

上海市杨浦区 2023-2024 学年八年级下学期数学期末考试试卷

(测试时间 90 分钟, 满分 100 分)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列函数中, 一次函数的是 ()

A. $y = 2$

B. $y = 2x$

C. $y = \frac{2}{x}$

D. $y = kx + 2$ (k 为常数)

【答案】B

【解析】

【分析】此题主要考查了一次函数定义, 关键是掌握形如 $y = kx + b$ ($k \neq 0$, k 、 b 是常数) 的函数, 叫做一次函数. 利用一次函数定义进行解答即可.

【详解】解: A、 $y = 2$ 不是一次函数, 故此选项不符合题意;

B、 $y = 2x$ 是一次函数, 故此选项符合题意;

C、 $y = \frac{2}{x}$ 不是一次函数, 故此选项不符合题意;

D、当 $k = 0$ 时, $y = kx + 2$ (k 为常数) 不是一次函数, 故此选项不合题意;

故选: B.

2. 下列方程中, 有实数根的方程是 ()

A. $\frac{1}{x^2} = 0$

B. $\sqrt{x} + 1 = 0$

C. $x^2 + 1 = 0$

D. $x^3 + 1 = 0$

【答案】D

【解析】

【分析】利用分式的意义可对 A 进行判断; 通过算术平方根的概念可对 B 进行判断; 通过乘方的意义可对 C, D 进行判断.

【详解】解: A. 根据分式的意义, x 为非零数时 $\frac{1}{x^2} \neq 0$, 故选项 A 中的方程无实数根;

B. $\sqrt{x} \geq 0, \sqrt{x} + 1 > 0$, 原方程没有实数解;

C. $x^2 \geq 0, x^2 + 1 > 0$, 原方程没有实数解;

D. 移项得, $x^3 = -1$, 两边开立方得, $x = -1$, 故方程的解为 $x = -1$;

故选: D.

【点睛】本题考查了无理方程: 解无理方程的基本思想是把无理方程转化为有理方程来解, 在变形时要注意

意根据方程的结构特征选择解题方法. 用乘方法 (即将方程两边各自乘同次方来消去方程中的根号) 来解无理方程, 往往会产生增根, 应注意验根.

3. 下列关于向量的等式中, 正确的是 ()

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = 0$ B. $|\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{BA}| = 0$ C. $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BA}| = 0$ D. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}| = \vec{0}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据向量的模的定义, 以及零向量的定义, 逐项分析判断即可求解.

【详解】解: A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$, 故该选项不正确, 不符合题意;

B. $|\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{BA}| = 0$, 故该选项正确, 符合题意;

C. $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BA}| \neq 0$, 故该选项不正确, 不符合题意;

D. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}| \neq \vec{0}$, 故该选项不正确, 不符合题意;

故选: B.

【点睛】本题考查了向量的模的定义, 以及零向量的定义, 熟练掌握平面向量的相关定义是解题的关键.

4. 下列事件中, 随机事件的是 ()

- A. 直线 $y = x - 2$ 与直线 $y = 2x + 1$ 有公共点 B. 10 位学生分 3 组, 至少有一组人数超过 3
C. 任取一个实数, 它的平方小于零 D. 掷一次骰子, 向上的一面是 6 点

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查的是必然事件、不可能事件、随机事件的概念. 必然事件指在一定条件下, 一定发生的事件. 不可能事件是指在一定条件下, 一定不发生的事件, 不确定事件即随机事件是指在一定条件下, 可能发生也可能不发生的事件. 根据事件发生的可能性大小判断.

【详解】解: A、直线 $y = x - 2$ 与直线 $y = 2x + 1$ 不平行, 所以它们有公共点, 是必然事件, 不符合题意;

B、10 位学生分 3 组, 至少有一组人数超过 3, 是必然事件, 不符合题意;

C、任取一个实数, 它的平方小于零, 是不可能事件, 不符合题意;

D、掷一次骰子, 向上的一面是 6 点, 是随机事件, 符合题意;

故选: D.

