

2023 学年第二学期期末考试八年级数学试卷

考生注意：

1. 本试卷共 25 题；试卷满分 150 分，考试时间 100 分钟.
2. 答题时，考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答，在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
3. 除第一、二大题外，其余各题如无特殊说明，都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题（本大题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分）

1. 下列方程为无理方程的是（ ）

A. $\sqrt{3}x - 2 = 0$

B. $\sqrt{x} - 3 = 0$

C. $x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$

D. $\frac{1}{x+1} - \sqrt{2} = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了无理方程的定义，能熟记无理方程的定义是解此题的关键，注意：根号内含有未知数的方程叫无理方程.

根据无理方程的定义逐个判断即可.

【详解】解：A. 根号内不含有未知数，方程属于有理方程，不属于无理方程，故本选项不符合题意；
B. 根号内含有未知数，方程属于无理方程，故本选项符合题意；
C. 根号内不含有未知数，方程属于有理方程，不属于无理方程，故本选项不符合题意；
D. 根号内不含有未知数，方程属于有理方程，不属于无理方程，故本选项不符合题意；
故选：B.

2. 已知 $f(x) = 2x - 1$ ，那么 $f(-1)$ 的值是（ ）

A. 1

B. 3

C. -3

D. -1

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查的是求函数值，将 $x = -1$ 代入解析式是解题的关键.

将 $x = -1$ 代入，然后依据有理数的运算法则进行计算即可.

【详解】解： $f(-1) = 2 \times (-1) - 1 = -2 - 1 = -3$.

故选：C.

3. 已知菱形的边长是 8，一个内角是 60° ，那么这个菱形的面积是（ ）

- A. 64 B. 32 C. $64\sqrt{3}$ D. $32\sqrt{3}$

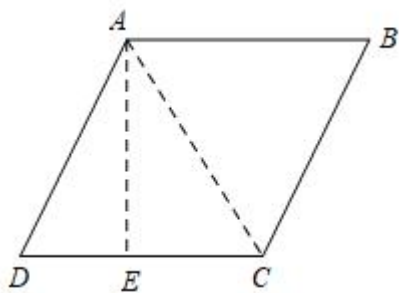
【答案】D

【解析】

【分析】考查了菱形的性质和等边三角形的判定和性质以及勾股定理等知识，熟练掌握菱形的性质是解题关键.

根据菱形的性质可得 $\triangle ADC$ 是等边三角形，求得 $DE = 4$ ，再利用勾股定理即可求出菱形的高，进而即可求解.

【详解】解：连接 AC ，过点 A 作 $AE \perp CD$ 交于点 E ，如图，



$\because$ 菱形的边长是 8，一个内角是 60° ，

$\therefore \triangle ADC$ 是等边三角形，

$$\therefore DE = EC = \frac{1}{2}DC = 4,$$

由勾股定理可得， $AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = 4\sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 菱形的面积是 $8 \times 4\sqrt{3} = 32\sqrt{3}$.

故选：D.

4. 下列事件中，属于确定事件的是（ ）

- A. 直线 $y = 2x - 1$ 与直线 $y = 2x$ 有公共点
B. 当 a 取某个实数值时，关于 x 的方程 $x^2 - a = 0$ 有实数根
C. 抛掷一枚质地均匀的硬币，结果硬币的正面朝上
D. 有两条边及其中一边的对角对应相等的两个三角形全等

【答案】B

【解析】

【分析】 本题主要考查了确定事件、不可能事件以及随机事件，熟练掌握其定义是解题的关键.

根据事件发生可能性的大小判断即可.

【详解】 解： A. 因为两直线 k 值相同，所以直线 $y = 2x - 1$ 与直线 $y = 2x$ 没有公共点，故本选项不符合题意；

B. 当 a 取非负数时，关于 x 的方程 $x^2 - a = 0$ 有实数根，故本选项符合题意；

C. 抛掷一枚质地均匀的硬币，结果硬币的正面朝上，此为随机事件，故本选项不符合题意；

D. 有两条边及其中一边的对角对应相等且为直角时，这两个三角形全等，此为不确定事件，故本选项不符合题意.

故选： B.

5. 下面是两位同学对于某个一次函数 $y = kx + b$ (k 、 b 为常数，且 $k \neq 0$) 图象的描述：

同学甲： 不经过第三象限；

同学乙： 经过点 $(3, 0)$.

根据这两位同学的描述，下列结论中错误的是 ()

A. $k < 0$

B. $kb < 0$

C. $k + b < 0$

D. $k = -\frac{1}{3}b$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查一次函数的图象及性质；熟练掌握一次函数解析式 $y = kx + b$ 中， k 与 b 对函数图象的影响是解题的关键.

根据一次函数的性质以及一次函数图象上点的坐标特征判断即可.

【详解】 解： $\because$ 该函数的图象经过 $(3, 0)$ 点.

$$\therefore 3k + b = 0,$$

$$\text{故 } k = -\frac{1}{3}b,$$

故 D 正确，不符合题意；

$\because$ 该函数的图象不经过第三象限，经过 $(3, 0)$ 点.

$$\therefore k < 0, b > 0,$$

$$\text{故 } kb < 0,$$

故 A、B 正确，不符合题意；

$$\therefore 3k + b = 0,$$

$$\therefore k + b = -2k,$$

$$\therefore k < 0,$$

$$\therefore k + b > 0,$$

故 C 错误，符合题意，

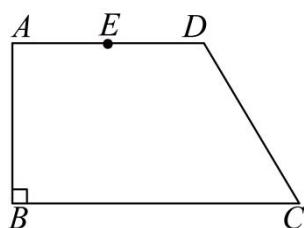
故选：C.

