = 60^\circ$ ， $AB = AD = 10\text{cm}$ ，

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形，则 $BD = 10\text{cm}$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore BO = \frac{1}{2}BD = 5\text{cm}, \quad AO = CO, \quad AC \perp BD,$$

$$\therefore AO = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}(\text{cm}),$$

$$\therefore AC = 2AO = 10\sqrt{3}(\text{cm}),$$

故选：C.

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分) [请将结果直接填入答题纸的相应位置]

7. 直线 $y = -2x + 6$ 的截距是_____.

【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征. 代入 $x = 0$ ，求出 y 的值，即可得到答案.

【详解】 解：令 $x = 0$ ，则 $y = -2 \times 0 + 6 = 6$ ，

故直线 $y = -2x + 6$ 的截距是 6，

故答案为：6.

8. 方程 $\sqrt{x-2}=3$ 的解是_____.

【答案】 $x=11$

【解析】

【分析】 把方程两边平方，再解整式方程，然后进行检验确定原方程的解.

【详解】 解：两边平方得 $x-2=9$ ，解得 $x=11$ ，

经检验 $x=11$ 为原方程的解.

故答案为 $x=11$.

【点睛】 本题考查了无理方程：解无理方程的基本思想是把无理方程转化为有理方程来解，在变形时要注意根据方程的结构特征选择解题方法. 常用的方法有：乘方法，配方法，因式分解法，设辅助元素法，利用比例性质法等. 用乘方法（即将方程两边各自乘同次方来消去方程中的根号）来解无理方程，往往会产生增根，应注意验根.

9. 如果一次函数 $y = (3m-2)x + 1$ 的图象经过 $A(1,8)$ ，那么 m 的值是_____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 本题主要考查了求一次函数解析式，熟知待定系数法求一次函数解析式是解题的关键. 直接把 $A(1,8)$ 代入到一次函数解析式中求出 m 的值即可.

【详解】 解：根据题意得： $8 = (3m-2) + 1$

解得： $m = 3$ ，

故答案为：3.

10. 已知一次函数 $y = 2x + m - 1$ 的图象与 y 轴的交点在负半轴上，那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m < 1$

【解析】

【分析】 本题考查的是一次函数图象上点的坐标特点，熟知 y 轴上点的坐标特点是解答此题的关键. 根据一次函数 $y = 2x + m - 1$ 的图象与 y 轴的交点在负半轴上，可得出 $m - 1 < 0$ ，求出 m 的取值范围即可.

【详解】 解：根据题意得： $m - 1 < 0$ ，

解得： $m < 1$ ，

故答案为： $m < 1$.

11. 用换元法解方程 $\frac{3x}{x^2 - 1} - \frac{x^2 - 1}{x} = 2$ ，如果设 $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ ，那么原方程可以化为关于 y 的整式方程为_____.

【答案】 $3y^2 - 2y - 1 = 0$

【解析】

【分析】 利用换元法，进行转化，再将分式方程转化为整式方程即可.

【详解】 解：设 $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ ，

则原方程化为： $3y - \frac{1}{y} = 2$ ，

去分母，得： $3y^2 - 1 = 2y$ ，即： $3y^2 - 2y - 1 = 0$ ；

故答案为： $3y^2 - 2y - 1 = 0$.

【点睛】 本题考查换元法解分式方程. 熟练掌握换元法，以及将分式方程转化为整式方程的方法，是解题的关键.

12. 如果一个正多边形每一个内角都等于 144° ，那么这个正多边形的内角和是_____.

【答案】 1440°

【解析】

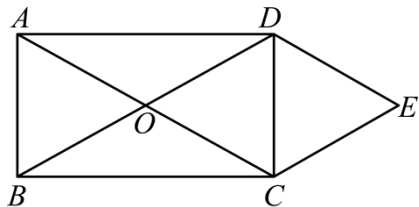
【分析】 本题主要考查了多边形的外角和定理和内角和公式，正多边形的每一个内角都等于 144° ，则每个外角是 $180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$ ，外角和是 360° ，则可以求得这个多边形的边数，再根据边数即可求得内角和.

【详解】 解：这个多边形的边数是 $360^\circ \div (180^\circ - 144^\circ) = 360^\circ \div 36^\circ = 10$ ，

则内角和是 $(10-2) \times 180^\circ = 1440^\circ$,

故答案为: 1440° .

13. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, 对角线 AC 与 BD 交于点 O , 且 $\angle AOD = 120^\circ$, $DE \parallel OC$, $CE \parallel OD$, 则四边形 $OCED$ 的周长为_____.



【答案】 8

【解析】

【分析】 本题主要考查了矩形的性质、等边三角形的判定与性质、菱形的判定与性质, 根据 $\angle AOD = 120^\circ$ 、矩形的性质、等边三角形的判定, 推理证明 $\triangle AOB$ 是等边三角形, 得出 $OC = OD = 2$, 结合 $DE \parallel OC$, $CE \parallel OD$, 菱形的判定定理证明四边形 $OCED$ 是菱形, 计算周长即可, 熟练掌握矩形的性质、等边三角形的判定与性质、菱形的判定与性质, 推理证明是解题的关键.

