

2022-2023 学年上海市普陀区曹杨二中附属学校八年级（下）期末数学试卷

第 I 卷（选择题）

一、选择题（本大题共 6 小题，共 24.0 分。在每小题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 一次函数 $y = -3x - 2$ 的截距是（ ）

- A. -3 B. -2 C. 2 D. 3

【答案】B

【解析】

【分析】计算当 $x=0$ 时对应的 y 值即得答案.

【详解】解：当 $x=0$ 时， $y=-2$ ，所以一次函数 $y = -3x - 2$ 的截距是 -2 .

故选：B.

【点睛】本题考查了一次函数的相关知识，属于基本题型，正确得出当 $x=0$ 时对应的 y 值是解题关键.

2. 下列方程中，有实数根的是（ ）

- A. $x^4 + 1 = 0$ B. $\sqrt{x-2} + 1 = 0$ C. $\sqrt{x+2} = -x$ D. $\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{x^2-1}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用乘方的意义可对 A 进行判断；通过解无理方程可对 B、C 进行判断；通过解分式方程可对 D 进行判断.

【详解】解：A、 $x^4 \geq 0$ ， $x^4 + 1 > 0$ ，方程 $x^4 + 1 = 0$ 没有实数解；

B、 $\sqrt{x-2} = -1$ ，任何数的算术平方根是非负数，故原方程没有实数解；

C、两边平方得 $x+2=x^2$ ，解得 $x_1=-1$ ， $x_2=2$ ，经检验，原方程的解为 $x=-1$ ；

D、去分母得 $x=1$ ，经检验 $x=1$ 是原方程的增根，故原方程没有实数解，

故选：C.

【点睛】本题主要考查了无理方程：解无理方程的基本思想是把无理方程转化为有理方程来解，在变形时要注意根据方程的结构特征选择解题方法. 用乘方法（即将方程两边各自乘同次方来消去方程中的根号）来解无理方程，往往会产生增根，应注意验根.

3. 将只有颜色不同的 3 个白球、2 个黑球放在一个不透明的布袋中.下列四个选项，不正确的是（ ）

- A. 摸到白球比摸到黑球的可能性大 B. 摸到白球和黑球的可能性相等
C. 摸到红球是确定事件 D. 摸到黑球或白球是确定事件

【答案】B

【解析】

【分析】根据随机事件发生的可能性的计算方法和确定事件的概念逐一判断即得答案.

【详解】解：A、由白球的数量比黑球的数量多可得摸到白球比摸到黑球的可能性大，所以本选项说法正确，不符合题意；

B、摸到白球和黑球的可能性不相等，所以本选项说法错误，符合题意；

C、摸到红球是不可能事件，属于确定事件，所以本选项说法正确，不符合题意；

D、摸到黑球或白球是必然事件，属于确定事件，所以本选项说法正确，不符合题意.

故选：B.

【点睛】本题考查了可能性的大小和确定事件的概念，属于基础题型，熟练掌握上述基本知识是关键.

4. 下列四个命题中，假命题是（ ）

A. 有两个内角相等的梯形是等腰梯形

B. 等腰梯形一定有两个内角相等

C. 两条对角线相等的梯形是等腰梯形

D. 等腰梯形的两条对角线相等

【答案】A

【解析】

【分析】利用直角梯形可对 A 进行判断；根据等腰梯形的性质对 B、D 进行判断；根据等腰梯形的判定方法对 C 进行判断.

【详解】解：A、有两个内角相等的梯形是等腰梯形，如：直角梯形，故这个命题为假命题；

B、等腰梯形一定有两个内角相等，这个命题为真命题；

C、两条对角线相等的梯形是等腰梯形，这个命题为真命题；

D、等腰梯形的两条对角线相等，这个命题为真命题.

故选：A.

【点睛】本题考查了命题与定理和梯形的性质和判定，命题的“真”“假”是就命题的内容而言. 任何一个命题非真即假. 要说明一个命题的正确性，一般需要推理、论证，而判断一个命题是假命题，只需举出一个反例即可.

5. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D、E 分别在 AB、AC 上，如果 $AD = 2$ ， $BD = 3$ ，那么由下列条件能够判定 $DE \parallel BC$ 的是（ ）

A. $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{3}$

B. $\frac{DE}{BC} = \frac{2}{5}$

C. $\frac{AE}{AC} = \frac{2}{3}$

D. $\frac{AE}{AC} = \frac{2}{5}$

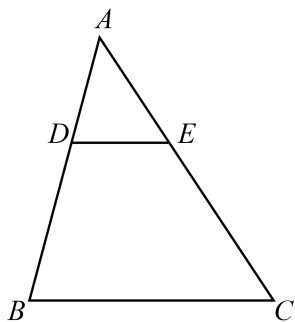
【答案】D

【解析】

【分析】利用如果一条直线截三角形的两边(或两边的延长线)所得的对应线段成比例,那么这条直线平行于三角形的第三边可对各选项进行判断即可.

