

2023 学年第二学期徐汇区学习能力诊断卷

初二数学试卷

(时间 90 分钟 满分 100 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 24 题; 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一. 选择题 (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的】

1. 直线 $y = -2x + 1$ 在 y 轴上的截距是 ()

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图象与坐标轴的交点问题. 解答该题时, 需熟练掌握截距的定义: 与坐标轴交点的纵坐标或横坐标.

根据在 y 轴上的截距是“与 y 轴交点的纵坐标”解答.

【详解】 解: 当 $x = 0$ 时, $y = 1$,

$\therefore$ 所以直线 $y = -2x + 1$ 在 y 轴上的截距是 1.

故选: C.

2. 下列关于 x 的方程中, 其中说法正确的是 ()

- A. 方程 $x^2 + a^3x - 1 = 0$ 是一元三次方程
- B. 方程 $4x^3 + 81 = 0$ 是一元三次方程
- C. 方程 $x = a^2 - 2a - 3$ 是一元二次方程
- D. 方程 $3a + 2x = 5x - \frac{1}{a}$ 是分式方程

【答案】B

【解析】

【分析】 该题主要考查了一元二次方程、分式方程、一元一次方程、一元三次方程的概念, 解题的关键是

熟悉各个方程的概念.

根据方程的概念对选项一一判断即可.

【详解】A. 方程 $x^2 + a^3x - 1 = 0$ 是一元二次方程, 原选项错误, 该选项不符合题意;

B. 方程 $4x^3 + 81 = 0$ 是一元三次方程, 原选项正确, 该选项符合题意;

C. 方程 $x = a^2 - 2a - 3$ 是一元一次方程, 原选项错误, 该选项不符合题意;

D. 方程 $3a + 2x = 5x - \frac{1}{a}$ 是一元一次方程, 原选项错误, 该选项不符合题意;

故选: B.

3. 用换元法解关于 x 的方程 $\frac{3x}{x^2-1} + \frac{x^2-1}{x} = \frac{7}{2}$, 如果设 $\frac{x^2-1}{x} = t$, 那么原方程可化为 ()

A. $2t^2 - 7t + 6 = 0$

B. $2t^2 + 7t - 6 = 0$

C. $t^2 - 7t + 3 = 0$

D. $t^2 + 7t + 3 = 0$

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查了如何用换元法解分式方程, 解题时要注意对方程进行化简.

先把 $\frac{x^2-1}{x} = t$ 代入方程, 在进行化简即可求出结果.

【详解】解: 如果设 $\frac{x^2-1}{x} = t$,

则关于 x 的方程 $\frac{3x}{x^2-1} + \frac{x^2-1}{x} = \frac{7}{2}$ 可化为: $\frac{3}{t} + t = \frac{7}{2}$,

可化为: $2t^2 - 7t + 6 = 0$,

故选: A.

4. 已知关于 x 的一次函数 $y = (k^2 + 1)x + b$, 那么它的图像一定经过 ()

A. 第一、二象限

B. 第一、三象限

C. 第二、三象限

D. 第二、四象限

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的图象性质, $y = kx + b (k \neq 0)$ 的 ($k > 0$) 得出一次函数经过第一、三象限,

据此即可作答.

【详解】解: $\because k^2 + 1 > 0$,

$\therefore$ 关于 x 的一次函数 $y = (k^2 + 1)x + b$ 经过第一、三象限,

故选: B.

5. 下列命题中, 真命题是 ()

A. 若 $|\vec{a}| = 0$, 则 $\vec{a} = 0$

B. 若 $\vec{a} = \vec{0}$ 则 $|\vec{a}| = \vec{0}$

C. 若 $\vec{a} = \vec{0}$, 则 $-\vec{a} = \vec{0}$

D. 若 $\vec{a} = \vec{0}$, 则 $|\vec{-a}| = \vec{0}$

【答案】C

【解析】

【分析】该题主要考查了零向量、向量的模, 解题的关键是掌握以上知识点.

根据零向量、向量的模, 判断即可;

【详解】A. 若 $|\vec{a}| = 0$, 则 $\vec{a} = \vec{0}$, 故原说法是假命题, 该选项不符合题意;

B. 若 $\vec{a} = \vec{0}$, 则 $|\vec{a}| = 0$, 故原说法是假命题, 该选项不符合题意;

C. 若 $\vec{a} = \vec{0}$, 则 $-\vec{a} = \vec{0}$, 故原说法是真命题, 该选项符合题意;

D. 若 $\vec{a} = \vec{0}$, 则 $|\vec{-a}| = 0$, 故原说法是假命题, 该选项不符合题意;

故选: C.