【详解】 解: $\because$ 在矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 交于点 O , $DE \parallel OC$, $CE \parallel OD$,
 $\therefore OA = OB = OC = OD$, $\angle AOB = 180^\circ - \angle AOD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$,
四边形 $OCED$ 是平行四边形,

$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形,

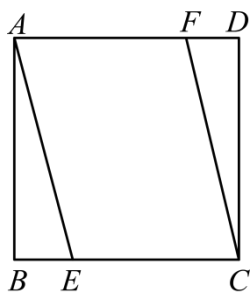
$\therefore AB = OA = OB = OC = OD = 2$,

$\therefore$ 四边形 $OCED$ 是菱形,

$\therefore$ 四边形 $OCED$ 的周长 $= 2 \times 4 = 8$,

故答案为: 8.

14. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E, F 分别在 BC 和 AD 边上, $BE = 2$, $AF = 6$, $AE \parallel CF$, 则 $\triangle ABE$ 的面积为_____.



【答案】 8

【解析】

【分析】 本题主要考查了正方形的性质，平行四边形的性质与判定，先根据正方形的性质得到 $AD \parallel BC$ ， $AB = CE$ ， $AB \perp BC$ ，进而证明四边形 $AECF$ 是平行四边形，得到 $AF = CE = 6$ ，则 $AB = BC = BE + CE = 8$ ，最后根据三角形面积计算公式求解即可.

【详解】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AD \parallel BC$ ， $AB = CB$ ， $AB \perp BC$ ，

$\therefore AE \parallel CF$ ，

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形，

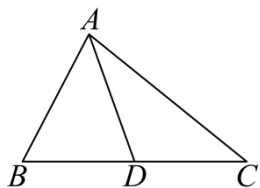
$\therefore AF = CE = 6$ ，

$\therefore AB = BC = BE + CE = 8$ ，

$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot BE = \frac{1}{2} \times 2 \times 8 = 8$ ，

故答案为：8.

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 是边 BC 的中点， $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ ，用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AD}$ 为_____.

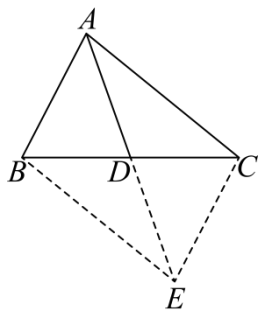


【答案】 $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

【解析】

【分析】 本题考查平面向量，平行四边形的判定和性质，三角形法则等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造平行四边形解决问题，属于中考常考题型. 如图，延长 AD 到 E ，使得 $DE = AD$ ，连接 BE ， CE . 证明四边形 $ABEC$ 是平行四边形，利用三角形法则求出 $\overrightarrow{AE}$ 即可解决问题.

【详解】 解：如图，延长 AD 到 E ，使得 $DE = AD$ ，连接 BE ， CE .



$\therefore AD = DE$ ， $BD = CD$ ，

∴ 四边形 $ABEC$ 是平行四边形,

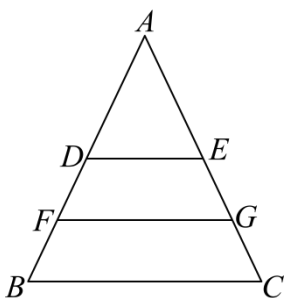
$$\therefore \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \vec{a} + \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}.$$

故答案为 $\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}$.

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 、 E 分别是边 AB 、 AC 的中点, F 、 G 分别是 DB 、 EC 的中点, 如果 $DE = 3$, 那么 $FG =$ _____.



【答案】 $\frac{9}{2}$ 或 $4\frac{1}{2}$ 或 4.5

【解析】

【分析】 本题考查了三角形的中位线及梯形的中位线, 熟练掌握两个定理是解题的关键. 根据三角形的中位线平行于第三边并且等于第三边的一半求出 $BC = 2DE = 6$, 再根据梯形的中位线平行于两底边并且等于两底和的一半求解即可.

【详解】 解: ∵ 在 $\triangle ABC$ 中, D 、 E 分别是边 AB 、 AC 的中点,

∴ DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

∵ $DE = 3$,

∴ $BC = 2DE = 6$,

∵ 在梯形 $BCED$ 中, F 、 G 分别是 DB 、 EC 的中点,

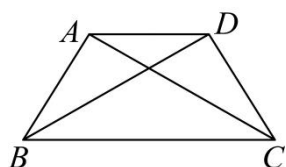
∴ FG 是梯形 $BCED$ 的中位线,

$$\therefore FG = \frac{(DE + BC)}{2} = \frac{9}{2},$$

故答案为: $\frac{9}{2}$.

17. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = CD$, $\angle DBC = 30^\circ$. 如果梯形的中位线长为 6, 那么 BD

的长为_____.