【详解】解: $\because AD = 2, BD = 3,$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{2}{5},$$



只有当 $\frac{AE}{AC} = \frac{2}{5}$ 时, $DE \parallel BC$,

理由是: $\because \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{2}{5}, \angle A = \angle A,$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle ABC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle B,$$

$$\therefore DE \parallel BC,$$

而其它选项都不能推出 $\triangle ADE \cong \triangle ABC$, 即不能推出 $\angle ADE = \angle B$ 或 $\angle AED = \angle C$, 即不能推出 $DE \parallel BC$,

即选项 A、B、C 都错误, 只有选项 D 正确.

故选: D.

【点睛】本题考查了平行线分线段成比例定理, 熟练掌握和灵活运用相关知识是解题的关键.

6. 已知四边形 $ABCD$ 是矩形, 点 O 是对角线 AC 与 BD 的交点. 下列四种说法: ①向量 $\overrightarrow{AO}$ 与向量 $\overrightarrow{OC}$ 是相等的向量; ②向量 $\overrightarrow{OA}$ 与向量 $\overrightarrow{OC}$ 是互为相反的向量; ③向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{CD}$ 是相等的向量; ④向量 $\overrightarrow{BO}$ 与向量 $\overrightarrow{BD}$ 是平行向量. 其中正确的个数为 ()

A. 1

B. 2

C. 3

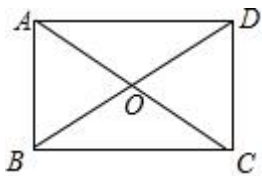
D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】利用矩形的性质, 相等向量, 平行向量的定义一一判断即可.

【详解】解：如图：



∵ 四边形 ABCD 是矩形，

∴ $AB=CD$ ， $AB \parallel CD$ ， $OA=OC$ ， $OB=OD$ ，

∴ ① 向量 $\overrightarrow{AO}$ 与向量 $\overrightarrow{OC}$ 是相等的向量，正确。

② 向量 $\overrightarrow{OA}$ 与向量 $\overrightarrow{OC}$ 是互为相反的向量，正确。

③ 向量 $\overrightarrow{AB}$ 与向量 $\overrightarrow{CD}$ 是相等的向量；错误。

④ 向量 $\overrightarrow{BO}$ 与向量 $\overrightarrow{BD}$ 是平行向量。正确。

故选：C。

【点睛】本题考查平面向量，矩形的性质等知识，长度相等且方向相同的两个向量叫做相等向量，平行向量也叫共线向量，是方向相同或相反的非零向量。

第 II 卷（非选择题）

二、填空题（本大题共 12 小题，共 48.0 分）

7. 已知一次函数 $f(x) = 3x + 2$ ，那么 $f(-17) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 -49

【解析】

【分析】将 $x = -17$ 代入一次函数 $f(x) = 3x + 2$ ，即可求出 $f(-17)$ 的值。

【详解】解：当 $x = -17$ 时， $f(-17) = 3 \times (-17) + 2 = -49$ 。

故答案为：-49。

【点睛】本题考查了一次函数图象上点的坐标特征，牢记直线上任意一点的坐标都满足函数关系式 $y = kx + b$ 是解题的关键。

8. 点 P 是线段 AB 的黄金分割点， $AP > BP$ ，若 $AB = 6$ ，则 $AP = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 $3\sqrt{5} - 3$

【解析】

【分析】由黄金分割点可知，较大部分比较小部分，等于整体比较大部分，等于 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，代入求值即可。

【详解】解：∵点 P 是线段 AB 的黄金分割点， $AP > BP$ ， $AB = 6$

$$\therefore AP = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB = 6 \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 3\sqrt{5}-3,$$

故答案为： $3\sqrt{5}-3$.

【点睛】 本题考查黄金比例，掌握黄金比例的比值是解决本题的关键.

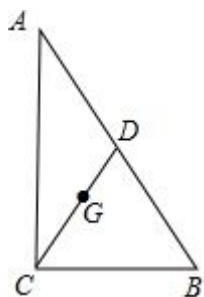
9. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 4$ ， $BC = 3$ ，那么它的重心 G 到 C 点的距离是_____.

【答案】 $\frac{5}{3}$

【解析】

【分析】 延长 CG 交 AB 于 D ，如图，根据三角形重心的性质得到 CD 为 AB 边上的中线， $CG = 2DG$ ，则 $CG = \frac{1}{3} AB$ ，然后利用勾股定理计算出 AB 即可.

【详解】 解：如图，延长 CG 交 AB 于点 D ，



∵ G 点为 $\triangle ABC$ 的重心，

∴ CD 为 AB 边上的中线， $CG = 2DG$ ，

$$\therefore CD = \frac{1}{2} AB,$$

$$\therefore CG = \frac{2}{3} CD = \frac{1}{3} AB,$$

∵ $AC = 4$ ， $BC = 3$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\therefore CG = \frac{1}{3} \times 5 = \frac{5}{3},$$

即三角形的重心 G 到 C 点的距离是 $\frac{5}{3}$.