6. 如图，已知梯形 $ABCD$ 是某菜园的一块空地， $AD \parallel BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AD = CD = 8$ 米， $\angle BCD = 60^\circ$ ，某同学由上述条件得到以下两个结论：

① 对角线 AC 将梯形分成的两个三角形的面积之比 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$ ；

② 现准备过 AD 的中点 E 修一条笔直的小路 EF （点 F 在 BC 边上，小路面积忽略不计），将这块空地分成面积相等的两部分，分别种植不同的蔬菜，那么小路 EF 的长是 $2\sqrt{13}$ 米.

对于结论①和②，下列说法正确的是（ ）



A. ①正确，②错误

B. ①错误，②正确

C. ①和②都正确

D. ①和②都错误

【答案】D

【解析】

【分析】该题主要考查了矩形的性质和判定，勾股定理，直角三角形的性质，平行线的性质等知识点，解题的关键是正确做出辅助线.

如图，过点 C 作 $CH \perp AD$ 交 AD 的延长线于点 H ，得出四边形 $ABCH$ 是矩形， $BC = AH$ ， $\angle DCH = 30^\circ$ ，根据直角三角形的性质得出 $DH = \frac{1}{2}CD = 4$ ，根据勾股定理得出 $CH = 4\sqrt{3}$ ，从而得出 $BC = AH = 12$ ，

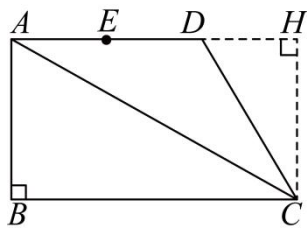
即可判断①错误；如图，根据题意得 EF 平分梯形 $ABCD$ 的面积，得出 $S_{\text{梯形}ABFE} = S_{\text{梯形}CDFE} = \frac{1}{2}S_{\text{梯形}ABCD}$ ，

再结合点 E 是 AD 中点，得出 $BF = CF = \frac{1}{2}BC = 6$ ，故点 E 作 $EG \perp BF$ 交 BF 于点 G ，则四边形 $AEGB$

是矩形，得出 $EG = AB = CH = 4\sqrt{3}$ ， $BG = AE = 4$ ， $FG = 2$ ，在 $Rt\triangle EGF$ 中，根据勾股定理算出 EF ，

即可判断②错误；

【详解】解：如图，过点 C 作 $CH \perp AD$ 交 AD 的延长线于点 H ，



则 $\angle H = 90^\circ$

$\because AD \parallel BC, \angle ABC = 90^\circ$

$\therefore \angle BCH = 180^\circ - \angle H = 90^\circ,$

$\therefore$ 四边形 $ABCH$ 是矩形,

$\therefore BC = AH,$

$\because \angle BCD = 60^\circ,$

$\therefore \angle DCH = 30^\circ,$

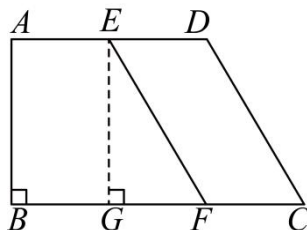
$\therefore DH = \frac{1}{2}CD = 4,$

$\therefore CH = \sqrt{CD^2 - DH^2} = 4\sqrt{3}, AH = 8 + 4 = 12,$

$\therefore BC = AH = 12,$

$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{\frac{1}{2} \times 12 \times 4\sqrt{3}}{\frac{1}{2} \times 8 \times 4\sqrt{3}} = \frac{3}{2},$ 故①错误;

如图，根据题意得 EF 平分梯形 $ABCD$ 的面积，



$\therefore S_{\text{梯形}ABFE} = S_{\text{梯形}CDFE} = \frac{1}{2} S_{\text{梯形}ABCD},$

$\because$ 点 E 是 AD 中点,

$\therefore AE = DE = \frac{1}{2}AD = 4,$

$\therefore S_{\text{梯形}ABFE} = \frac{1}{2}(AE + BF) \cdot AB, S_{\text{梯形}CDFE} = \frac{1}{2}(DE + CF) \cdot AB,$

$\therefore BF = CF = \frac{1}{2}BC = 6,$

故点 E 作 $EG \perp BF$ 交 BF 于点 G ,

则四边形 $AEGB$ 是矩形,

$$\therefore EG = AB = CH = 4\sqrt{3}, BG = AE = 4, FG = BF - BG = 2,$$

在 $Rt\triangle EGF$ 中, $EF = \sqrt{EG^2 + FG^2} = 4\sqrt{2}$, 故②错误;

故选: D.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. 一次函数 $y = x - 3$ 的图像在 y 轴上的截距是_____.

【答案】 -3

【解析】

【分析】 本题考查的是一次函数的性质, 即一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图象与 y 轴相交于 $(0, b)$, b 即为此函数在 y 轴上的截距.

先根据一次函数的解析式判断出 b 的值, 再根据一次函数的性质进行解答.

【详解】 解: $\because$ 一次函数 $y = x - 3$ 中 $b = -3$,

$\therefore$ 此函数图象在 y 轴上的截距是 -3 .

故答案为: -3 .

8. 方程 $\frac{1}{3}x^3 = 9$ 的解是 _____.

【答案】 $x=3$

【解析】

【分析】 将方程两边同时乘以 3, 再利用立方根的意义即可求解.

【详解】 解: 方程两边都乘以 3, 得:

$$x^3 = 27.$$

两边开立方, 得:

$$x = 3.$$

故答案为: $x=3$.