5. 下列命题中, 正确的是 ()

- A. 对角线互相垂直的四边形是菱形 B. 对角线互相垂直的菱形是正方形

C. 对角线相等的平行四边形是矩形

D. 对角线相等的平行四边形是正方形

【答案】 C

【解析】

【分析】 此题考查了矩形、菱形、正方形的判定，利用特殊四边形的判定方法进行判断即可.

【详解】 解： A. 对角线互相垂直平分的四边形是菱形，故选项错误，不符合题意；

B. 对角线相等的菱形是正方形，故选项错误，不符合题意；

C. 对角线相等的平行四边形是矩形，故选项正确，符合题意；

D. 对角线垂直相等的平行四边形是正方形,故选项错误，不符合题意.

故选： C.

6. 上海市 16 个区共约 1326 条健身步道和绿道，甲、乙两人沿着总长度为 9 千米的“健身步道”行走，甲的速度是乙的 1.5 倍，甲比乙提前 15 分钟走完全程，如果设乙的速度为 x 千米/时，那么下列方程中正确的是（ ）

A. $\frac{9}{x} - \frac{9}{1.5x} = 15$

B. $\frac{9}{1.5x} - \frac{9}{x} = 0.25$

C. $\frac{9}{1.5x} - \frac{9}{x} = 15$

D. $\frac{9}{x} - \frac{9}{1.5x} = 0.25$

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据题意可直接进行求解.

【详解】 解： 由题意得： $\frac{9}{x} - \frac{9}{1.5x} = 0.25$.

故选： D.

【点睛】 本题主要考查分式方程的应用，熟练掌握分式方程的应用是解题的关键.

二、填空题（本大题共 12 题，每题 3 分，满分 36 分）

7. 直线 $y = 2x - 1$ 的截距是_____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 根据截距的定义： 直线 $y = kx + b$ 中， b 就是截距，即可得到答案.

【详解】 解： 令 $x = 0$ ，得 $y = -1$ ，

$\therefore$ 直线 $y = 2x - 1$ 的截距是 -1，

故答案为： -1.

【点睛】 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征及一次函数性质，熟记截距的定义是解题的关键.

8. 方程 $x^3 + 8 = 0$ 的解是_____.

【答案】 $x = -2$

【解析】

【分析】根据等式的性质以及立方根的意义求解即可.

【详解】移项, 得 $x^3 = -8$,

$$\therefore (-2)^3 = -8,$$

$$\therefore x = -2,$$

故答案为: $x = -2$.

【点睛】本题考查了立方根和等式的基本性质, 熟练掌握立方根的意义是解决问题的前提.

9. 方程 $\sqrt{2x-3}=1$ 的解是_____.

【答案】 $x=2$

【解析】

【详解】 $\sqrt{2x-3}=1$, 两边平方得, $2x-3=1$,

解得, $x=2$;

经检验, $x=2$ 是方程的根;

故答案为 $x=2$.

考点: 解无理方程.

10. 方程组 $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$ 的解是_____.

【答案】 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$

【解析】

【分析】根据根与系数的关系, x, y 可看作方程 $t^2 - 5t + 6 = 0$ 的两根, 利用因式分解法求得 $t_1 = 2, t_2 = 3$,

$$\text{则} \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}.$$

【详解】解: 根据题意 x, y 可看作方程 $t^2 - 5t + 6 = 0$ 的两根,

$$(t-2)(t-3)=0,$$

解得 $t_1 = 2, t_2 = 3$,

$$\text{所以} \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}.$$

故答案为 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$.

【点睛】本题考查了解一元二次方程-因式分解法：先把方程的右边化为0，再把左边通过因式分解化为两个一次因式的积的形式，那么这两个因式的值就都有可能为0，这就能得到两个一元一次方程的解，这样也就把原方程进行了降次，把解一元二次方程转化为解一元一次方程的问题了（数学转化思想）.也考查了根与系数的关系.