故答案为： $\frac{5}{3}$.

【点睛】 本题考查了三角形的重心：重心到顶点的距离与重心到对边中点的距离之比为 $2:1$ ，也考查了直角三角形斜边上的中线性质的勾股定理.

10. 二项方程 $2x^3 + 16 = 0$ 在实数范围内的解是_____.

【答案】 $x = -2$

【解析】

【分析】 先移项，再将三次项系数化为 1，最后根据立方根的定义求解可得.

【详解】 解： $\because 2x^3 + 16 = 0$,

$$\therefore 2x^3 = -16,$$

$$\therefore x^3 = -8,$$

$$\text{则 } x = -\sqrt[3]{8} = -2$$

故答案为： $x = -2$.

【点睛】 本题主要考查立方根，解题的关键是掌握立方根的定义.

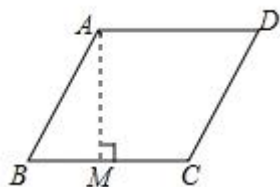
11. 已知菱形的边长为 2 cm ，一个内角为 60° ，那么该菱形的面积为_____ cm^2 .

【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 连接 AC ，过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M ，根据菱形的面积公式即可求出答案.

【详解】 解：过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M ,



$\because$ 菱形的边长为 2 cm ,

$$\therefore AB = BC = 2\text{ cm},$$

$\because$ 有一个内角是 60° ,

$$\therefore \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAM = 30^\circ,$$

$$\therefore BM = \frac{1}{2} AB = 1 \text{ (cm)},$$

$$\therefore AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{3} \text{ (cm)},$$

$$\therefore \text{此菱形的面积为: } 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

故答案为: $2\sqrt{3}$.

【点睛】 本题主要考查了菱形的性质和 30° 直角三角形性质, 解题的关键是熟练运用菱形的性质, 本题属于基础题型.

12. 方程 $(x+3)\sqrt{x-1}=0$ 的解是_____.

【答案】 $x=1$

【解析】

【分析】 根据方程得出 $x+3=0$ 或 $\sqrt{x-1}=0$, 求出两方程的解, 再进行检验即可.

【详解】 解: $(x+3)\sqrt{x-1}=0$,

则 $x+3=0$ 或 $\sqrt{x-1}=0$,

解得: $x=-3$ 或 $x=1$,

经检验: $x=-3$ 不是原方程的解, $x=1$ 是原方程的解.

故答案为: $x=1$.

【点睛】 本题考查了解无理方程, 能根据题意得出 $x+3=0$ 或 $\sqrt{x-1}=0$ 是解此题的关键, 注意: 解无理方程一定要进行检验.

13. 已知一个梯形的中位线长为 5 cm , 其中一条底边的长为 6 cm , 那么该梯形的另一条底边的长是 _____ cm .

【答案】 4

【解析】

【分析】 根据梯形中位线定理解答即可.

【详解】 解: 设该梯形的另一条底边的长是 $x\text{ cm}$, 根据题意得: $\frac{1}{2}(x+6)=5$, 解得: $x=4$,

即该梯形的另一条底边的长是 4 cm .

故答案为: 4.

【点睛】 本题考查了梯形中位线定理, 属于基本题目, 熟练掌握该定理是解题关键.

14. 如果一个多边形的各个外角都是 40° , 那么这个多边形的内角和是_____度.

【答案】 1260

【解析】

【分析】 由一个多边形的每个外角都等于 40° , 根据 n 边形的外角和为 360° 计算出多边形的边数 n , 然后根据 n 边形的内角和定理计算即可.

【详解】解：设多边形的边数为 n ，

$\because$ 多边形的每个外角都等于 40° ，

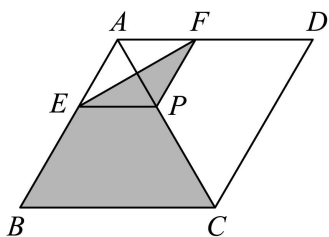
$$\therefore n = 360 \div 40 = 9,$$

$$\therefore \text{这个多边形的内角和} = (9 - 2) \times 180^\circ = 1260^\circ.$$

故答案为：1260.

【点睛】本题考查了 n 边形的内角和定理： n 边形的内角和 $= (n - 2) \cdot 180^\circ$ ；也考查了 n 边形的外角和为 360° 。

15. 如图，菱形 $ABCD$ 的对角线的长分别为12和15， P 是对角线 AC 上任一点（点 P 不与点 A 、 C 重合）且 $PE \parallel BC$ 交 AB 于 E ， $PF \parallel CD$ 交 AD 于 F ，那么阴影部分的面积是_____.

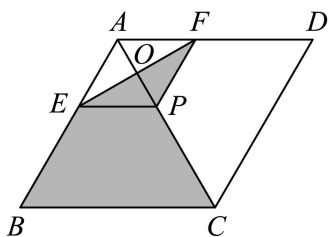


【答案】45

【解析】

【分析】根据题意可得阴影部分的面积等于 $\triangle ABC$ 的面积，因为 $\triangle ABC$ 的面积是菱形面积的一半，根据已知可求得菱形的面积则不难求得阴影部分的面积.