【点睛】 本题主要考查了立方根概念的应用. 方程两边都乘以 3, 去掉分母, 这是解题的关键.

9. 方程 $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-2} = 0$ 的根是_____.

【答案】 $x=2$

【解析】

【分析】 先根据二次根式有意义的条件求出 x 的取值范围, 再根据乘法法则转化为一元一次方程求解即可.

【详解】 $\because x+1 \geq 0, x-2 \geq 0,$

$\therefore x \geq 2.$

$\because \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-2} = 0,$

$\therefore x+1=0$ 或 $x-2=0,$

$\therefore x_1=-1$ (舍去), $x_2=2.$

故答案为: $x=2.$

【点睛】 本题考查了无理方程的解法, 根据代数式有意义的条件求出未知数的取值范围是本题的易错点.

10. 用换元法解方程 $\frac{x^2+1}{4x} + \frac{4x}{x^2+1} = 2$ 时, 如果设 $\frac{x^2+1}{4x} = y$, 那么原方程可化为关于 y 的整式方程是

_____.

【答案】 $y^2 - 2y + 1 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的解法—换元法, 换元法的一般步骤为: 设元, 换元, 解元, 还原.

根据换元法的步骤进行化简即可.

【详解】 解: 设 $\frac{x^2+1}{4x} = y,$

则原方程可化为: $y + \frac{1}{y} = 2$

整理, 得 $y^2 - 2y + 1 = 0$

故答案为: $y^2 - 2y + 1 = 0.$

11. 化简: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} =$ _____.

【答案】 0

【解析】

【分析】 此题考查了向量的线性运算, 根据向量的运算法则计算即可.

【详解】 解: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CB} = 0,$

故答案为: 0

12. 随着绿色发展理念的倡导, 新能源汽车逐渐普及, 市民对充电桩的使用需求日益增强, 某停车场计划购买 A 、 B 两种型号的充电桩, 已知 B 型充电桩比 A 型充电桩的单价多 0.4 万元, 且用 10 万元购买 A 型充电桩与用 12 万元购买 B 型充电桩的数量相等. 设 A 型充电桩的单价是 x 万元, 那么根据题意可列方程_____.

【答案】 $\frac{10}{x} = \frac{12}{x+0.4}$

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的应用，找准等量关系，正确列出分式方程是解题的关键.

根据“10万元购买A型充电桩与用12万元购买B型充电桩的数量相等”列方程即可.

【详解】 解：设A型充电桩的单价是 x 万元，则B型充电桩的单价为 $(x+0.4)$ 万元，

根据题意得， $\frac{10}{x} = \frac{12}{x+0.4}$

故答案为： $\frac{10}{x} = \frac{12}{x+0.4}$.

13. 如果直线 $y = -2x + 1$ 平移后经过点 $A(2, 3)$ ，那么平移后的直线表达式是_____.

【答案】 $y = -2x + 7$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图象与几何变换，待定系数法求一次函数的解析式，掌握直线平移时 k 的值不变是解题的关键.

根据平移不改变 k 的值可设平移后直线的解析式为 $y = -2x + b$ ，然后将点 $A(2, 3)$ 代入即可求解.

【详解】 解：设平移后的直线表达式是 $y = -2x + b$ ，

$\because$ 直线 $y = -2x + 1$ 平移后经过点 $A(2, 3)$ ，

$\therefore -2 \times 2 + b = 3$ ，

解得 $b = 7$ ，

$\therefore$ 平移后的直线表达式是 $y = -2x + 7$ ，

故答案为： $y = -2x + 7$.

14. 先后两次掷一枚材质均匀的骰子，第一次掷得的点数记为 a ，第二次掷得的点数记为 b ，那么点 (a, b) 落在直线 $y = 2x$ 上的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{12}$

【解析】

【分析】 此题考查的是用列表法或树状图法求概率. 注意树状图法与列表法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，列表法适合于两步完成的事件；树状图法适合两步或两步以上完成的事件；注意概率=所求情况数与总情况数之比.

首先根据题意列出表格，然后由表格求得所有等可能的结果与点 (a,b) 恰好在直线 $y=2x$ 上的情况，再利用概率公式求得答案.

【详解】解：列表得：

第一次 第二次	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

$\therefore$ 共有 36 种等可能的结果，点 (a,b) 恰好在直线 $y=2x$ 上的有：(1,2)，(2,4)，(3,6)，

$\therefore$ 点 (a,b) 恰好在直线 $y=2x$ 上的概率是： $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

故答案为： $\frac{1}{12}$.

15. 一个多边形的内角和是其外角和的 4 倍，则这个多边形的边数是 ____.

【答案】10

【解析】

【分析】本题考查了多边形内角与外角，解题的关键是根据多边形内角和公式得出方程

$$(n-2) \times 180^\circ = 360^\circ \times 4.$$

设这个多边形的边数为 n ，根据内角和公式以及多边形的外角和为 360° 即可列出关于 n 的一元一次方程，解方程即可得出结论.

【详解】解：设这个多边形的边数为 n ，则该多边形的内角和为 $(n-2) \times 180^\circ$ ，

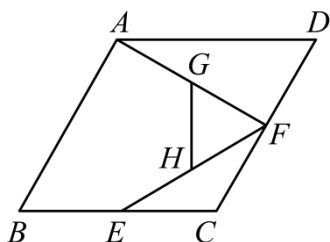
$$\text{依题意得：} (n-2) \times 180^\circ = 360^\circ \times 4,$$

$$\text{解得：} n = 10,$$

∴这个多边形的边数是 10.