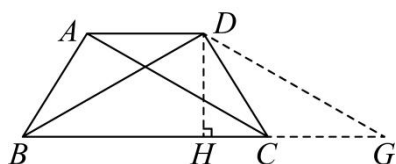


【答案】 $4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】以 AD, AC 为边在 CD 右侧作平行四边形 $ACGD$ ，过点 D 作 $DH \perp BC$ ，垂足为 H ，由梯形中位线的性质，得到 $BG = 12$ ，根据含 30° 度角的直角三角形的特征及等腰三角形的性质，得到 $DH = \frac{1}{2}BD$ ， $BH = 6$ ，利用勾股定理即可求解.

【详解】解：以 AD, AC 为边在 CD 右侧作平行四边形 $ACGD$ ，过点 D 作 $DH \perp BC$ ，垂足为 H ，



$\because AD \parallel BC$,

$\therefore B, C, G$ 三点共线,

$\because$ 梯形的中位线长为 6,

$$\therefore \frac{AD + BC}{2} = 6,$$

$\because AD = CG$,

$$\therefore BC + CG = 12,$$

$\because \angle DBC = 30^\circ, \angle DHB = 90^\circ$,

$$\therefore DH = \frac{1}{2}BD,$$

$\because$ 在梯形 $ABCD$ 中, $AB = CD$,

$\therefore$ 梯形 $ABCD$ 是等腰梯形,

$$\therefore \angle ACB = \angle DBC = 30^\circ, AC = BD,$$

$$\therefore BD = DG,$$

$\because DH \perp BC$,

$$\therefore BH = 6,$$

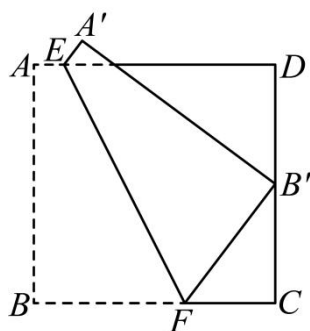
$$\therefore BD^2 = BH^2 + DH^2, \text{ 即 } \frac{3}{4}BD^2 = 36,$$

$$\therefore BD = 4\sqrt{3} \text{ (负值舍去),}$$

故答案为: $4\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了等腰梯形的性质，梯形中位线的性质，等腰三角形的性质，含 30 度角的直角三角形的特征，勾股定理，熟练掌握梯形的性质是解题的关键.

18. 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 4，点 E 、 F 分别在边 AD 、 BC 上，将正方形沿着 EF 翻折，点 B 恰好落在 CD 边上的点 B' 处，若四边形 $ABFE$ 的面积为 6，则线段 DE 的长为_____.

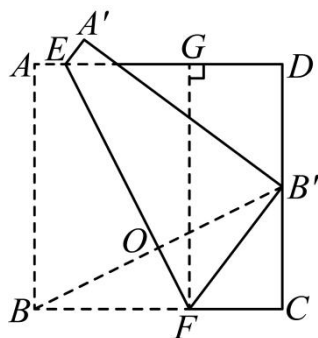


【答案】 $\frac{7}{2}$

【解析】

【分析】本题考查了正方形的性质，图形翻折的特征，矩形的判定和性质，三角形全等判定和性质，勾股定理，作出合理的辅助线是解决问题的关键. 连接 BB' 交 EF 于 O ，过点 F 作 $FG \perp AD$ 于 G . 根据四边形 $ABFE$ 的面积为 6，得到 $AE + BF = 3$ ，设 $AE = x$ ，利用翻折特征，得到 $BB' \perp EF$ ，证明 $\triangle EGF \cong \triangle B'CB$ ，依次得到 $B'C = EG = 3 - 2x$ ， $B'F = 3 - x$ ，在 $\text{Rt}\triangle FB'C$ 利用勾股定理即可解决问题.

【详解】解：连接 BB' 交 EF 于 O ，过点 F 作 $FG \perp AD$ 于 G ，如图所示，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 是梯形，

$\therefore$ 四边形 $ABFE$ 的面积为 $S_{\text{四边形}ABFE} = \frac{1}{2}(AE + BF) \cdot AB = 6$ ，又 $AB = 4$ ，

$$\therefore AE + BF = 3,$$

$$\text{设 } AE = x, \text{ 则 } BF = 3 - x, \quad FC = BC - BF = 4 - (3 - x) = 1 + x,$$

$$\because AD \parallel BC, \quad FG \perp AD, \quad \angle C = \angle D = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $GDCF$ 为矩形,

$$\therefore GD = FC = 1 + x,$$

$$\therefore EG = AD - AE - GD = 4 - x - (1 + x) = 3 - 2x,$$

$\because$ 四边形 $GDCF$ 为矩形,

$$\therefore \angle EFB + \angle EFG = 90^\circ,$$

$\because$ 点 B' 是点 B 沿着 EF 的翻折点,

$$\therefore BB' \perp EF,$$

$$\therefore \angle B'BC + \angle EFB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EFG = \angle B'BC, \text{ 又 } FG = CD = BC, \quad \angle EGF = \angle B'CB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle EGF \cong \triangle B'CB,$$