【详解】解：设 AP 与 EF 相交于 O 点.



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形，

$$\therefore BC \parallel AD, AB \parallel CD.$$

$$\because PE \parallel BC, PF \parallel CD,$$

$$\therefore PE \parallel AF, PF \parallel AE.$$

$\therefore$ 四边形 $AEFP$ 是平行四边形.

$$\text{则 } OA = OP, OE = OF, \angle AOE = \angle POF,$$

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle POF (\text{SAS}),$$

$$\therefore S_{\triangle AOE} = S_{\triangle POF},$$

$\therefore$ 阴影部分的面积等于 $\triangle ABC$ 的面积.

$\therefore \triangle ABC$ 的面积等于菱形 $ABCD$ 的面积的一半,

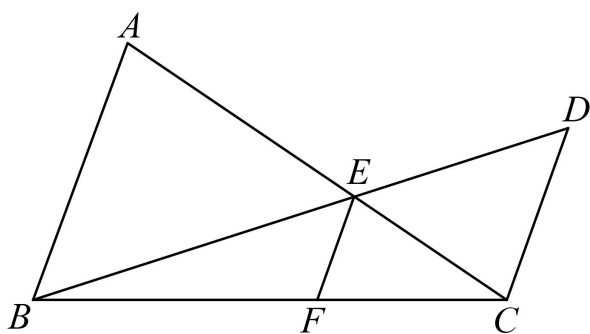
$$\therefore \text{菱形 } ABCD \text{ 的面积} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 90,$$

$\therefore$ 图中阴影部分的面积为 $90 \div 2 = 45$.

故答案为: 45.

【点睛】 本题主要考查了菱形的面积的计算方法, 根据菱形是中心对称图形, 得到阴影部分的面积等于菱形面积的一半是解题的关键.

16. 已知: 如图, $EF \parallel AB \parallel CD$, AC 与 BD 交于点 E , $AB = 9$, $CD = 6$, 那么 $EF =$ _____.



【答案】 $\frac{18}{5}$

【解析】

【分析】 证明 $\triangle CEF \sim \triangle CAB$, $\frac{EF}{AB} = \frac{CF}{CB}$, 同理可得 $\frac{EF}{CD} = \frac{BF}{BC}$, 得到 $\frac{EF}{AB} + \frac{EF}{CD} = 1$, 把已知数据代入计算即可.

【详解】 解: $\because EF \parallel AB$,

$$\therefore \triangle CEF \sim \triangle CAB,$$

$$\therefore \frac{EF}{AB} = \frac{CF}{CB},$$

$$\because EF \parallel CD,$$

$$\therefore \triangle BEF \sim \triangle BDC,$$

$$\therefore \frac{EF}{CD} = \frac{BF}{BC},$$

$$\therefore \frac{EF}{AB} + \frac{EF}{CD} = \frac{CF}{CB} + \frac{BF}{BC} = 1,$$

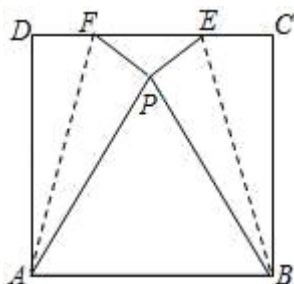
$$\therefore \frac{EF}{9} + \frac{EF}{6} = 1,$$

解得： $EF = \frac{18}{5}$,

故答案为： $\frac{18}{5}$.

【点睛】 本题考查的是相似三角形的判定和性质，掌握相似三角形的判定定理是解题的关键.

17. 如图，将正方形 $ABCD$ 折叠，使点 C 与点 D 重合于正方形内点 P 处，折痕分别为 AF 、 BE ，如果正方形 $ABCD$ 的边长是 2，那么 $\triangle EPF$ 的面积是_____.



【答案】 $7\sqrt{3}-12$

【解析】

【分析】过 P 作 $PH \perp DC$ 于 H ，交 AB 于 G ，由正方形的性质得到 $AD = AB = BC = DC = 2$ ； $\angle D = \angle C = 90^\circ$ ；再根据折叠的性质有 $PA = PB = 2$ ， $\angle FPA = \angle EPB = 90^\circ$ ，可判断 $\triangle PAB$ 为等边三角形，利用等边三角形的性质得到 $\angle APB = 60^\circ$ ， $PG = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \sqrt{3}$ ，于是 $\angle EPF = 120^\circ$ ， $PH = HG - PG = 2 - \sqrt{3}$ ，得 $\angle HEP = 30^\circ$ ，然后根据含 30° 的直角三角形三边可求出 HE ，得到 EF ，最后利用三角形的面积公式计算即可.