6. 已知四边形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 交于点 O , $AB \parallel CD$, 那么下列命题中错误的是 ()

A. 如果 $AB = CD$, $AC \perp BD$, 那么四边形 $ABCD$ 是菱形 B. 如果 $OB = OD$, $AC \perp BD$, 那么四边形 $ABCD$ 是菱形

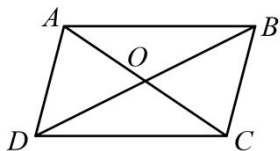
C. 如果 $AB = CD$, $OA = OD$, 那么四边形 $ABCD$ 是矩形 D. 如果 $AD = BC$, $OA = OB$, 那么四边形 $ABCD$ 是矩形

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了命题的真假、菱形的判定、矩形的判定、平行四边形的判定与性质, 全等三角形的判定与性质, 结合菱形的判定、矩形的判定、平行四边形的判定与性质进行逐项分析, 选出错误的一项, 即可作答.

【详解】解: 如图:



$$\because AB = CD, \quad AB \parallel CD$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$$\because AC \perp BD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形

故 A 选项是正确的;

$$\because AB \parallel CD$$

$$\therefore \angle ABO = \angle CDO$$

$$\because OB = OD, \quad \angle AOB = \angle COD$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COD$$

$$\therefore AB = DC$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$$\because AC \perp BD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形

故 B 选项是正确的;

$$\because AB = CD, \quad AB \parallel CD$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$$\because OA = OD$$

$$\therefore AC = BD$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形

故 C 选项是正确的;

$$\because AD = BC, \quad OA = OB,$$

$$\therefore \text{无法证明 } \triangle AOD \cong \triangle BOC$$

$$\therefore \text{无法证明四边形 } ABCD \text{ 是平行四边形}$$

故 D 选项是错误的;

故选: D.

二. 填空题 (本大题共 10 题, 每题 3 分, 满分 30 分)

7. 方程 $x^3 - 8 = 0$ 的根是_____.

【答案】 $x=2$

【解析】

【分析】首先整理方程得出 $x^3=8$ ，进而利用立方根的性质求出 x 的值.

【详解】解： $x^3-8=0$,

$$x^3=8,$$

解得： $x=2$.

故答案为： $x=2$.

【点睛】此题主要考查了立方根的性质，正确由立方根定义求出是解题关键.

8. 方程 $\frac{x}{x-1} = \frac{2}{x^2-1}$ 的解是_____.

【答案】 $x = -2$

【解析】

【分析】本题考查解分式方程，特别注意解分式方程时必须进行检验.

根据解分式方程的步骤解方程即可.

【详解】解：原方程两边同乘 (x^2-1) 得： $x(x+1) = 2$,

$$\text{整理得： } x^2 + x - 2 = 0,$$

$$\text{因式分解得： } (x-1)(x+2) = 0,$$

$$\text{解得： } x_1 = 1, x_2 = -2,$$

将 $x=1$ 代入 (x^2-1) 中可得 $1-1=0$;

将 $x=-2$ 代入 (x^2-1) 中可得 $4-1=3 \neq 0$;

则 $x=1$ 是原方程的增根,

故原分式方程的解为： $x = -2$.

故答案为： $x = -2$.

9. 已知直线 $y = kx + b$ ($k < 0$) 经过点 $(-1, 0)$ ，那么不等式 $kx + b > 0$ 的解集是_____.

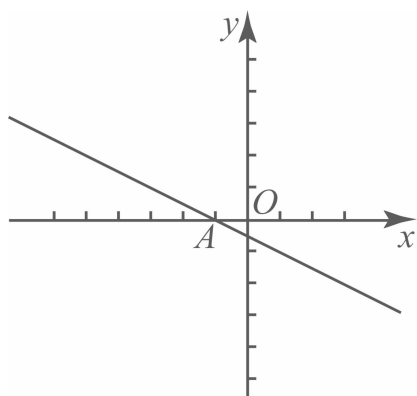
【答案】 $x < -1$

【解析】

【分析】本题考查了一次函数与一元一次不等式的关系：从函数的角度看，就是寻求使一次函数 $y = kx + b$ 的值大于（或小于）0 的自变量 x 的取值范围；从函数图象的角度看，就是确定直线 $y = kx + b$ 在 x 轴上(或下)方部分所有的点的横坐标所构成的集合.

不等式 $kx + b > 0$ 的解集为直线 $y = kx + b$ 落在 x 轴上方的部分对应的 x 的取值范围.