11. 如果直线 $y = x + m - 1$ 经过第一、三、四象限，那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m < 1$

【解析】

【分析】本题考查一次函数的性质、一次函数的图象与系数的关系，能得出关于 m 的不等式是解题的关键. 根据已知条件和一次函数的性质得出不等式，求出不等式的解集即可.

【详解】解：∵ 直线 $y = x + m - 1$ 经过第一、三、四象限，

$$\therefore m - 1 < 0,$$

$$\therefore m < 1,$$

故答案为： $m < 1$.

12. 已知方程 $\frac{x}{x^2-1} + \frac{x^2-1}{x} = 3$ ，如果设 $y = \frac{x}{x^2-1}$ ，那么原方程转化为关于 y 的整式方程为_____.

【答案】 $y^2 - 3y + 1 = 0$

【解析】

【分析】根据换元法即可求解.

【详解】解：方程 $\frac{x}{x^2-1} + \frac{x^2-1}{x} = 3$ ，如果设 $y = \frac{x}{x^2-1}$ ，

$$\therefore y + \frac{1}{y} = 3$$

$$\text{即 } y^2 - 3y + 1 = 0,$$

故答案为： $y^2 - 3y + 1 = 0$.

【点睛】本题考查了换元法解分式方程，熟练掌握换元法是解题的关键.

13. 在四张完全相同的卡片上分别印有平行四边形、矩形、菱形、等腰梯形的图案，现将印有图案的一面朝下，混合后从中随机抽取一张，那么抽到卡片上印有的图案是中心对称图形的概率为_____.

【答案】 $\frac{3}{4}$

【解析】

【分析】 本题考查了中心对称图形，概率的求法，掌握概率公式：概率等于所求情况数与总情况数之比是解题关键；直接利用概率公式计算即可.

【详解】 解：4个图案中，中心对称图形的有3个，分别是平行四边形、矩形、菱形，

$\therefore$ 抽到的卡片上印有的图案是中心对称图形的概率是 $\frac{3}{4}$ ，

故答案为： $\frac{3}{4}$

14. 某种型号电视机经过连续两次降价，每台售价由原来1500元降到980元，设平均每次降价的百分率为 x ，那么可列方程为_____.

【答案】 $1500(1-x)^2 = 980$

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程的应用，解题关键是掌握增长率的知识. 先表示第一次降价后商品的售价，再根据题意表示第二次降价后的售价，即可列出方程.

【详解】 解：根据题意，可列方程为 $1500(1-x)^2 = 980$.

故答案为： $1500(1-x)^2 = 980$.

15. 一个多边形的内角和是 1080° ，这个多边形的边数是_____.

【答案】 8

【解析】

【分析】 本题主要考查多边形内角和，熟练掌握多边形内角和公式是解题的关键；因此此题可根据多边形内角和公式 $(n-2) \times 180^\circ$ 进行求解即可.

【详解】 解：由题意得： $(n-2) \times 180^\circ = 1080^\circ$ ，

$\therefore n = 8$ ；

故答案为 8.

16. 如果一个等腰梯形的周长为50厘米，一条腰长为12厘米，那么这个梯形的中位线长为_____厘米.

【答案】 13

【解析】

【分析】 根据梯形的周长公式列式进行计算即可得到两底的和，再根据梯形的中位线等于两底和的一半求出中位线的长即可.

【详解】 $\because$ 等腰梯形的周长为 50 厘米，一条腰长为 12 厘米，

$\therefore$ 两底的和为 $50 - 12 \times 2 = 26$ (厘米)，

$\therefore$ 这个梯形的中位线长为 $\frac{1}{2} \times 26 = 13$ (厘米)，

故答案为：13.

【点睛】本题考查了梯形的中位线等知识点，熟练掌握梯形的中位线求法是解题关键.

17. 已知直线 $l_1: y_1 = k_1x + b_1$ 与直线 $l_2: y_2 = k_2x + b_2$ ，如果满足 $k_1 = b_2$ ， $k_2 = b_1$ ，那么直线 l_1 与直线 l_2 称为“互为交换直线”如果直线 $y = 2x + m$ 与其交换直线分别与 y 轴交于点 A 、 B ，且 $AB = 1$ ，那么 $m =$ _____.