【详解】解：过 P 作 $PH \perp DC$ 于 H ，交 AB 于 G ，如图，
则 $PG \perp AB$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$$\therefore AD = AB = BC = DC = 2; \quad \angle D = \angle C = 90^\circ,$$

又 $\because$ 将正方形 $ABCD$ 折叠，使点 C 与点 D 重合于形内点 P 处，

$$\therefore PA = PB = 2, \quad \angle FPA = \angle EPB = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle PAB$ 为等边三角形，

$$\therefore \angle APB = 60^\circ, \quad PG = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle EPF = 120^\circ, \quad PH = HG - PG = 2 - \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle HEP = 30^\circ,$$

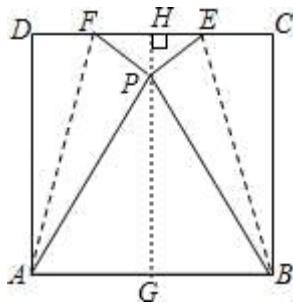
$$\therefore HE = \sqrt{3} PH = \sqrt{3} (2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 3,$$

$$\therefore EF = 2HE = 4\sqrt{3} - 6,$$

$$\therefore \triangle EPF \text{ 的面积} = \frac{1}{2} FE \cdot PH = \frac{1}{2} (2 - \sqrt{3}) (4\sqrt{3} - 6)$$

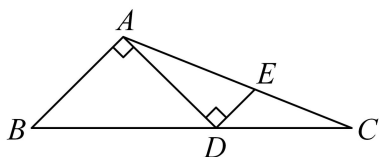
$$= 7\sqrt{3} - 12.$$

故答案为 $7\sqrt{3} - 12$.



【点睛】本题考查了折叠的性质：折叠前后的两图形全等，即对应角相等，对应线段相等．也考查了正方形和等边三角形的性质以及含 30° 的直角三角形三边的关系．

18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 为 BC 边上的一点，且 $AD = AB = 4$ ， $AD \perp AB$ ，过点 D 作 $DE \perp AD$ ， DE 交 AC 于点 E ，如果 $DE = 2$ ，那么 $\triangle ABC$ 的面积为_____.



【答案】16

【解析】

【分析】由题意得到三角形 DEC 与三角形 ABC 相似，由相似三角形面积之比等于相似比的平方求得两三角形面积之比，进而求出四边形 $ABDE$ 与三角形 ABC 面积之比，求出四边形 $ABDE$ 面积，即可确定出三角形 ABC 面积．

【详解】解： $\because AB \perp AD$ ， $AD \perp DE$ ，

$$\therefore \angle BAD = \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\therefore DE \parallel AB,$$

$$\therefore \angle CED = \angle CAB,$$

$$\because \angle C = \angle C,$$

$$\therefore \triangle CED \sim \triangle CAB,$$

$$\because DE = 2, AB = 4, \text{ 即 } DE : AB = 1 : 2,$$

$$\therefore S_{\triangle DEC} : S_{\triangle ACB} = 1:4,$$

$$\therefore S_{ABDE} : S_{\triangle ACB} = 3:4,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABDE} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 + \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 8 + 4 = 12,$$

$$\therefore S_{\triangle ACB} = 16,$$

故答案为：16.

【点睛】此题考查了相似三角形的判定与性质，以及等腰直角三角形，熟练掌握相似三角形的判定与性质是解本题的关键.

三、计算题 (本大题共 1 小题, 共 10.0 分)

19. 解方程: $\frac{x+1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}.$

【答案】 $x=0$

【解析】

【分析】分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解.

【详解】解: $\frac{x+1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x+1},$

方程两边同时乘以 $(x+1)(x-1)$ ，得

$$(x+1)^2 - 2 = x-1,$$

去括号得 $x^2 + 2x + 1 - 2 = x - 1,$

移项得 $x^2 + 2x - x = -1 + 2 - 1,$

合并同类项得 $x^2 + x = 0,$

解得 $x_1 = 0, x_2 = -1,$

检验当 $x = 0$ 时, $(x+1)(x-1) = -1 \neq 0;$

当 $x = -1$ 时, $(x+1)(x-1) = 0$, 是增根, 舍去.

$\therefore$ 原方程的根是 $x = 0.$

【点睛】此题考查了解分式方程，利用了转化的思想，解分式方程注意要检验.

四、解答题 (本大题共 6 小题, 共 68.0 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

20. 解方程组:
$$\begin{cases} x-y=2, \\ x^2-2xy-3y^2=0. \end{cases}$$

【答案】 $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -1 \end{cases} \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 1 \end{cases}$

【解析】

【详解】 $x^2 - 2xy - 3y^2 = 0$

$(x-y)^2 - 4y^2 = 0$

又因： $x-y=2$ 代入上式

$4-4y^2=0$

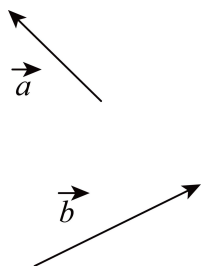
$y=1$ 或 $y=-1$

再将 $y=1$ 、 $y=-1$ 分别代入 $x-y=2$

则 $x=1$ 、 $x=3$

$\therefore \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -1 \end{cases} \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 1 \end{cases}$