【详解】解：∵直线 $y = kx + b$ ($k < 0$) 经过点 $A(-1, 0)$ ，如图所示，



∴不等式 $kx + b > 0$ 的解集为直线 $y = kx + b$ 落在 x 轴上方的部分对应的 x 的取值范围，

即 $x < -1$ 。

故答案为： $x < -1$ 。

10. 在分别标有 1、2、3、4、6 的五张卡片中随机抽取 2 张卡片，那么抽到的卡片上标的数恰好是一个素数和一个合数概率是_____。

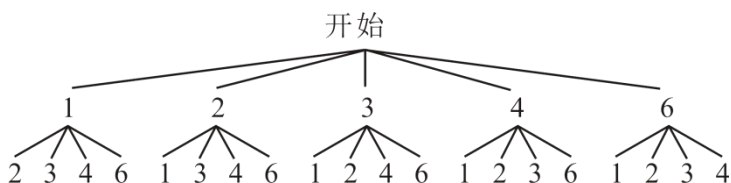
【答案】 $\frac{2}{5}$ 0.4

【解析】

【分析】 本题考查利用列表法或画树状图法求概率。正确列出表格或画出树状图分析出抽到所有可能结果共有 20 种，其中一个是素数一个是合数的共有 8 种是解题的关键。

先画树状图分析出抽到所有可能结果共有 20 种，其中一个是素数一个是合数的共有 8 种，然后由概率公式计算即可。

【详解】解：画树状图为：



由图可得抽到所有可能结果共有 20 种，其中一个是素数一个是合数的共有 8 种，

∴抽到的卡片上标的数恰好是一个素数和一个合数概率为 $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ ，

故答案为： $\frac{2}{5}$ 。

11. 某企业的年产值三年内从 1000 万元增加到 1331 万元，如果这三年中每年的增长率相同，在求这三年中每年的增长率时，如果设这三年中每年的增长率为 x ，那么可以列出的方程是_____。

【答案】 $1000(1+x)^2=1331$

【解析】

【详解】 由于某企业的年产值三年内从 1000 万元增加到 1331 万元，如果这三年中每年的增长率相同，在求这三年中每年的增长率时设这三年中每年的增长率为 x ，那么第二年变为 $1000(1+x)$ ，然后依此类推即可列出方程.

解：∵企业的年产值三年内从 1000 万元增加到 1331 万元，这三年中每年的增长率相同，

∴设这三年中每年的增长率为 x ，那么可以列出的方程是

$$1000(1+x)^2=1331.$$

12. 已知一个多边形的每个内角都是 160° ，则这个多边形的边数是_____.

【答案】 18

【解析】

【分析】 首先计算出多边形的外角的度数，再根据外角和 $\div$ 外角度数=边数可得答案.

【详解】 解：∵多边形每一个内角都等于 160°

∴多边形每一个外角都等于

$$180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$$

$$\therefore \text{边数 } n = 360^\circ \div 20^\circ = 18$$

故答案为：18

【点睛】 此题主要考查了多边形的外角与内角，解题的关键是掌握多边形的外角与它相邻的内角互补，外角和为 360° .

13. 在直角坐标平面内，如果 $ABCD$ 的两条对角线的交点正好与坐标原点重合，已知点 $A(3,2)$ ，那么点 C 的坐标是_____.

【答案】 $(-3,-2)$

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形的性质，点坐标. 熟练掌握平行四边形的性质是解题的关键.

由 $ABCD$ 的两条对角线的交点正好与坐标原点重合，点 $A(3,2)$ ，可得 $C(-3,-2)$.

【详解】 解：∵ $ABCD$ 的两条对角线的交点正好与坐标原点重合，点 $A(3,2)$ ，

∴ $O(0,0)$ 是 AC 的中点，

∴ $C(-3,-2)$ ，

故答案为: $(-3, -2)$.

14. 在矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 交于点 O , 已知 $\angle AOB = 120^\circ$, $AD = \sqrt{3}$, 那么 BD 的长是_____.

【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了矩形的性质, 直角三角形的性质, 求出 $\angle OBA = 30^\circ$ 是解题的关键.
由矩形的性质和等腰三角形的性质求出 $\angle OBA = 30^\circ$, 在由直角三角形的性质即可求解.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

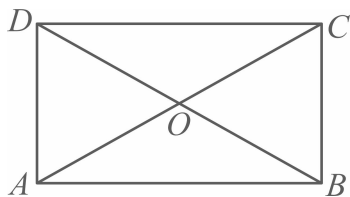
$\therefore AC = BD, AO = BO = OD, \angle DAB = 90^\circ$,

$\because \angle AOB = 120^\circ$,

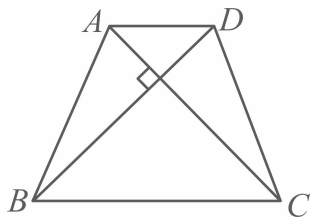
$\therefore \angle OAB = \angle OBA = 30^\circ$,

$\therefore BD = 2AD = 2\sqrt{3}$,

故答案为: $2\sqrt{3}$.



15. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AC \perp BD$, 已知 $AC = m$, $BD = n$, 那么梯形 $ABCD$ 的中位线长是_____ (用含 m, n 的式子表示).



【答案】 $\frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2}$

【解析】

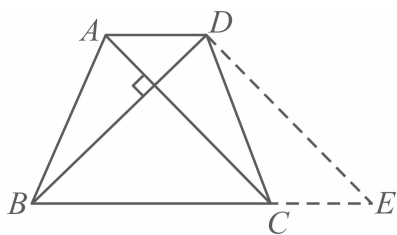
【分析】 本题考查平行四边形的判定与性质, 梯形中位线性质, 勾股定理, 正确作出辅助线构造平行四边形是解题的关键.