$$\therefore B'C = EG = 3 - 2x,$$

在 $\text{Rt}\triangle FB'C$ 中, 根据翻折特征, $B'F = BF = 3 - x$, 利用勾股定理得,

$$B'F^2 = B'C^2 + FC^2, \text{ 即 } (3 - x)^2 = (3 - 2x)^2 + (1 + x)^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{1}{2},$$

$$\therefore DE = AD - AE = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2},$$

$$\text{故答案为: } \frac{7}{2}.$$

三、解答题: (本大题共 7 题, 满分 64 分)

$$19. \text{解方程: } \frac{2}{x-3} + 1 = \frac{5}{x^2-9}.$$

【答案】 方程的解是 $x_1 = -4$, $x_2 = 2$.

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程, 先去分母将分式方程化为整式方程, 解整式方程并检验, 即可得出答案.

【详解】 解: 去分母得 $2(x+3) + x^2 - 9 = 5$,

$$\text{整理得 } x^2 + 2x - 8 = 0, \text{ 即 } (x+4)(x-2) = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = -4, \quad x_2 = 2,$$

经检验 $x_1 = -4$, $x_2 = 2$ 都是原方程的解.

故方程的解是 $x_1 = -4$, $x_2 = 2$.

20. 解方程组:
$$\begin{cases} x+2y=8 \textcircled{1} \\ x^2-3xy+2y^2=0 \textcircled{2} \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x_1=4 \\ y_1=2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2=\frac{8}{3} \\ y_2=\frac{8}{3} \end{cases}$$

【解析】

【分析】 本题考查了二元二次方程组解法, 由①可得, $x=8-2y$ ③, 将③代入②得 $3y^2-14y+16=0$, 求出 $y_1=2$, $y_2=\frac{8}{3}$, 然后代入 $x=8-2y$ ③ 求解即可.

【详解】
$$\begin{cases} x+2y=8 \textcircled{1} \\ x^2-3xy+2y^2=0 \textcircled{2} \end{cases}$$

由①可得, $x=8-2y$ ③

将③代入②得, $(8-2y)^2-3\times(8-2y)y+2y^2=0$

整理得, $3y^2-14y+16=0$

$$(y-2)(3y-8)=0$$

$$y-2=0 \text{ 或 } 3y-8=0$$

$$\text{解得 } y_1=2, \quad y_2=\frac{8}{3}$$

将 $y_1=2$ 代入③得, $x_1=8-2y=4$;

将 $y_2=\frac{8}{3}$ 代入③得, $x_2=8-2y=\frac{8}{3}$.

$$\therefore \text{方程组的解为 } \begin{cases} x_1=4 \\ y_1=2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2=\frac{8}{3} \\ y_2=\frac{8}{3} \end{cases}.$$

21. 一只箱子里放有 2 个白球与 1 个红球, 它们除颜色外均相同.

(1) 如果从箱子中任意摸出一个球, 摸出的球是白球的概率是_____;

(2) 如果从箱子中任意摸出一个球, 不将它放回箱子, 再摸出一个球, 利用树形图求两次摸出的球都是白

球的概率；

- (3) 如果可以往箱子里放除颜色外均相同的球，请你设计一个“摸出白球的概率为 $\frac{3}{5}$ ”的游戏方案.

【答案】(1) $\frac{2}{3}$

(2) $\frac{1}{3}$

- (3) 往箱子里放红球 1 个，白球 1 个，摸出白球的概率为 $\frac{3}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了用概率公式求解概率、采用树状图法或列表法列举求解概率以及根据概率求数量的知识，掌握用树状图法或列表法列举求解概率是解答本题的关键.

(1) 用白球个数除以球的总个数即可；

(2) 画树状图展示所有 6 种等可能的结果数，再找出两次摸出的球都是白球的结果数，然后根据概率公式求解；

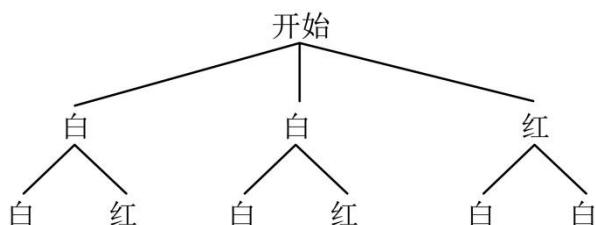
- (3) 设往箱子里放红球 x 个，白球 1 个，根据“摸出白球的概率为 $\frac{3}{5}$ ”建立方程求解检验即可.