故答案为: 10.

16. 如图, 已知菱形 $ABCD$ 的边长是 4, $\angle B=60^\circ$, E 、 F 是边 BC 、 CD 的中点, G 、 H 是线段 AF 、 EF 的中点, 那么 $GH =$ _____.



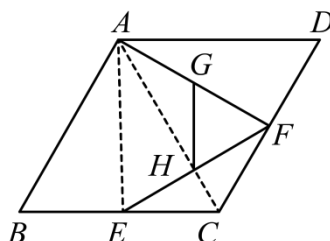
【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 此题考查了菱形的性质、等边三角形的判定和性质、三角形中位线的性质、勾股定理等知识, 证明 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 则 $AB = BC = AC = 4$, 由点 E 是 BC 的中点得到

$AE \perp BC, BE = CE = \frac{1}{2}BC = 2$, 由勾股定理得到 $AE = 2\sqrt{3}$, 证明 GH 是 $\triangle AEF$ 的中位线, 即可得到 $GH = \frac{1}{2}AE = \sqrt{3}$.

【详解】 解: 连接 AE, AC ,



∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

∴ $AB = BC$,

∵ $\angle B = 60^\circ$,

∴ $\triangle ABC$ 是等边三角形,

∴ $AB = BC = AC = 4$,

∵ 点 E 是 BC 的中点,

∴ $AE \perp BC, BE = CE = \frac{1}{2}BC = 2$,

∴ $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$,

∵ G 、 H 是线段 AF 、 EF 的中点,

∴ GH 是 $\triangle AEF$ 的中线,

$$\therefore GH = \frac{1}{2}AE = \sqrt{3},$$

故答案为: $\sqrt{3}$

17. 在平面直角坐标系中, 如果两个点的横坐标、纵坐标都是整数, 且这两个点的横坐标与纵坐标的积相等, 我们就称这两个点互为等积点. 如: 点 $P(2,3)$ 与点 $Q(3,2)$ 互为等积点. 那么以点 $M(-1,3)$ 和它的所有等积点为顶点的凸多边形的面积是_____.

【答案】 16

【解析】

【分析】该题是新定义问题, 主要考查了坐标与图形, 根据题意得出点 $M(-1,3)$ 的等积点是解题的关键. 先根据等积点的定义得出点 $M(-1,3)$ 的等积点, 再画图求解即可

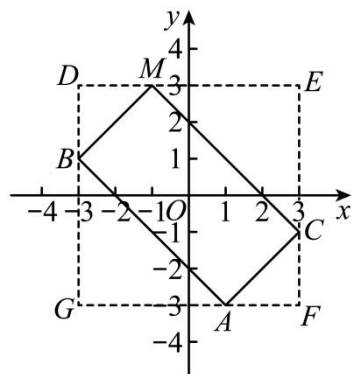
【详解】解: 根据互为等积点的定义得出点 $M(-1,3)$ 的等积点为 $A(1,-3), B(-3,1), C(3,-1)$,

故以 A, B, C, M 为顶点的四边形的面积 $S = S_{DEFG} - S_{BDM} - S_{ABG} - S_{ACF} - S_{CEM}$

$$= 6 \times 6 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times 4 \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times 4 \times 4$$

$$= 16.$$

故答案为: 16.



18. 已知矩形 $ABCD$, $AB=10$, 将 $\triangle ACD$ 沿着直线 AC 翻折, 点 D 落在点 E 处, 如果点 E 到直线 BC 的距离是 6, 那么 AD 的长是_____.

【答案】 5 或 20

【解析】

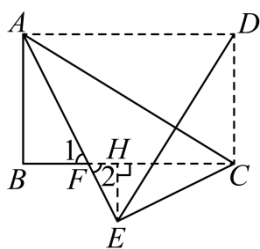
【分析】分为两种情况分别画图计算. ①如图, 当 $AB < AD$ 时, AE 交 BC 于点 F , 过点 E 作 $EH \perp BC$ 交 BC 于点 H , 则 $EH=6$, 根据四边形 $ABCD$ 是矩形, 得出 $AB=CD=10, \angle ADC = \angle ABC = 90^\circ$, 根据折叠的性质得, $\angle AEC = \angle ADC = \angle B = 90^\circ, CE = CD = AB = 10$, 证明 $\triangle ABF \cong \triangle CEF$, 得出

$BF = EF, AF = CF$, 设 $BF = EF = x$, 根据等面积法得出 $CF = \frac{5}{3}x$, 从而得出 $AF = CF = \frac{5}{3}x$, 在 $Rt\triangle ABF$ 中, 根据勾股定理求出 x , 即可求解;

②如图, $AB > AD$ 时, 过点 E 作 $EH \perp BC$ 交 BC 的延长线于点 H , 过点 E 作 $EF \perp AB$ 交 AB 于点 F , 则 $EH = 6$, 根据四边形 $ABCD$ 是矩形, 得出 $AB = CD = 10, \angle ADC = \angle ABC = 90^\circ$, 证出四边形 $EHBF$ 是矩形, 得到 $BH = EF, BF = EH = 6$, $AF = 4$, 根据折叠的性质得,

$\angle AEC = \angle ADC = \angle B = 90^\circ, CE = CD = AB = 10$, $BC = AD$, 在 $Rt\triangle EHC$ 中, 根据勾股定理算出 $CH = 8$, 设 $BC = AD = AE = x$, $EF = BH = 8 - x$, 在 $Rt\triangle AEF$ 中, 根据勾股定理求出 x , 即可求解;