过点 D 作 $DE \parallel AC$ 交 BC 于 E , 证明四边形 $ACED$ 是平行四边形, 得到 $AD = CE$, $DE = AC = m$, 再

证明 $\angle BDE = 90^\circ$, 然后由勾股定理, 求得 $BE = \sqrt{m^2 + n^2}$, 从而求得 $AD + BC = CE + BC = BE = \sqrt{m^2 + n^2}$,

然后由梯形的中位线定理求解即可.

【详解】解：过点 D 作 $DE \parallel AC$ 交 BC 于 E ，如图，



$$\therefore AD \parallel BC, DE \parallel AC,$$

$\therefore$ 四边形 $ACED$ 是平行四边形，

$$\therefore AD = CE, DE = AC = m,$$

$$\therefore AC \perp BD, DE \parallel AC,$$

$$\therefore DE \perp BD,$$

$$\therefore \angle BDE = 90^\circ,$$

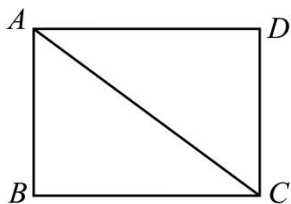
由勾股定理，得 $BE = \sqrt{CE^2 + BD^2} = \sqrt{m^2 + n^2}$ ，

$$\therefore AD + BC = CE + BC = BE = \sqrt{m^2 + n^2},$$

$$\therefore \text{梯形 } ABCD \text{ 的中位线长} = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2},$$

故答案为： $\frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2}$.

16. 如图， AC 是矩形 $ABCD$ 的对角线，已知 $AB = 6$ ， $AC = 10$ ，点 E 在边 BC 上，将矩形 $ABCD$ 沿直线 AE 翻折，如果点 B 恰好落在对角线 AC 上，那么 CE 的长是_____.



【答案】 5

【解析】

【分析】 本题考查矩形折叠问题，勾股定理，熟练掌握矩形与折叠的性质是解题的关键.

先由勾股定理，求得 $BC = 8$ ，再根据折叠的性质得 $AB' = AB = 6$ ， $BE = B'E$ ， $\angle AB'E = \angle CB'E = \angle B = 90^\circ$ ，

设 $BE = B'E = x$ ，则 $CE = 8 - x$ ，在 $\text{Rt}\triangle CB'E$ 中由勾股定理，得 $4^2 + x^2 = (8 - x)^2$ ，解之即可求得 x 值，

从而求解.

【详解】解：如图，设点 B 恰好落在对角线 AC 上的点为 B' ，

解得, $x_1 = 2$, $x_2 = 6$,

检验, 当 $x = 2$ 时, $x + \sqrt{2x-3} = 3$, 当 $x = 6$ 时, $x + \sqrt{2x-3} = 9 \neq 3$,

$\therefore$ 方程的解为 $x = 2$.

18. 解方程组:
$$\begin{cases} x^2 + 4xy + 4y^2 = 9 \\ x^2 + xy = 0 \end{cases}.$$

【答案】 $\begin{cases} x=0 \\ y=1.5 \end{cases}, \begin{cases} x=-3 \\ y=3 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ y=-1.5 \end{cases}, \begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases}.$

【解析】

【分析】 先把原方程组的每个方程化简, 这样原方程组转化成四个方程组, 求出每个方程组的解即可.

【详解】
$$\begin{cases} x^2 + 4xy + 4y^2 = 9 \text{ ①} \\ x^2 + xy = 0 \text{ ②} \end{cases}$$

由①得: $(x+2y)^2 = 9$,

$$x+2y = \pm 3,$$

由②得: $x(x+y) = 0$,

$$x = 0, x+y = 0,$$

即原方程组化为: $\begin{cases} x+2y=3 \\ x=0 \end{cases}, \begin{cases} x+2y=3 \\ x+y=0 \end{cases}, \begin{cases} x+2y=-3 \\ x=0 \end{cases}, \begin{cases} x+2y=-3 \\ x+y=0 \end{cases},$

解得: $\begin{cases} x=0 \\ y=1.5 \end{cases}, \begin{cases} x=-3 \\ y=3 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ y=-1.5 \end{cases}, \begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases},$

所以原方程组的解为: $\begin{cases} x=0 \\ y=1.5 \end{cases}, \begin{cases} x=-3 \\ y=3 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ y=-1.5 \end{cases}, \begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases}.$

【点睛】 本题考查了解二元一次方程组和解高次方程组, 能把高次方程组转化成二元一次方程组是解此题的关键.

19. 某街道因路面经常严重积水, 需改建排水系统, 市政公司准备安排甲乙两个工程队承接这项工程, 据评估, 如果甲乙两队合作施工, 那么 12 天可完成; 如果甲队先做 10 天, 剩下的工程由乙队单独承担, 还需 15 天完工. 求甲乙两队单独完成此项工程各需要多少天?