21. 如图，已知向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ ，用直尺与圆规先作向量 $\vec{a} + \vec{b}$ ，再作向量 $\vec{a} - \vec{b}$ 。（不写画法，保留画图痕迹，并在答案中注明所求作的向量。

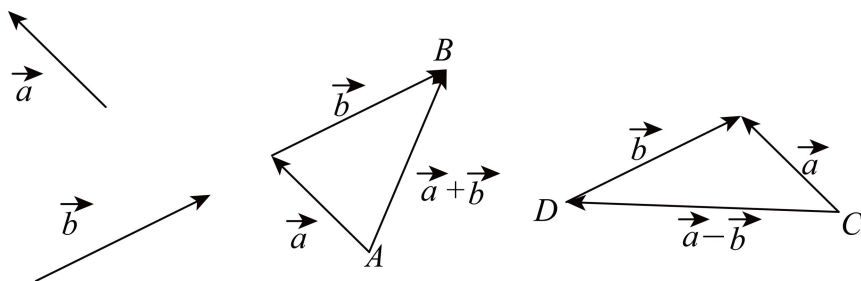


【答案】 图见解析；

【解析】

【分析】 利用三角形法则求解即可。

【详解】 解：如图， $\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$ ， $\overrightarrow{CD} = \vec{a} - \vec{b}$ 。



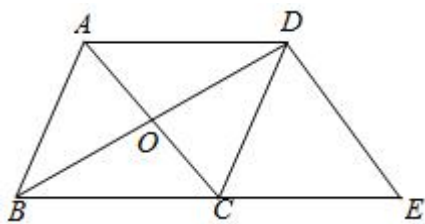
【点睛】 本题考查作图—复杂作图，

平面向量，三角形法则等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型。

22. 已知平行四边形 $ABCD$ ，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，且 $CA=CB$ ，延长 BC 至点 E ，使 $CE=BC$ ，连接 DE 。

(1) 当 $AC \perp BD$ 时, 求证: $BE=2CD$;

(2) 当 $\angle ACB=90^\circ$ 时, 求证: 四边形 $ACED$ 是正方形.



【答案】(1) 见解析; (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据已知条件得到四边形 $ABCD$ 是菱形, 求得 $BC=CD$, 得到 $BE=2BC$, 于是得到结论;

(2) 根据平行四边形的性质得到 $AD=BC$, $AD \parallel BE$, 求得 $AD=CE$, $AD \parallel CE$, 推出平行四边形 $ACED$ 是矩形, 根据正方形的判定定理即可得到结论.

【详解】(1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

又 $\because AC \perp BD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

$\therefore BC=CD$.

又 $\because CE=BC$,

$\therefore BE=2BC$,

$\therefore BE=2CD$;

(2) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD=BC$, $AD \parallel BE$,

又 $\because CE=BC$,

$\therefore AD=CE$, $AD \parallel CE$,

$\therefore$ 四边形 $ACED$ 是平行四边形.

$\because \angle ACB=90^\circ$,

$\therefore$ 平行四边形 $ACED$ 是矩形,

又 $\because CA=CB$,

$\therefore CA=CE$,

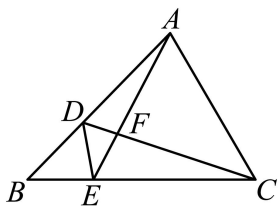
$\therefore$ 矩形 $ACED$ 是正方形.

【点睛】本题考查了正方形的判定, 平行四边形的性质, 菱形的判定和性质, 熟练掌握各定理是解题的关键.

23. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D , E 分别在边 AB , BC 上, $BA \cdot BD = BC \cdot BE$

(1) 求证: $\triangle BDE \sim \triangle BCA$;

(2) 如果 $AE=AC$, 求证: $AC^2=AD \cdot AB$.



【答案】(1)证明见解析;(2)证明见解析.

【解析】

【分析】(1) 由 $BA \cdot BD = BC \cdot BE$ 得 $\frac{BD}{BC} = \frac{BE}{BA}$, 结合 $\angle B = \angle B$, 可证 $\triangle ABC \sim \triangle EBD$;

(2) 先根据 $BA \cdot BD = BC \cdot BE$, $\angle B = \angle B$, 证明 $\triangle BAE \sim \triangle BCD$, 再证明 $\triangle ADC \sim \triangle ACB$, 根据相似三角形的对应边长比例可证明结论.