【答案】1或3

【解析】

【分析】根据新定义得出 $y = 2x + m$ 的交换直线为 $y = mx + 2$ ，得出 $A(0, m)$ ， $B(0, 2)$ ，根据 $AB = 1$ ，即可求解.

【详解】解：依题意， $y = 2x + m$ 的交换直线为 $y = mx + 2$ ，

$y = 2x + m$ 中，当 $x = 0$ 时， $y = m$ ，则 $A(0, m)$ ，

$y = mx + 2$ 中，当 $x = 0$ 时， $y = 2$ ，则 $B(0, 2)$ ，

$\therefore AB = 1$ ，

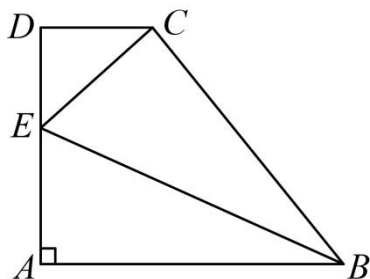
$\therefore m - 2 = 1$ 或 $2 - m = 1$

解得： $m = 3$ 或 $m = 1$ ，

故答案为：1或3.

【点睛】本题考查了求一次函数与坐标轴交点问题，理解新定义是解题的关键.

18. 如图，已知在梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $AD = 4$ ， BE 平分 $\angle ABC$ ，交边 AD 于点 E . 如果 $\triangle BEC$ 是直角三角形，那么 DE 的长为_____.

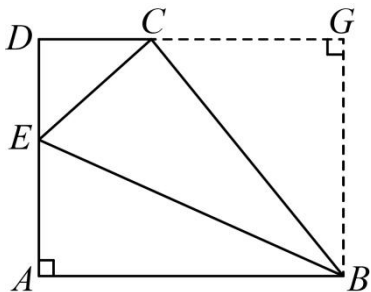


【答案】2 或 $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】过点 B 作 $BG \perp DC$ 交 DC 延长线于点 G ，易得四边形 $ABGD$ 是矩形，得到 $BG = AD = 4, DG = AB = 5$ ，当 $\angle ECB$ 时，根据角平分线的性质得到 $AE = CE$ ，证明 $\text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle CBE$ (HL)，得到 $BC = AB = 5$ ，利用勾股定理求出 $CG = 3$ ，从而得到 $CD = DG - CG = 2$ ，设 $DE = x$ ，则 $AE = 4 - x$ ，由勾股定理得到 $CE^2 = CD^2 + DE^2$ ，即可求解；当 $\angle BEC = 90^\circ$ 时，过点 E 作 $EH \perp BC$ 交 BC 于点 H ，根据角平分线的性质得到 $AE = EH$ ，证明 $\text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle HBE$ (HL)，再证明 $\triangle CDE \cong \triangle CHE$ (AAS)，得到 $DE = EH$ ，进而得到 $DE = AE$ ，即可解答.

【详解】解：如图，过点 B 作 $BG \perp DC$ 交 DC 延长线于点 G ，



$\because AB \parallel CD, AD \perp CD, BG \perp CD,$

$\therefore AD \parallel BG,$

$\therefore$ 四边形 $ABGD$ 是平行四边形,

$\because \angle A = 90^\circ,$

$\therefore$ 四边形 $ABGD$ 是矩形,

$\therefore BG = AD = 4, DG = AB = 5,$

当 $\angle ECB = 90^\circ$ 时,

$\because BE$ 平分 $\angle ABC, \angle ECB = \angle A = 90^\circ,$

$\therefore AE = CE,$

$\because BE = BE,$

$\therefore \text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle CBE$ (HL),