【答案】 甲乙两队单独完成此项工程分别需要 20 天和 30 天.

【解析】

【分析】 此题考查了分式方程的应用, 正确理解题意找准等量关系列出方程是解答此题的关键.

设甲乙两队单独完成此项工程分别需要 x 天和 y 天. 根据“甲乙两个工程队合作施工 12 天可以完成”工程,

可得等量关系：甲队 12 天的工作量 + 乙队 12 天的工作量 = 该项工程总量。根据“甲队先做 10 天后，剩下的工程由乙队单独承担，还需 15 天才能完工”，可得等量关系：甲队 10 天的工作量 + 乙队 15 天的工作量 = 该项工程总量。据此列方程组求解即可。

【详解】解：设甲乙两队单独完成此项工程分别需要 x 天和 y 天。根据题意，可列出方程组：

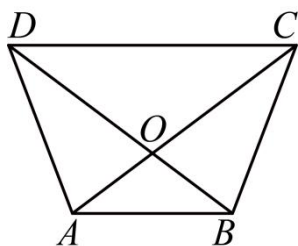
$$\begin{cases} \frac{12}{x} + \frac{12}{y} = 1 \\ \frac{10}{x} + \frac{15}{y} = 1 \end{cases},$$

解得： $\begin{cases} x = 20 \\ y = 30 \end{cases}$,

经检验 $\begin{cases} x = 20 \\ y = 30 \end{cases}$ 是原方程组的解，且符合题意，

答：甲乙两队单独完成此项工程分别需要 20 天和 30 天。

20. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， AC 与 BD 交于点 O ，且 $OD = OC$ 。



(1) 求证： $AD = BC$ ；

(2) 设 $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ，当 $CD = 2AB$ 时，试用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AC}$ 。

【答案】(1) 见详解 (2) $\overrightarrow{AC} = 2\vec{b} - \vec{a}$

【解析】

【分析】本题考查平面向量、全等三角形的判定与性质，

(1) 由题意可得 $\triangle AOD \cong \triangle BOC$ ，根据对应边相等可得答案。

(2) 由题意得， $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB} = 2\vec{b}$ ， $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ ，进而可得答案。

【小问 1 详解】

证明： $\because AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle CDO = \angle ABO$ ， $\angle BAO = \angle DCO$ ，

$\because OD = OC$

$\therefore \angle CDO = \angle DCO$

$$\therefore \angle ABO = \angle BAO$$

$$\therefore AO = OB$$

$$\therefore \angle AOD = \angle BOC$$

$$\therefore \triangle AOD \cong \triangle BOC,$$

$$\therefore AD = BC.$$

【小问 2 详解】

$$\therefore AB \parallel CD, CD = 2AB, \overrightarrow{AB} = \vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB} = 2\vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA} = \vec{a}$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = 2\vec{b} - \vec{a}$$

21. 某小区为美化小区环境, 购买了两种规格的桂花树苗进行栽种, 其中 A 种桂花树苗的价格为每株 75 元, B 种桂花树苗的价格为每株 100 元, 如果购买这两种桂花树苗共 45 株, 其中 A 种桂花树苗的数量不超过 B 种桂花树苗数量的 2 倍. 设购买 A 种桂花树苗 x 株, 购买 A 、 B 两种桂花树苗的总费用是 y 元.

(1) 求 y 关于 x 的函数关系式;

(2) 根据 (1) 的结论, 请你设计一种最省钱的购买方案, 并求出此种方案的总费用.

【答案】(1) y 与 x 的函数关系式为 $y = -25x + 4500$

(2) 购买 A 种树苗 30 棵; B 种树苗 15 棵时费用最少, 最少费用为 3750 元

【解析】

【分析】本题考查一次函数的应用、一元一次不等式的应用, 解答本题的关键是明确题意, 利用一次函数的性质和不等式的性质解答.

(1) 根据题意, 可以写出 y 与 x 的函数关系式;

(2) 根据购买 A 种树苗的数量不少于 B 种树苗的数量的 2 倍, 可以求得 x 的取值范围, 然后根据一次函数的性质, 即可得到最少的购买方案和此时的费用.

【小问 1 详解】

解: 由题意可得, $y = 75x + 100(45 - x) = -25x + 4500$

即 y 与 x 的函数关系式为 $y = -25x + 4500$;

【小问 2 详解】

$\therefore$ 购买 A 种树苗的数量不超过 B 种树苗的数量的 2 倍,

$$\therefore x \leq 2(45 - x),$$

解得, $x \leq 30$,

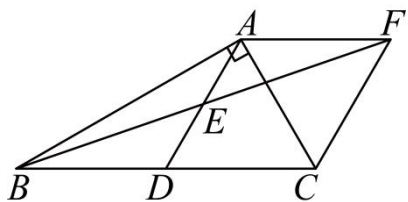
$$\because y = -25x + 4500, k = -25 < 0,$$

$\therefore y$ 随 x 的增大而减小,

$$\therefore \text{当 } x = 30 \text{ 时, } y \text{ 有最小值, 此时 } y = 30 \times (-25) + 4500 = 3750, 45 - x = 15,$$

答: 购买 A 种树苗 30 棵; B 种树苗 15 棵时费用最少, 最少费用为 3750 元.

22. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, AD 是斜边 BC 上的中线, 点 E 是 AD 的中点, 过 A 作 $AF \parallel BC$ 交 BE 的延长线于点 F , 连结 CF .



(1) 求证: 四边形 $ADCF$ 是菱形;

(2) 如果 $AC = 6$, 四边形 $ADCF$ 的面积是 30, 求 AB 的长.

【答案】 (1) 见详解 (2) $AB = 10$

【解析】

【分析】 本题考查了斜边上的中线等于斜边的一半、菱形的判定与性质、平行四边形的判定与性质, 全等三角形的判定与性质, 正确掌握相关性质内容是解题的关键.

(1) 先证明 $\triangle AEF \cong \triangle DEB$, 得 $AF = BE$, 结合斜边上的中线等于斜边的一半, 得出 $AF = DC$, 因为 $AF \parallel BC$, 证明四边形 $ADCF$ 是平行四边形, 因为 $AD = DC$, 所以证明四边形 $ADCF$ 是菱形;

(2) 先证明四边形 $ABDF$ 是平行四边形, 得出 $AB = DF$, 由四边形 $ADCF$ 是菱形, 得出 $\frac{1}{2} AC \times DF = 30$, 把 $AC = 6$ 代入计算, 即可作答.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 点 E 是 AD 的中点,

$$\therefore AE = DE,$$

$$\because AF \parallel BC,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle DBE,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle DEB,$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle DEB,$$

$$\therefore AF = BE,$$

$\because \angle BAC = 90^\circ$, AD 是斜边 BC 上的中线,

$\therefore AD = DB = CD$,

$\therefore AF = DC$,

$\therefore AF \parallel BC$,

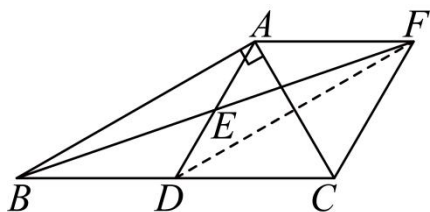
$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是平行四边形,

$\therefore AD = DC$,

$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是菱形;

【小问 2 详解】

解: 连接 DF , 如图所示:



由 (1) 知 $AF = BC$

$\therefore AF \parallel BC$

$\therefore$ 四边形 $ABDF$ 是平行四边形,

$\therefore AB = DF$

$\because$ 四边形 $ADCF$ 是菱形

$\therefore AC \perp BD$

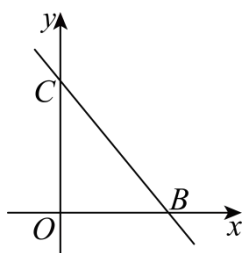
$\because AC = 6$, 菱形 $ADCF$ 的面积是 30,

$$\therefore \frac{1}{2} AC \times DF = \frac{1}{2} \times 6 \times DF = 30$$

$\therefore DF = 10$

$\therefore AB = DF = 10$.

23. 在平面直角坐标系中, 已知直线 $y = kx - k$ ($k < 0$) 经过定点 P .



(1) 求点 P 的坐标;

(2) 一次函数 $y = -\frac{4}{3}x + 4$ 的图像分别与 x 轴、 y 轴交于点 B 、 C (如图), 如果直线 $y = kx - k (k \neq 0)$ 将 $\triangle BOC$ 的面积平分, 求 k 的值;

(3) 在 (2) 的条件下, 将直线 $y = kx - k (k \neq 0)$ 向上平移 2 个单位后得到直线 l , 点 A 是直线 l 上的点, 如果 $AO = AC$, 求点 A 的坐标.

【答案】 (1) $(1, 0)$

(2) $k = -12$

(3) $(1, 2)$

【解析】

【分析】 (1) $x = 1$ 代入 $y = kx - k$, 求得 $y = 0$, 即可求解;

(2) 先求出直线 $y = -\frac{4}{3}x + 4$ 与坐标轴的交点坐标: $B(3, 0)$, $C(0, 4)$, 从而求得 $S_{\triangle BOC} = 6$,

$PB = OB - OP = 2$, 不规则设直线 $y = kx - k (k < 0)$ 与直线 $y = -\frac{4}{3}x + 4$ 相交于 $D(x, kx - k)$, 根据

$S_{\triangle BPD} = \frac{1}{2} S_{\triangle BOC} = 3$, 则 $\frac{1}{2} \times 2(kx - k) = 3$, 解得: $x = \frac{k+3}{k}$,

把 $D(x, kx - k)$ 代入 $y = -\frac{4}{3}x + 4$, 得 $-\frac{4}{3}x + 4 = kx - k$, 则有 $-\frac{4}{3} \times \frac{k+3}{k} + 4 = k \cdot \frac{k+3}{k} - k$, 解之即可求得 k 值.