【详解】解: ①如图, 当 $AB < AD$ 时, AE 交 BC 于点 F , 过点 E 作 $EH \perp BC$ 交 BC 于点 H , 则 $EH = 6$,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AB = CD = 10, \angle ADC = \angle ABC = 90^\circ$,

根据折叠的性质得, $\angle AEC = \angle ADC = \angle B = 90^\circ, CE = CD = AB = 10$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$,

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CEF (AAS)$,

$\therefore BF = EF, AF = CF$,

设 $BF = EF = x$,

$\therefore S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2}CE \cdot EF = \frac{1}{2}CF \cdot EH$,

即 $\frac{1}{2} \times 10 \cdot x = \frac{1}{2}CF \cdot 6$,

$\therefore CF = \frac{5}{3}x$,

$\therefore AF = CF = \frac{5}{3}x$,

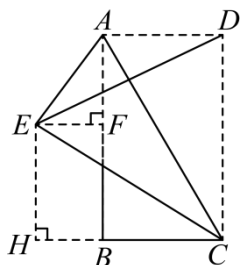
在 $Rt\triangle ABF$ 中, $AB^2 + BF^2 = AF^2$,

即 $10^2 + x^2 = \left(\frac{5}{3}x\right)^2$,

解得： $x = \frac{30}{4}$ ，

$\therefore AD = BC = \frac{5}{3}x + x = \frac{8}{3}x = 20$ ；

②如图， $AB > AD$ 时，过点 E 作 $EH \perp BC$ 交 BC 的延长线于点 H ，过点 E 作 $EF \perp AB$ 交 AB 于点 F ，则 $EH = 6$ ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AB = CD = 10, \angle ADC = \angle ABC = \angle ABH = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $EHBF$ 是矩形，

$\therefore BH = EF, BF = EH = 6$ ，

$\therefore AF = AB - BF = 4$ ，

根据折叠的性质得， $\angle AEC = \angle ADC = \angle B = 90^\circ, CE = CD = AB = 10$ ， $BC = AD$ ，

在 $Rt\triangle EHC$ 中， $CH = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ ，

设 $BC = AD = AE = x$ ， $EF = BH = 8 - x$ ，

在 $Rt\triangle AEF$ 中， $AE^2 = EF^2 + AF^2$ ，

即 $x^2 = (8 - x)^2 + 4^2$ ，

解得： $x = 5$ ，

$\therefore AD = 5$ ，

综上， $AD = 5$ 或 20 ；

故答案为： 5 或 20 .

【点睛】此题考查了折叠的性质、矩形的性质、勾股定理、全等三角形的性质和判定、三角形面积等知识点，熟练掌握折叠的性质，正确作出图形并分类讨论是解题的关键.

三、解答题（本大题共 7 题，其中第 19 至 22 题每题 10 分，第 23 至 24 题每题 12 分，第 25 题 14 分，满分 78 分）

19. 解方程： $\frac{4}{x^2 - 4} - \frac{x - 3}{2 - x} = 2$.

【答案】 -3

【解析】

【分析】 本题主要考查了分式方程的解法，步骤为：去分母，去括号，移项，合并同类项，系数化为1，检验.

按照解分式方程的步骤进行求解即可.

【详解】 解： $\frac{4}{x^2-4} - \frac{x-3}{2-x} = 2$

$$4 + (x-3)(x+2) = 2(x^2-4)$$

$$4 + x^2 - x - 6 = 2x^2 - 8$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0$$

解得 $x_1 = -3$, $x_2 = 2$

经检验， $x = -3$ 是原分式方程的解.

20. 解方程组： $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x^2 - xy - 2y^2 = 0 \end{cases}$

【答案】 $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 4 \\ y = -4 \end{cases}$

【解析】

【分析】 本题考查二元二次方程的解法，掌握二元二次方程的解法是解题的关键.

由 $x^2 - xy - 2y^2 = 0$ 得 $x - 2y = 0$ 或 $x + y = 0$ ，从而将原方程组化成两个二元一次方程组，分别求二元一次方程组的解即可.

【详解】 解： $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ x^2 - xy - 2y^2 = 0 \end{cases}$

将 $x^2 - xy - 2y^2 = 0$ 变形可得 $(x - 2y)(x + y) = 0$,

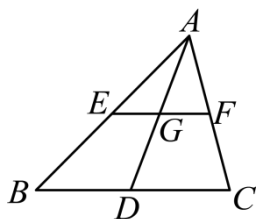
即 $x - 2y = 0$ 或 $x + y = 0$,

故方程组可变形得 $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$,

$$\text{解得} \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=4 \\ y=-4 \end{cases},$$

$$\text{故原方程组的解为} \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=4 \\ y=-4 \end{cases}.$$

21. 如图, $\triangle ABC$ 中, D 、 E 、 F 分别是 AB 、 BC 、 CA 三边的中点, 连接 EF 、 AD , 交于点 G , 设 $\overrightarrow{AE} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$.



(1) 试用向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{AD} =$ _____;

(2) 在图中求作: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ 、 $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{FC}$. (不要写出过程, 只需写出结论即可)

【答案】(1) $\vec{a} + \vec{b}$

(2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{EC}$, 画图见解析

【解析】

【分析】此题考查了向量的线性运算, 三角形中位线的性质,

(1) 首先根据中点的性质得到 $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AE} = 2\vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AF} = 2\vec{b}$, 然后表示出 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 2\vec{b} - 2\vec{a}$, 得到 $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{b} - \vec{a}$, 然后利用向量的三角形法则求解即可;

(2) 由题意得到 $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$; 根据中位线和中点的性质得到 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DC}$, 进而得到

$\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{EC}$, 然后画图即可.