【小问 1 详解】

解：摸出的球是白球的概率是 $2 \div (2+1) = \frac{2}{3}$ ；

【小问 2 详解】

解：画树状图为：



共有 6 种等可能的结果数，其中两次摸出的球都是白球的结果数为 2，

即两次都是摸出白球的概率为： $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ；

【小问 3 详解】

解：设往箱子里放红球 x 个，白球 1 个，根据题意得：

$$\frac{2+1}{3+1+x} = \frac{3}{5}, \text{ 即 } 15 = 12 + 3x$$

解得： $x = 1$ ，

经检验 $x = 1$ ，是原方程的解，

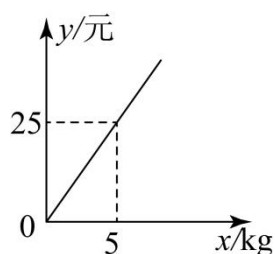
∴往箱子里放红球 1 个，白球 1 个，摸出白球的概率为 $\frac{3}{5}$

22. 某食品公司产销一种食品，已知每月的生产成本 y_1 与产量 x 之间是一次函数关系，函数 y_1 与自变量 x (kg) 的部分对应值如下表：

x (单位: kg)	10	20	30
y_1 (单位: /元)	3030	3060	3090

(1) 求 y_1 与 x 之间的函数关系式；

(2) 经过试销发现，这种食品每月的销售收入 y_2 (元) 与销量 x (kg) 之间满足如图所示的函数关系



① y_2 与 x 之间的函数关系式为_____；

②假设该公司每月生产的该种食品均能全部售出，那么该公司每月至少要生产该种食品多少 kg，才不会亏损？

【答案】 (1) $y_1 = 3x + 3000$

(2) ① $y_2 = 5x$ ，②每月至少要生产该种食品 1500kg，才不会亏损

【解析】

【分析】 (1) 由图，已知两点，可根据待定系数法列方程，求函数关系式.

(2) 利用利润问题中的等量关系解决这个问题.

【小问 1 详解】

解：设 $y_1 = kx + b$ ，由已知得：

$$\begin{cases} 10k + b = 3030 \\ 20k + b = 3060 \end{cases},$$

解得： $\begin{cases} k=3 \\ b=3000 \end{cases}$.

给所求的函数关系式为 $y_1 = 3x + 3000$.

【小问 2 详解】

解：①设 $y_2 = mx$,

根据函数关系图得出： $25 = 5m$,

得出： $m = 5$,

所以： $y_2 = 5x$,

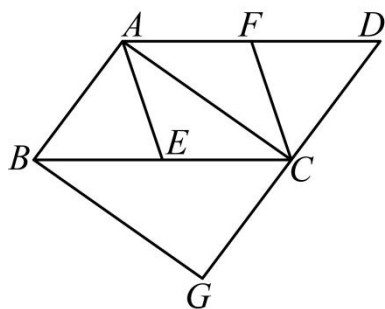
②由 $y_1 = y_2$, 得： $5x = 3x + 3000$,

解得 $x = 1500$.

答：每月至少要生产该种食品 1500kg , 才不会亏损.

【点睛】 本题考查一次函数的应用，正确得出解析式是解题的关键.

23. 如图，在 $ABCD$ 中， E 、 F 分别是边 BC 、 AD 的中点，连接 AE 、 CF ， AC 平分 $\angle DAE$.



(1) 求证：四边形 $AECF$ 是菱形；

(2) 过点 B 作 BG 与 DC 的延长线交于点 G ，且 $\angle GBC = \angle CAE$. 求证：四边形 $ABGC$ 是矩形.

【答案】 (1) 证明见详解

(2) 证明见详解

【解析】

【分析】 (1) 利用中点和平行四边形的性质证明 $AF = EC$, $AF \parallel EC$, 所以四边形 $AECF$ 是平行四边形, 由 AC 平分 $\angle DAE$ 、 $AF \parallel EC$, 可证 $\angle EAC = \angle ACE$, 故 $AE = CE$, 则结果证;

(2) 由 (1) 知 $AE = CE$, $\angle EAC = \angle ACE$, 结合 $\angle GBC = \angle CAE$, 可得 $AC \parallel BG$, 在 $ABCD$ 中 $AB \parallel CG$, 则四边形 $ABGC$ 是平行四边形, 连接 EG , 证明 $AG = BC$, 则结果得证.

【小问 1 详解】

解: $\because E、F$ 分别是 $BC、AD$ 的中点,

$$\therefore AF = \frac{1}{2}AD, EC = \frac{1}{2}BD,$$

又 $\because$ 在 $ABCD$ 中, $AD = BC$, 且 $AD \parallel BC$,

$$\therefore AF = EC, AF \parallel EC,$$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形,

$\because AC$ 平分 $\angle DAE$,

$$\therefore \angle EAC = \angle FAC,$$

$\because AF \parallel EC$,

$$\therefore \angle FAC = \angle ACE,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle ACE,$$

$$\therefore AE = CE,$$

四边形 $AECF$ 是菱形.