$\therefore BC = AB = 5,$

$\therefore CG = \sqrt{BC^2 - BG^2} = 3,$

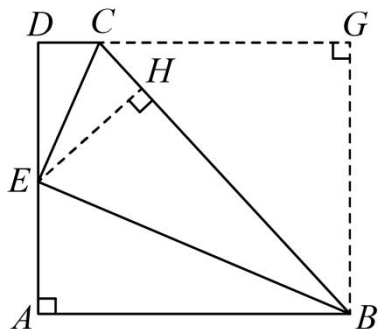
$\therefore CD = DG - CG = 2,$

设 $DE = x$ ，则 $AE = CE = 4 - x$ ，

由勾股定理得到 $CE^2 = CD^2 + DE^2$ ，即 $(4 - x)^2 = x^2 + 4$ ，

解得： $x = \frac{3}{2}$ ；

如图，当 $\angle BEC = 90^\circ$ 时，过点 E 作 $EH \perp BC$ 交 BC 于点 H ，



$\because BE$ 平分 $\angle ABC$ ， $\angle EHB = \angle A = 90^\circ$ ，

$\therefore AE = EH$ ，

$\because BE = BE$ ，

$\therefore \text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle HBE$ (HL)，

$\angle DBEH = \angle BEA$ ，

$\because \angle BEA + \angle DEC = \angle CEH + \angle BEH = 90^\circ$ ，

$\angle DEC = \angle CEH$ ，

$\because \angle CDE = \angle CHE = 90^\circ$ ， $CE = CE$ ，

$\therefore \triangle CDE \cong \triangle CHE$ (AAS)，

$\therefore DE = EH$ ，

$\therefore DE = AE = \frac{1}{2}AD = 2$ ，

综上， DE 的长度为：2 或 $\frac{3}{2}$ 。

【点睛】 本题考查矩形的判定与性质，全等三角形的判定与性质，角平分线的性质，勾股定理，正确作出辅助线是解题的关键。

三、解答题 (本大题共 7 题，满分 46 分)

19. 解方程： $\frac{x}{x-2} - \frac{8}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$ 。

【答案】 原方程的根是 $x = -3$ 。

【解析】

【分析】分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解.

【详解】解：方程两边乘 $(x-2)(x+2)$,

$$\text{得 } x(x+2)-8=x-2,$$

$$x^2+x-6=0,$$

$$(x+3)(x-2)=0,$$

$$\text{解得 } x_1=-3, \quad x_2=2.$$

经检验: $x_1=-3$ 是原方程的根, $x_2=2$ 是增根.

$\therefore$ 原方程的根是 $x=-3$.

【点睛】本题考查分式方程的解法，掌握分式方程的解题的步骤是解题的关键，注意检验.

20. 解方程组:
$$\begin{cases} x-y=2, \\ x^2-2xy-3y^2=0. \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=3 \\ y_2=1 \end{cases}$$

【解析】

【详解】 $x^2-2xy-3y^2=0$

$$(x-y)^2-4y^2=0$$

又因: $x-y=2$ 代入上式

$$4-4y^2=0$$

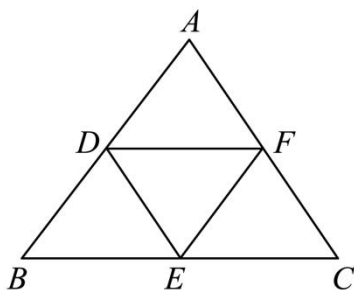
$$y=1 \text{ 或 } y=-1$$

再将 $y=1$ 、 $y=-1$ 分别代入 $x-y=2$

$$\text{则 } x=1, \quad x=3$$

$$\therefore \begin{cases} x_1=1 \\ y_1=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=3 \\ y_2=1 \end{cases}$$

21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 、 F 分别是边 AB 、 BC 、 CA 的中点.



- (1) 写出图中所有与 $\overrightarrow{BE}$ 相等的向量: _____;
- (2) 用图中的向量表示: $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DF} =$ _____;
- (3) 求作: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EB}$ (不要求写作法, 但要写出结论).