【小问 1 详解】

$\because E$ 、 F 分别是 AB 、 CA 边的中点, $\overrightarrow{AE} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AE} = 2\vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AF} = 2\vec{b}$

$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 2\vec{b} - 2\vec{a}$

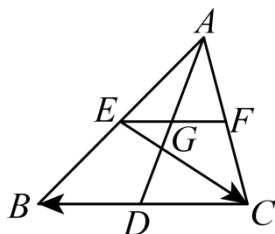
$\because D$ 是 BC 的中点,

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{a} = \vec{a} + \vec{b};$$

【小问 2 详解】

如图所示,



$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB};$$

$\because E, F$ 分别是 AB, CA 边的中点,

$$\therefore EF \parallel BC, \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$$

$\because D$ 是 BC 的中点,

$$\therefore DC = \frac{1}{2} BC$$

$$\therefore \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DC}$$

$$\therefore \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{EC}.$$

22. 暑期将至, 某健身俱乐部为了促销, 面向学生推出三种优惠活动.

活动一: 购买一张学生暑期 VIP 卡 (800 元/张), 每次凭卡不需要再付费;

活动二: 购买一张学生暑期乐享卡 (200 元/张), 每次费用按平常价格的六折优惠;

活动三: 不购买上述暑期卡, 凭学生证每次费用按平常价格的九折优惠.

三种活动仅限暑期 (7 月 1 日至 8 月 31 日期间) 使用, 次数不限.

又知学生甲计划暑期前往该健身俱乐部 15 次, 如果选择活动二, 共需支付费用 650 元. 请根据上述信息,

解答下列问题:

(1) 每次健身的平常价格是_____元;

(2) 设健身 x 次时, 所需总费用为 y 元. 当选择活动三时, y 与 x 的函数关系式是_____.

(3) 学生乙计划暑期前往健身俱乐部 25 次, 选择哪种活动所需费用最少? 说明理由.

【答案】 (1) 50 (2) $y = 45x$

(3) 活动一, 理由见解析

【解析】

【分析】 本题主要考查一次函数的应用，根据题意列出函数关系式是解题的关键.

(1) 设平常价格为 m 元，根据题意列出方程求解即可；

(2) 根据题意求解即可；

(3) 分别计算出三种活动所需费用，再进行比较即可.

【小问 1 详解】

解：设平常价格为 m 元，

根据题意得 $200 + 60\%m \times 15 = 650$

解得 $m = 50$

故答案为：50.

【小问 2 详解】

根据题意得， $y = 50 \times 90\%x = 45x$

故答案为： $y = 45x$.

【小问 3 详解】

活动一：800 元

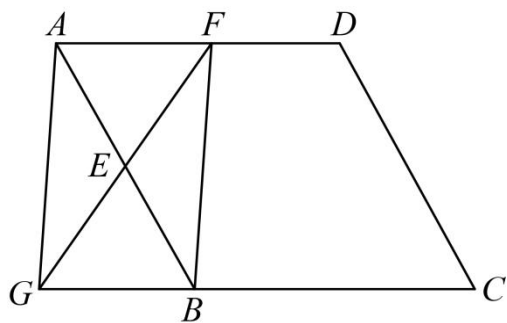
活动二： $200 + 25 \times 50 \times 60\% = 950$ （元）

活动三： $45 \times 25 = 1125$ （元）

$\therefore 800 < 950 < 1125$

$\therefore$ 活动一所需费用最少.

23. 如图，已知平行四边形 $ABCD$ ， E 是边 AB 的中点，点 F 在边 AD 上，连接 FE 并延长交 CB 的延长线于点 G ，连接 BF 、 AG .



(1) 如果 $\angle AFG = \angle C$ ，求证：四边形 $AGBF$ 是矩形；

(2) 如果 F 是边 AD 的中点，且 $\angle AFG = \frac{1}{2} \angle ADC$ ，求证：四边形 $ABCD$ 是菱形.

【答案】 (1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形的性质，矩形的判定，菱形的判定，三角形的中位线，熟练掌握矩形和菱形的判定是解题的关键.

(1) 先证出 $\triangle AEF \cong \triangle BEG$ ，再根据 $\angle AFG = \angle C$ ，得到 $AB = GF$ ，即可证明；

(2) 连接 BD ，得到 EF 是 $\triangle ABD$ 的中位线，从而证得 $\triangle ADB \cong \triangle CDB$ ，得出 $AD = AC$ ，即可证明.

【小问 1 详解】

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$$\therefore AD \parallel BC, \angle FAE = \angle C$$

$$\therefore \angle EAF = \angle EBG$$

$\because E$ 是边 AB 的中点，

$$\therefore EA = EB$$

又 $\because \angle AEF = \angle BEG$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle BEG (\text{ASA})$$

$$\therefore AF = BG, EF = EG$$

又 $\because AD \parallel BC$

$\therefore$ 四边形 $AGBF$ 是平行四边形

$$\therefore \angle AFG = \angle C$$

$$\therefore \angle AFG = \angle FAE$$

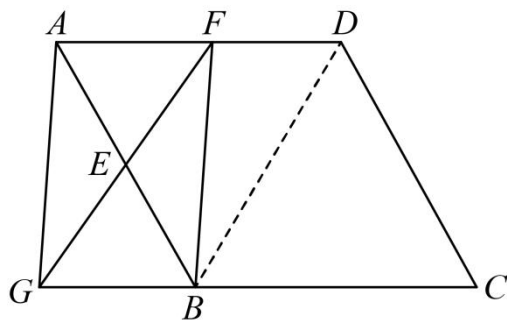
$$\therefore EA = EF$$

$$\therefore AB = GF$$

$\therefore$ 四边形 $AGBF$ 是矩形.