【小问 2 详解】

由 (1) 知 $AE = CE, \angle EAC = \angle ACE$,

又 $\because \angle GBC = \angle CAE$,

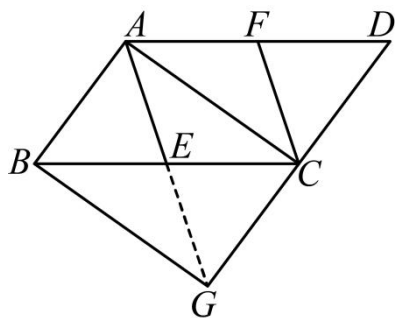
$$\therefore \angle GBC = \angle ACE,$$

$$\therefore AC \parallel BG,$$

又 $\because$ 在 $ABCD$ 中 $AB \parallel CD$ 即 $AB \parallel CG$,

$\therefore$ 四边形 $ABGC$ 是平行四边形,

连接 EG , 如图



$\because E$ 是 BC 中点,

$\therefore E$ 即为对角线 $AG、BC$ 的交点,

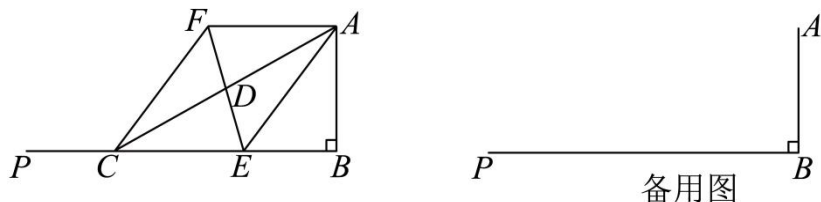
$$\therefore AE = CE \text{ 即 } \frac{1}{2}AG = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore AG = BC,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形.

【点睛】 本题考查菱形的判定、平行四边形的判定和性质、等腰三角形的性质、矩形的判定，熟悉相关性质、性质定理是解题关键.

24. 如图，已知 $\angle ABP = 90^\circ$ ， $AB = 8$ ，点 C 、 E 在射线 BP 上（点 C 、 E 不与点 B 重合且点 C 在点 E 的左侧），连接 AC 、 AE ， D 为 AC 的中点，过点 C 作 $CF \parallel AE$ ，交 ED 的延长线于点 F ，连接 AF .



(1) 求证：四边形 $ABCF$ 是梯形；

(2) 如果 $CE = 5$ ，当 $\triangle CDE$ 为等腰三角形时，求 BC 的长.

【答案】 (1) 见解析 (2) 6 或 17

【解析】

【分析】 (1) 证明 $\triangle AED \cong \triangle CFD$ (ASA)，进而证明四边形 $AFCE$ 是平行四边形，得到 $AF \parallel CE$ ，进而得到 $AF \parallel BC$ ，根据 $CF \parallel AE$ ， AB 与 AE 相交，得到 AB 与 CF 不平行，即可证明四边形 $ABCF$ 是梯形；

(2) 分 $CE = CD = 5$ ， $CE = DE = 5$ ， $CE = CD = DE = 5$ ，三种情况讨论即可.

【小问 1 详解】

证明： $\because CF \parallel AE$ ，

$$\therefore \angle DAE = \angle DCF,$$

$\because D$ 为 AC 的中点，

$$\therefore AD = CD,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle CDF,$$

$$\therefore \triangle AED \cong \triangle CFD \text{ (ASA)},$$

$$\therefore AE = CF,$$

$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 是平行四边形，

$$\therefore AF \parallel CE, \text{ 即 } AF \parallel BC,$$

$\because CF \parallel AE$ ， AB 与 AE 相交，

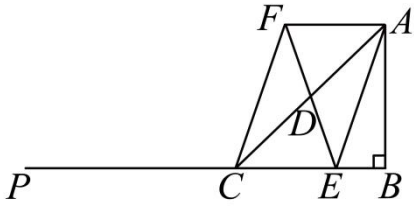
$$\therefore AB \text{ 与 } CF \text{ 不平行},$$

$\therefore$ 四边形 $ABCF$ 是梯形；

【小问 2 详解】

解：∵ $\triangle CDE$ 为等腰三角形，

如图，当 $CE = CD = 5$ 时，



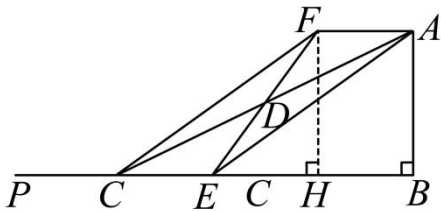
∵ D 为 AC 的中点，

∴ $AC = 10$ ，

∵ $\angle ABP = 90^\circ$ ， $AB = 8$ ，

$$\therefore BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 6；$$

如图，当 $CE = DE = 5$ 时，过点 F 作 $FH \perp BP$ ，垂足为 H ，



由 (1) 知四边形 $AFCE$ 是平行四边形，

∴ $DF = DE = 5$ ，即 $EF = 10$ ，

∵ $\angle ABP = 90^\circ$ ， $FH \perp BP$ ，

∴ $FH \parallel AB$ ，

∵ $AF \parallel BP$ ，

∴ 四边形 $AFHB$ 是平行四边形，

∵ $\angle ABP = 90^\circ$ ，

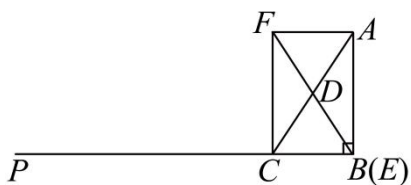
∴ 四边形 $AFHB$ 是矩形，

$$\therefore AF = BH = CE = 5, AB = FH = 8,$$

$$\therefore EH = \sqrt{EF^2 - FH^2} = 6,$$

$$\therefore BC = CE + EH + BH = 17；$$

如图，当 $CE = CD = DE = 5$ 时，



$\because \triangle CED$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle ACB = 60^\circ,$$