【详解】(1) 证明: $\because BA \cdot BD = BC \cdot BE$.

$$\therefore \frac{BD}{BC} = \frac{BE}{BA},$$

$$\because \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle BDE \sim \triangle BCA;$$

(2) 证明: $\because BA \cdot BD = BC \cdot BE$.

$$\therefore \frac{BD}{BE} = \frac{BC}{BA},$$

$$\because \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle BAE \sim \triangle BCD,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle BCD,$$

$$\because AE = AC,$$

$$\therefore \angle AEC = \angle ACE,$$

$$\because \angle AEC = \angle B + \angle BAE, \angle ACE = \angle ACD + \angle BCD,$$

$$\therefore \angle B = \angle ACD.$$

$$\because \angle BAC = \angle BAC$$

$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}.$$

【点睛】本题主要考查相似三角形的判定与性质, 熟练掌握两三角形相似的判定方法是解题的关键. 相似三角形的判定方法有: ①对应角相等, 对应边成比例的两个三角形叫做相似三角形; ②平行于三角形一边的直线和其他两边或两边延长线相交, 所构成的三角形与原三角形相似; ③根据两角相等的两个三角形相

似；④两边对应成比例，且夹角相等的两个三角形相似判定即可；⑤三边对应成比例得两个三角形相似.

24. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知一次函数 $y = -\frac{4}{3}x + b$ 的图像与 x 轴、 y 轴分别相交于点 A 、 B ，且与两坐标轴所围成的三角形的面积为 6.

(1) 直接写出点 A 与点 B 的坐标 (用含 b 的代数式表示)；

(2) 求 b 的值；

(3) 如果一次函数 $y = -\frac{4}{3}x + b$ 的图像经过第二、三、四象限，点 C 的坐标为 $(2, m)$ ，其中 $m > 0$ ，试用含 m 的代数式表示 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】 (1) $A(\frac{3}{4}b, 0)$ ； $B(0, b)$ (2) ± 4 (3) $\frac{3}{2}m + 10$

【解析】

【分析】 (1) 由一次函数 $y = -\frac{4}{3}x + b$ 的图象与 x 轴、 y 轴分别相交于点 A 、 B ，令 $y=0$ 求出 x ，得到 A 点坐标；令 $x=0$ ，求出 y ，得到 B 点坐标；

(2) 根据一次函数 $y = -\frac{4}{3}x + b$ 的图象与两坐标轴所围成的三角形的面积为 6 列出方程，即可求出 b 的值；

(3) 根据一次函数 $y = -\frac{4}{3}x + b$ 的图象经过第二、三、四象限，得出 $b=-4$ ，确定 $A(-3, 0)$ ， $B(0, -4)$. 利用待定系数法求出直线 AC 的解析式，再求出 $D(0, \frac{3}{5}m)$ ，那么 $BD = \frac{3}{5}m + 4$ ，再根据 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle DBC}$ ，即可求解.

【详解】 解：(1) $\because$ 一次函数 $y = -\frac{4}{3}x + b$ 的图象与 x 轴、 y 轴分别相交于点 A 、 B ，
 $\therefore$ 当 $y=0$ 时， $-\frac{4}{3}x + b = 0$ ，解得 $x = \frac{3}{4}b$ ，则 $A(\frac{3}{4}b, 0)$ ，
当 $x=0$ 时， $y=b$ ，则 $B(0, b)$ ；
故 $A(\frac{3}{4}b, 0)$ ； $B(0, b)$ ；

$$(2) \because S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{3}{4}b \right| \cdot |b| = 6$$

$$\therefore b^2 = 16,$$

$$\therefore b = \pm 4;$$

(3) $\because$ 函数图像经过二、三、四象限，

$$\therefore b = -4,$$

$$\therefore y = -\frac{4}{3}x - 4.$$

$$\therefore A(-3, 0), B(0, -4).$$

设直线 AC 的解析式为 $y = kx + t$,

$$\text{将 A、C 坐标代入得} \begin{cases} 0 = -3k + t \\ m = 2k + t \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = \frac{m}{5} \\ t = \frac{3}{5}m \end{cases}$$

设直线 AC 与 y 轴交于点 D, 则 $D(0, \frac{3}{5}m)$.

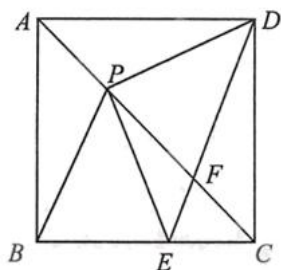
$$\therefore BD = \frac{3}{5}m + 4$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CBD}$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{3}{5}m + 4) \cdot (3 + 2) = \frac{3}{2}m + 10.$$

【点睛】 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征, 三角形的面积, 一次函数的性质, 利用待定系数法求一次函数的解析式.

25. 如图, 点 P 是边长为 2 的正方形 ABCD 对角线 AC 上一个动点 (P 与 A 不重合), 以 P 为圆心, PB 长为半径画圆弧, 交线段 BC 于点 E, 联结 DE, 与 AC 交于点 F. 设 AP 的长为 x, $\triangle PDE$ 的面积为 y.



(1) 判断 $\triangle PDE$ 的形状, 并说明理由;

(2) 求 y 与 x 之间的函数关系式, 并写出定义域;

(3) 当四边形 PBED 是梯形时, 求出 PF 的值.