(3) 先根据平移性质求得直线 l 解析式为 $y = -12x + 14$, 过点 A 作 $AE \perp y$ 于 E , 根据等腰三角形的性质求得 $OE = \frac{1}{2} OC = 2$, 则点 A 的纵坐标为 2, 把 $y = 2$ 代入 $y = -12x + 14$, 得 $2 = -12x + 14$, 解得: $x = 1$, 即可得出点 A 坐标.

【小问 1 详解】

解: 把 $x = 1$ 代入 $y = kx - k$, 得 $y = k - k = 0$,

$\therefore$ 直线 $y = kx - k (k < 0)$ 经过定点 $P(1, 0)$.

【小问 2 详解】

解: 令 $x = 0$, 则 $y = 4$,

$\therefore C(0, 4)$,

$\therefore OC = 4$,

令 $y = 0$, 则 $-\frac{4}{3}x + 4 = 0$, 解得: $x = 3$,

$\therefore B(3, 0)$,

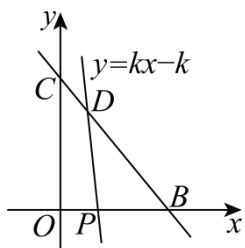
$$\therefore OB=3,$$

$$\therefore S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2}OB \cdot OC = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6,$$

$$\therefore P(1,0),$$

$$\therefore PB=OB-OP=2,$$

设直线 $y=kx-k$ ($k < 0$) 与直线 $y=-\frac{4}{3}x+4$ 相交于 $D(x, kx-k)$, 如图,



$\therefore$ 直线 $y=kx-k$ ($k \neq 0$) 将 $\triangle BOC$ 的面积平分,

$$\therefore S_{\triangle BPD} = \frac{1}{2}S_{\triangle BOC} = 3$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 2(kx-k) = 3,$$

$$\text{解得: } x = \frac{k+3}{k},$$

把 $D(x, kx-k)$ 代入 $y=-\frac{4}{3}x+4$, 得 $-\frac{4}{3}x+4=kx-k$,

$$\therefore -\frac{4}{3} \times \frac{k+3}{k} + 4 = k \cdot \frac{k+3}{k} - k,$$

解得: $k=-12$.

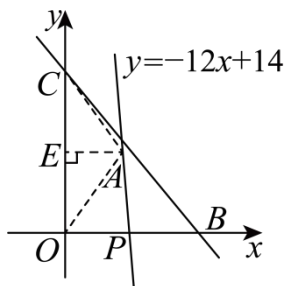
【小问 3 详解】

解: 由 (2) 知: $y=-12x+12$,

直线 $y=-12x+12$ 向上平移 2 个单位后得到直线 l ,

则直线 l 解析式为 $y=-12x+14$,

如图, 过点 A 作 $AE \perp y$ 于 E ,



$\therefore OA=AC$, $AE \perp y$,

$$\therefore OE = \frac{1}{2}OC = 2$$

$\therefore$ 点 A 的纵坐标为 2,

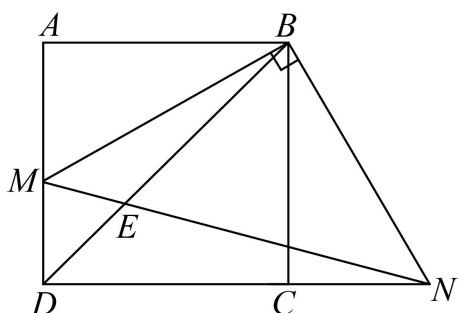
把 $y = 2$ 代入 $y = -12x + 14$, 得 $2 = -12x + 14$,

解得: $x = 1$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(1, 2)$.

【点睛】 本题考查待定系数法求一次函数解析式, 两直线交点, 坐标与图形, 直线与坐标围成三角形面积, 一次函数图象平移, 等腰三角形的性质. 熟练掌握一次函数图象性质是解题的关键.

24. 如图, 点 M 是正方形 $ABCD$ 的边 AD 上的一点, 过点 B 作 $BN \perp BM$ 交 DC 的延长线于点 N , 连接 MN 交 BD 于点 E .



(1) 求 $\angle BMN$ 的大小;

(2) 如果 $\angle ABM = 2\angle DNM$, 求证: $EN = ME + BE$;

(3) 如果 $AB = 1$, 当 $\angle DBN = \angle DNB$ 时, 求 DM 的长.

【答案】 (1) $\angle BMN = 45^\circ$;

(2) 见解析 (3) $DM = 2 - \sqrt{2}$.