$$\because \angle ABP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAB = 30^\circ,$$

$$\therefore BC = \frac{1}{2} AC = AD = CD = 5,$$

$$\therefore CE = 5,$$

$\therefore$ 此时, 点 E 与点 B 重合, 不符合题意,

综上, 当 $\triangle CDE$ 为等腰三角形时, BC 的长为 6 或 17.

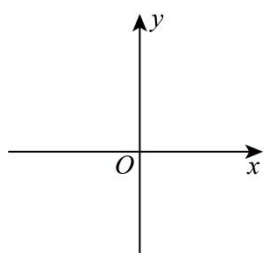
【点睛】 本题考查梯形的判定, 平行四边形的判定与性质, 三角形全等的判定与性质, 等腰三角形的性质, 勾股定理, 直角三角形的特征, 灵活运用平行四边形的性质是解题的关键.

25. 已知直线 $y = kx + b$ (其中 $kb \neq 0$), 我们把直线 $y = bx + k$ 称为直线 $y = kx + b$ 的“轮换直线”. 例如:

直线 $y = 3x + 2$ 的“轮换直线”是直线 $y = 2x + 3$.

在平面直角坐标系 xOy 中, 已知直线 $l_1: y = x + m (m \neq 1)$ 的“轮换直线”是直线 l_2 , l_1 交 y 轴于点 A , l_2

交 y 轴于点 B , l_1 和 l_2 相交于点 M .



备用图

(1) 如果直线 l_1 经过点 $(-1, -3)$.

①求直线 l_1 、 l_2 的表达式和点 M 的坐标;

②点 N 是平面内一点, 如果四边形 $AMBN$ 是等腰梯形, 且 $AM \parallel BN$, 求点 N 的坐标.

(2) 将 AM 绕点 A 顺时针旋转 90° , 点 M 的对应点 M_1 落在与直线 l_2 平行的直线 l_3 上. 小明说: “直线 l_3 一定经过一个定点.” 你认为他的说法是否正确? 如果正确, 请求这个定点; 如果不正确, 请说明理由.

【答案】 (1) ① $M(1, -1)$; ② $N(-2, -1)$

(2) 正确, 直线 l_3 过定点 $(0, -1)$

【解析】

【分析】(1) ①将点 $(-1, -3)$ 代入 $y = x + m (m \neq 1)$, 求出 m 的值, 进而得到直线 l_2 的表达式, 联立直线 l_1 、 l_2 的表达式, 即可求出 M 的坐标; ②根据四边形 $AMBN$ 是等腰梯形, 且 $AM \parallel BN$, 得到 N 点在平行于直线 l_1 过点 B 的直线上, 且 $BM = AN$, 求出直线 BN 的解析式, 设 $N(t, t+1)$, 根据 $BM = AN$, 利用两点间距离公式建立方程求解即可;

(2) 根据题意得到直线 l_2 的表达式为: $y = mx + 1$, 求出 $A(0, m), B(0, 1)$, 联立直线 l_1 、 l_2 的表达式, 求出 $M(1, 1+m)$, 如图, 过点 M, M_1 作 y 轴的垂线, 垂足分别为 G, H , 证明 $\triangle GAM \cong \triangle HM_1A$ (AAS), 得到 $M_1(1, m-1)$, 根据点 M_1 落在与直线 l_2 平行的直线 l_3 上, 求出直线 l_3 的解析式为: $y = mx - 1$, 当 $x = 0$ 时, $y = -1$, 即可得出直线 l_3 过定点 $(0, -1)$.

【小问 1 详解】

解: ①将点 $(-1, -3)$ 代入 $y = x + m (m \neq 1)$, 则 $-3 = -1 + m$,

$$\therefore m = -2,$$

$$\therefore \text{直线 } l_1 \text{ 的表达式为: } y = x - 2,$$

$$\therefore \text{直线 } l_2 \text{ 的表达式为: } y = -2x + 1,$$

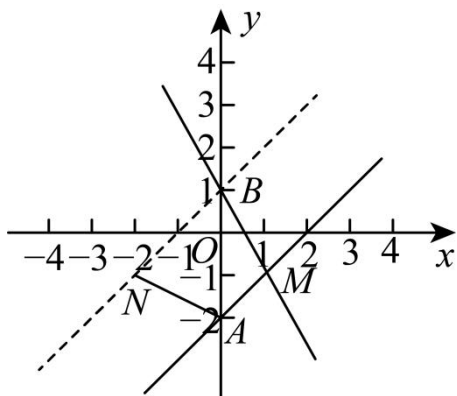
$$\text{令 } x = 0, \text{ 则 } y_A = 0 - 2 = -2, y_B = -2 \cdot 0 + 1 = 1,$$

$$\therefore A(0, -2), B(0, 1),$$

$$\text{联立直线 } l_1、l_2 \text{ 的表达式, 则 } \begin{cases} y = x - 2 \\ y = -2x + 1 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}, \text{ 即 } M(1, -1),$$