【小问 2 详解】

连接 BD ，如图，



$\because E$ 是边 AB 的中点， F 是边 AD 的中点，

$\therefore EF$ 是 $\triangle ABD$ 的中位线，

$$\therefore EF \parallel BD$$

$$\therefore \angle AFE = \angle ADB$$

$$\text{又} \because \angle AFG = \frac{1}{2} \angle ADC$$

$$\therefore \angle ADB = \frac{1}{2} \angle ADC$$

$$\therefore \angle ADB = \angle CDB$$

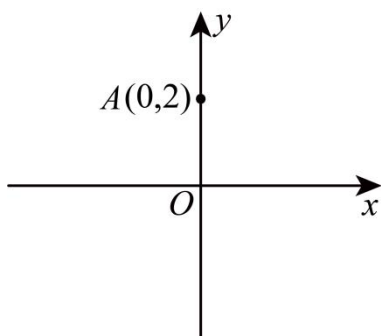
$$\text{又} \because \angle DAB = \angle C, \quad BD = BD$$

$$\therefore \triangle ADB \cong \triangle CDB (\text{AAS})$$

$$\therefore AD = DC$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

24. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $A(0,2)$ 、 $B(m+2, m-3)$, 将点 B 向左平移 2 个单位后落在 y 轴上的点 P 处.



(1) 求 m 的值;

(2) 将线段 PA 绕点 P 逆时针旋转 90° , 点 A 落在点 C 处, 求直线 AC 的表达式;

(3) 设 (2) 中的直线 AC 与 x 轴交于点 D , 在直角坐标平面内找点 Q , 使得以点 A 、 D 、 P 、 Q 为顶点的四边形是平行四边形, 求点 Q 的坐标.

【答案】 (1) 0 (2) $y = x + 2$

(3) $(2, -1)$ 或 $(-2, -5)$ 或 $(-2, 5)$

【解析】

【分析】 (1) 根据坐标平移规律“左减右加”以及坐标轴上点坐标特征即可求解;

(2) 根据旋转的性质求得 $C(-5, -3)$, 再利用待定系数法即可求解;

(3) 先求得 $D(-2, 0)$, 根据平行四边形的性质进行分类讨论, 利用平移的性质即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 将点 B 向左平移 2 个单位后落在 y 轴上

$$\therefore m+2-2=0$$

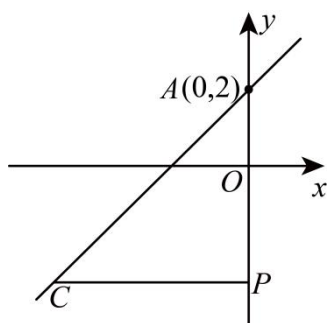
解得 $m=0$

【小问 2 详解】

由 (1) 可得 $m=0$,

$$\therefore m-3=-3$$

$$\therefore P(0,-3)$$



如图, 根据旋转可得, $PA=PC=2-(-3)=5$

$$\therefore C(-5,-3)$$

设直线 AC 的表达式为 $y=kx+b$ ($k \neq 0$)

$\because$ 直线 AC 经过点 $A(0,2)$, $C(-5,-3)$

$$\therefore \begin{cases} 0+b=2 \\ -5k+b=-3 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} b=2 \\ k=1 \end{cases}$$

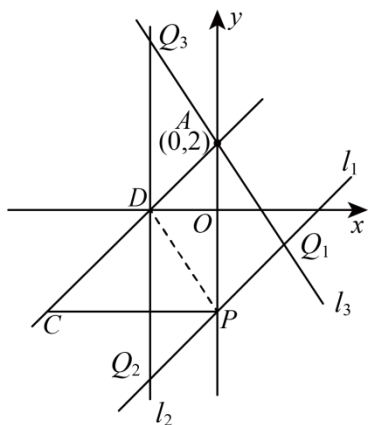
$\therefore$ 直线 AC 的表达式为 $y=x+2$.

【小问 3 详解】

由 (2) 知直线 AC 的表达式为 $y=x+2$,

$$\therefore D(-2,0)$$

连接 DP , 如图,



①由平移得直线 $l_3 \parallel DP$,

此时 Q_1 即为所求,

$\therefore$ 四边形 $ADPQ_1$ 为平行四边形

$$\therefore AD = PQ_1$$

$$\therefore A(0,2), D(-2,0), P(0,-3)$$

$$\therefore Q_1(2,-1)$$

②由平移得直线 $l_1 \parallel AD$,

此时 Q_2 即为所求,

$\therefore$ 四边形 ADQ_2P 为平行四边形

$$\therefore AP = DQ_2$$

$$\therefore A(0,2), P(0,-3), D(-2,0)$$

$$\therefore Q_2(-2,-5)$$

③由平移得直线 $l_2 \parallel x$ 轴,

此时 Q_3 即为所求,

$\therefore$ 四边形 AQ_3DP 为平行四边形

$$\therefore AP = DQ_3$$

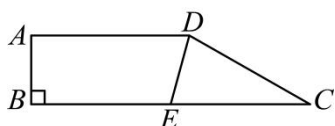
$$\therefore A(0,2), P(0,-3), D(-2,0)$$

$$\therefore Q_3(-2, 5)$$

综上所述, Q 的坐标为 $(2, -1)$ 或 $(-2, -5)$ 或 $(-2, 5)$.