【答案】 (1) $\triangle PDE$ 为等腰直角三角形, 理由见解析; (2) $y = \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{2}x + 2, (0 < x \leq \sqrt{2})$; (3) $4 - 2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 (1) 先证明 $\triangle ABP \cong \triangle ADP (SAS)$, 再证明四边形 ABGH 是矩形, 再证明 $\triangle DPH \cong \triangle PEG (SAS)$,

可得 $\angle HDP = \angle GPE$, $\angle DPE = 90^\circ$ 即可得 $\triangle PDE$ 为等腰直角三角形.

(2) 由 $PD^2 = DH^2 + PH^2 = x^2 - 2\sqrt{2}x + 4$, $S_{\triangle PDE} = \frac{1}{2}PD \cdot PE = \frac{1}{2}PD^2$, 即可求得 y 与 x 之间的函数关系式.

(3) 因为四边形 $PBED$ 是梯形时, 得 $PB \parallel DE$. 求 PF 的长, 需利用已知条件求 AC, AP, CE 的长, 则 $PF = AC - AP - CF$ 即可得出答案.

【详解】解: (1) $\triangle PDE$ 为等腰直角三角形, 理由如下:

在正方形 $ABCD$ 中, $AD = AB, \angle BAP = \angle DAP - 45^\circ$,

又 $\because AP = AP$,

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle ADP (SAS)$

$\therefore BP = DP$

由题意可得, $PB = PE, \therefore PE = PD$,

过点 P 作 $GH \perp AD$, 与 BC, AD 分别交于点 G, H ,

$\because PB = PE, \therefore BG = GE$

$\because$ 在正方形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$

$\therefore$ 四边形 $ABGH$ 是矩形,

$\therefore AH = BG, AB = GH$

$\therefore AB = GH = AD$

$\because$ 在 $Rt\triangle APH$ 中, $\angle PAH = 45^\circ$,

$\therefore \angle APH = 90^\circ - \angle PAH = 45^\circ$,

$\therefore AH = PH$

$\therefore AH = PH = BG = GE$

$\because PG = GH - PH, DH = AD - AH$,

$\therefore PG = DH$

又 $\because \angle DHP = \angle PGE = 90^\circ$

$\therefore \triangle DPH \cong \triangle PEG (SAS)$

$\therefore \angle HDP = \angle GPE$

$\therefore \angle DPE = 180^\circ - \angle HPD - \angle GPE = 180^\circ - (\angle HPD + \angle HDP) = 90^\circ$

$\therefore \triangle PDE$ 为等腰直角三角形

$$(2) \because \text{在 } Rt\triangle APH \text{ 中, } AP = x, \therefore AH = PH = \frac{\sqrt{2}}{2}x, \therefore DH = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle DPH \text{ 中, } PD^2 = DH^2 + PH^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2 + \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2 = x^2 - 2\sqrt{2}x + 4$$

$\because \triangle PDE$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore S_{\triangle PDE} = \frac{1}{2}PD \cdot PE = \frac{1}{2}PD^2 = \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{2}x + 2, (0 < x \leq \sqrt{2})$$

$$(3) \text{ 在等腰直角三角形 } \triangle PDE \text{ 中, } PD = PE, \angle DPE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PED = \angle PDE = 45^\circ,$$

当四边形 $PBED$ 是梯形时, 只有可能 $PB \parallel DE$, $\therefore \angle PBE = \angle FEC, \angle BPE = \angle PED = 45^\circ$

$$\because PB = PE, \therefore \angle PBE = \angle PEB = \frac{180^\circ - \angle BPE}{2} = 67.5^\circ$$

$$\therefore \angle EFC = 180^\circ - \angle FEC - \angle ACB = 67.5^\circ$$

$$\therefore \angle EFC = \angle FEC, \therefore CE = CF$$

$$\because \angle PFD = \angle EFC = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle DPF = 180^\circ - \angle PDF - \angle PFD = 67.5^\circ$$

$$\therefore \angle CDP = 180^\circ - \angle DPF - \angle PCD = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle CDP = \angle DPF$$

$$\therefore CP = CD$$

$$\therefore AP = x = AC - CP = AC - CD = 2\sqrt{2} - 2$$

$$\therefore EC = BC - BE = BC - 2BG = 2 - \sqrt{2}x = 2\sqrt{2} - 2$$

$$\therefore PF = AC - AP - CF = 4 - 2\sqrt{2}$$

【点睛】 此题考查全等三角形的判定与性质, 函数表达式的求解, 梯形的性质, 解题关键在于综合运用考点, 利用图形与函数的结合求解即可.

免费增值服务介绍



- ✓ 学科网 (<https://www.zxxk.com/>)
致力于提供K12教育资源方服务。
- ✓ 网校通合作校还提供学科网高端社群
出品的《老师请开讲》私享直播课等
增值服务。



扫码关注学科网

每日领取免费资源

回复“ppt”免费领180套PPT模板

回复“天天领券”来抢免费下载券



- ✓ 组卷网 (<https://zujuan.xkw.com>)
是学科网旗下智能题库，拥有小初高全
学科超千万精品试题，提供智能组卷、
拍照选题、作业、考试测评等服务。



扫码关注组卷网

解锁更多功能