②如图,



$\therefore$ 四边形 $AMBN$ 是等腰梯形, 且 $AM \parallel BN$,

$\therefore N$ 点在平行于直线 l_1 过点 B 的直线上, 且 $BM = AN$,

设直线 BN 的解析式为 $y = x - n$,

将点 $B(0, 1)$ 代入得: $1 = 0 - n$,

解得: $n = -1$,

$\therefore$ 直线 BN 的解析式为 $y = x + 1$,

设点 $N(t, t + 1)$,

由图形可得 $t < 0$,

$$\therefore \sqrt{(0 - t)^2 + [-2 - (t + 1)]^2} = \sqrt{(1 - 0)^2 + (-1 - 1)^2},$$

$$\therefore 2t^2 + 6t + 9 = 5,$$

解得: $t = -1$ 或 $t = -2$,

$$\text{当 } t = -1 \text{ 时, } N(-1, 0), \text{ 此时 } BN = \sqrt{(0 + 1)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{2}, \quad AM = \sqrt{(1 - 0)^2 + [(-1) + 2]^2} = \sqrt{2},$$

$\therefore AM \parallel BN$,

$\therefore$ 四边形 $AMBN$ 是平行四边形,

$\therefore AN \parallel BM$,

则四边形 $AMBN$ 不是梯形, 故舍去,

$$\text{当 } t = -2, \quad N(-2, -1),$$

$$\text{同理: } BN = \sqrt{(0 + 2)^2 + (1 + 1)^2} = 2\sqrt{2}, \quad AM = \sqrt{(1 - 0)^2 + [(-1) + 2]^2} = \sqrt{2},$$

$\therefore AM \parallel BN$, AN 与 BM 不平行,

$\therefore$ 四边形 $AMBN$ 是等腰梯形,

故 $t = -2$, 则 $N(-2, -1)$;

【小问2详解】

解：根据题意：直线 l_2 的表达式为： $y = mx + 1$,

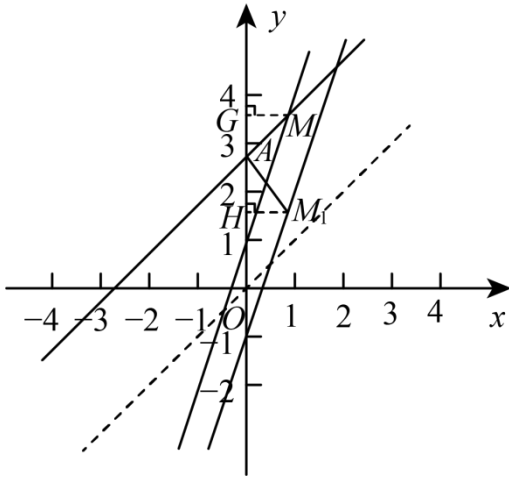
令 $x = 0$ ，则 $y_A = 0 + m = m, y_B = m' \cdot 0 + 1 = 1$,

$\therefore A(0, m), B(0, 1)$,

联立直线 l_1 、 l_2 的表达式，则 $\begin{cases} y = x + m \\ y = mx + 1 \end{cases}$,

解得： $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + m \end{cases}$ ，即 $M(1, 1 + m)$,

如图，过点 M, M_1 作 y 轴的垂线，垂足分别为 G, H ，



则 $\angle MGA = \angle M_1HA = 90^\circ$ ， $G(0, 1 + m)$ ，

$\backslash GM = 1, AG = OG - OA = 1$ ，

由旋转的旋转得： $AM = AM_1$ ， $\angle MAM_1 = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle GAM + \angle HAM_1 = \angle GAM + \angle GMA$ ，

$\therefore \angle HAM_1 = \angle GMA$ ，

$\therefore \triangle GAM \cong \triangle HM_1A$ (AAS)，

$\backslash GM = AH = 1, AG = HM_1 = 1$ ，

$\therefore M_1(1, m - 1)$ ，

$\therefore$ 点 M_1 落在与直线 l_2 平行的直线 l_3 上，

设直线 l_3 的解析式为: $y = mx + n$, 则 $m - 1 = m + n$,

解得: $n = -1$,

$\therefore$ 直线 l_3 的解析式为: $y = mx - 1$,

当 $x = 0$ 时, $y = -1$,

$\therefore$ 直线 l_3 过定点 $(0, -1)$.

【点睛】 本题考查的是一次函数综合题, 旋转的性质, 需要掌握待定系数法确定函数关系式, 函数图象上点的坐标特征, 全等三角形的判定与性质, 两条直线平行及交点等相关知识, 属新定义型题目.