【解析】

【分析】 (1) 利用等角的余角相等求得 $\angle ABM = \angle CBN$, 证明 $\triangle ABM \cong \triangle CBN$ (ASA), 可证明 $BM = BN$, 可求得 $\triangle BMN$ 是等腰直角三角形, 据此即可求解;

(2) 在 EN 上截取点 F , 使 $EF = EB$, 连接 BF , 证明 $\triangle BEF$ 是等边三角形, 再证明 $\triangle BEM \cong \triangle BFN$ (AAS), 据此即可证明 $EN = ME + BE$;

(3) 由已知结合 $\triangle ABM \cong \triangle CBN$, 证明 BM 是 $\angle ABD$ 的角平分线, 作 $MG \perp BD$ 于点 G , 据此求解即可.

【小问 1 详解】

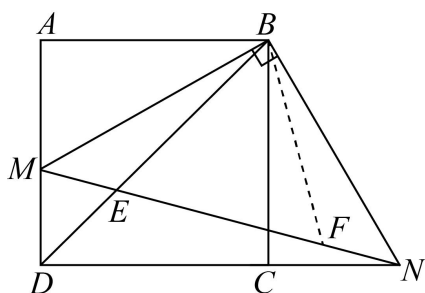
解: $\because$ 正方形 $ABCD$,

$\therefore AB = BC$, $\angle A = \angle BCD = \angle BCN = 90^\circ$,

$\because BN \perp BM$,
 $\therefore \angle MBN = 90^\circ$,
 $\therefore \angle ABM = 90^\circ - \angle MBC = \angle CBN$,
 $\therefore \triangle ABM \cong \triangle CBN (\text{ASA})$,
 $\therefore BM = BN$,
 $\therefore \triangle BMN$ 是等腰直角三角形,
 $\therefore \angle BMN = 45^\circ$;

【小问 2 详解】

解：在 EN 上截取点 F ，使 $EF = EB$ ，连接 BF ，



由 (1) 知 $\triangle ABM \cong \triangle CBN$,
 $\therefore \angle AMB = \angle CNB$, $\angle BMN = \angle BNM = \angle BDM = 45^\circ$,
 $\therefore \angle DBM = \angle AMB - 45^\circ = \angle CNB - 45^\circ = \angle DNM$,
 $\therefore \angle ABM = 2\angle DNM$,
 $\therefore \angle ABM = 2\angle DBM$,
 $\therefore \angle ABM + \angle DBM = 45^\circ$,
 $\therefore \angle DBM = \angle DNM = 15^\circ$,
 $\therefore \angle BEN = \angle BDN + \angle DNM = 60^\circ$,
 $\therefore \triangle BEF$ 是等边三角形,
 $\therefore BE = BF$, $\angle BEM = \angle BFN = 120^\circ$,
 $\therefore \angle BMN = \angle BNM = 45^\circ$,
 $\therefore \triangle BEM \cong \triangle BFN (\text{AAS})$,
 $\therefore ME = FN$,
 $\therefore EN = FN + EF = ME + BE$;

【小问 3 详解】

解：由 (1) 知 $\triangle ABM \cong \triangle CBN$,

$$\therefore \angle ABM = \angle CBN,$$

$\because$ 正方形 $ABCD$,

$$\therefore \angle ABD = \angle CDB = \angle CBD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DBN = \angle DNB,$$

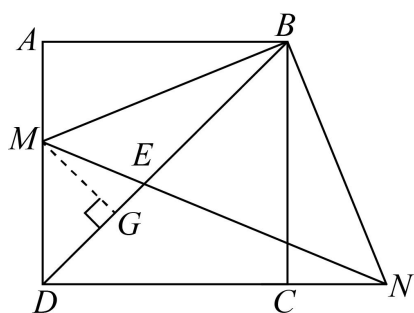
$$\therefore \angle DBN = \angle DNB = \frac{1}{2}(180^\circ - 45^\circ) = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle ABM = \angle CBN = 67.5^\circ - 45^\circ = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle DBM = 45^\circ - 22.5^\circ = 22.5^\circ = \angle ABM,$$

即 BM 是 $\angle ABD$ 的角平分线,

作 $MG \perp BD$ 于点 G ,



则 $AM = MG$,

$$\therefore BM = BM, \angle BMA = \angle BMG = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BMA \cong \text{Rt}\triangle BMG (\text{HL}),$$

$$\therefore BG = AB = 1,$$

$$\because \text{正方形 } ABCD, AB = 1,$$

$$\therefore BD = \sqrt{2}, \angle MDG = 45^\circ,$$

$$\therefore DG = \sqrt{2} - 1, \triangle GMD \text{ 是等腰直角三角形},$$

$$\therefore DM = \sqrt{2}DG = 2 - \sqrt{2}.$$

【点睛】 本题考查了正方形的性质，全等三角形的判定和性质，等边三角形的判定和性质，等腰直角三角形的判定和性质，勾股定理，正确引出辅助线解决问题是解题的关键.