【点睛】 本题考查了一次函数的图象与坐标轴的交点, 旋转的性质, 平移的性质, 待定系数法求一次函数的解析式, 平行四边形的性质与判定, 坐标平移规律以及坐标轴上点坐标特征等, 根据平移求对应点坐标是解题的关键.

25. 如图, 梯形 $ABCD$, $AD \parallel BC$, $AD < BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $BC = 4$, $\angle ADC$ 的平分线交边 BC 于点 E .



(1) 如果 $AB = 1$, $CD = 2$, 求 AD 的长;

(2) 如果 $\angle C = 45^\circ$, 设 $AB = x$, 四边形 $ABED$ 的面积为 y , 求 y 关于 x 的函数解析式, 并写出 x 的取值范围;

(3) 设 F 是 DE 的中点, 连接 AF , 如果 $AF \parallel CD$, 且 $BE = 2AB$, 求 AB 的长.

【答案】 (1) $4 - \sqrt{3}$

$$(2) y = -\frac{\sqrt{2}+1}{2}x^2 + 4x \quad (0 < x < 2\sqrt{2})$$

$$(3) -\sqrt{19} + 5$$

【解析】

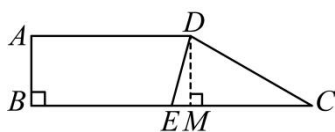
【分析】 (1) 过点 D 作 $DM \perp BC$ 交 BC 于点 M , 可证四边形 $ABMD$ 是矩形, 根据 $AD \parallel BC$, DE 平分 $\angle ADC$, 得到 $DC = CE = 2$, 然后利用勾股定理即可求解;

(2) 利用勾股定理求出 $DC = \sqrt{DM^2 + MC^2} = \sqrt{2}x$, 然后表示出 AD 、 BE 的长即可求解;

(3) 延长 AF 交 BC 于点 N , 即可证明四边形 $ADCN$ 是平行四边形, 则 $AN = CD = EC = 4 - 2AB$, 再证明 $\triangle ADF \cong \triangle NEF$ (AAS), 求出 $AD = EN = NC = \frac{1}{2}EC = 2 - AB$, 然后利用勾股定理求解即可.

【小问 1 详解】

解: 过点 D 作 $DM \perp BC$ 交 BC 于点 M , 如图,



$$\therefore \angle DMC = 90^\circ$$

$\therefore$ 四边形 $ABMD$ 是矩形

$$\therefore AB = DM = 1$$

$\because AD \parallel BC$, DE 平分 $\angle ADC$,

$$\therefore \angle ADE = \angle DEC = \angle EDC$$

$$\therefore DC = CE = 2$$

由勾股定理可得, $MC = \sqrt{DC^2 - MD^2} = \sqrt{3}$

$$\therefore AD = BM = BC - MC = 4 - \sqrt{3}.$$

【小问 2 详解】

由 (1) 可知, $DM = AB = x$

$$\therefore \angle C = 45^\circ$$

$$\therefore DM = MC = x$$

$$\therefore AD = BM = BC - MC = 4 - x$$

由勾股定理可得, $DC = \sqrt{DM^2 + MC^2} = \sqrt{2}x$

$$\therefore DC = CE = \sqrt{2}x$$

$$\therefore BE = BC - EC = 4 - \sqrt{2}x$$

$$\therefore BE > 0, AB > 0$$

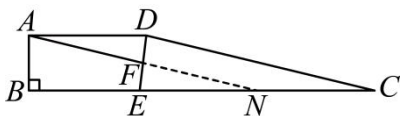
$$\therefore 4 - \sqrt{2}x > 0$$

解得 $0 < x < 2\sqrt{2}$

$$\therefore y = \frac{1}{2} (4 - x + 4 - \sqrt{2}x) x = -\frac{\sqrt{2}+1}{2} x^2 + 4x \quad (0 < x < 2\sqrt{2}).$$

【小问 3 详解】

延长 AF 交 BC 于点 N , 如图,



$$\therefore AD \parallel BC, AF \parallel CD$$

$\therefore$ 四边形 $ADCN$ 是平行四边形

$$\therefore AD = NC, AN = DC$$

$$\because BE = 2AB, \quad BC = 4$$

$$\therefore EC = BC - BE = 4 - 2AB$$

$$\because AD \parallel BC, \quad DE \text{ 平分 } \angle ADC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle DEC = \angle EDC$$

$$\therefore DC = CE$$

$$\therefore AN = CD = EC = 4 - 2AB$$

$$\because F \text{ 是 } DE \text{ 的中点, } AF \parallel CD$$

$$\therefore DF = EF, \quad \angle ADF = \angle NEF, \quad \angle DAF = \angle ENF$$

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle NEF \text{ (AAS)}$$

$$\therefore AD = EN$$

$$\therefore AD = EN = NC = \frac{1}{2}EC = 2 - AB,$$

$$\therefore BN = BE + EN = 2AB + 2 - AB = AB + 2$$

$$\text{由勾股定理得, } AB^2 + BN^2 = AN^2,$$

$$\text{即 } AB^2 + (AB + 2)^2 = (4 - 2AB)^2,$$

$$\text{解得 } AB = \pm\sqrt{19} + 5$$

$$\because AB < BE < BC$$

$$\therefore AB = -\sqrt{19} + 5.$$

【点睛】 本题考查了矩形的判定和性质，等腰三角形的判定和性质，勾股定理，平行四边形的性质与判定，全等三角形的性质与判定，熟练掌握平行四边形的性质与判定和勾股定理是解题的关键。