【答案】 (1) $\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{EC}$

(2) $\overrightarrow{DE}$ 或 $\overrightarrow{AF}$ 或 $\overrightarrow{FC}$

(3) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据中位线的性质得出 $DF \parallel BC$, $DF = \frac{1}{2}BC = BE = EC$, 即可求解;

(2) 根据三角形法则求向量的和, 进而即可求解;

(3) 连接 AE , 则 $\overrightarrow{AE}$ 即为所求,

【小问 1 详解】

解: $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 、 F 分别是边 AB 、 BC 、 CA 的中点

$$\therefore DF = \frac{1}{2}BC = BE = EC, \quad DF \parallel BC$$

$\therefore$ 与 $\overrightarrow{BE}$ 相等的向量是: $\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{EC}$,

故答案为: $\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{EC}$.

【小问 2 详解】

解: $\because \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BE}$

$$\therefore \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DE},$$

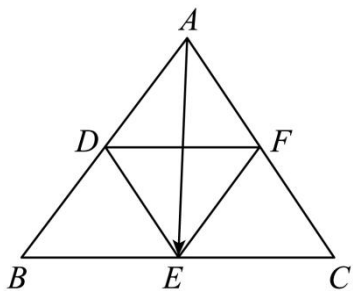
又点 D 、 E 、 F 分别是边 AB 、 BC 、 CA 的中点, 则 $DE = AF = FC$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FC}$$

故答案为: $\overrightarrow{DE}$ 或 $\overrightarrow{AF}$ 或 $\overrightarrow{FC}$

【小问 3 详解】

解: 如图所示, $\overrightarrow{AE}$ 即为所求,

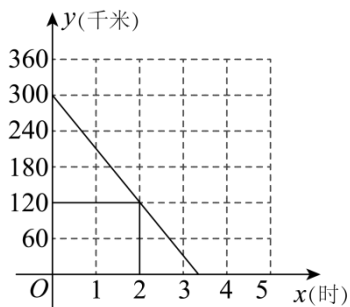


$$\because \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$$

$\therefore \overrightarrow{AE}$ 即为所求,

【点睛】 本题考查了向量的应用，三角形法则求向量，熟练掌握向量的定义以及线性运算是解题的关键.

22. A、B 两座城市之间有一条高速公路，甲、乙两辆汽车同时分别从这条路两端的入口处驶入，并始终在高速公路上正常行驶. 甲车从 A 城驶往 B 城，乙车从 B 城驶往 A 城，甲车在行驶过程中速度始终不变. 甲车距 B 城高速公路入口处的距离 y (千米) 与行驶时间 x (时) 之间的关系如图.



(1) 求 y 关于 x 的函数解析式;

(2) 已知乙车以 60 千米/时的速度匀速行驶，当乙车与甲车相遇后速度随即改为 a (千米/时) 并保持匀速行驶，结果比甲车晚 40 分钟到达终点，求乙车变化后的速度 a .

【答案】 (1) $y = -90x + 300$

(2) 乙车变化后的速度 a 为 90 千米/时

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的应用，一次函数解析式，一元一次方程的应用. 理解题意并根据题意建立方程是解题的关键.

(1) 待定系数法求解析式即可;

(2) 先求出甲车从 A 到 B 所用时间，再求出两车的相遇时间，然后根据乙车比甲车晚 40 分钟到达终点列方程，求解即可.

【小问 1 详解】

解： 设 y 与 x 的函数解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$,

将点 $(0, 300)$, $(2, 120)$ 代入得,

$$\begin{cases} b = 300 \\ 2k + b = 120 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -90 \\ b = 300 \end{cases},$$

$$\therefore y = -90x + 300;$$

【小问 2 详解】

解: 令 $y = 0$, 则 $-90x + 300 = 0$,

$$\text{解得 } x = \frac{10}{3},$$

当两车相遇时, $-90x + 300 = 60x$,

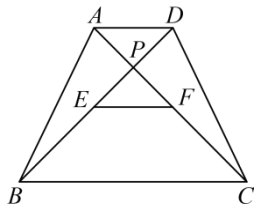
$$\text{解得 } x = 2,$$

$$\text{依题意得, } 60 \times 2 + \left(\frac{10}{3} + \frac{40}{60} - 2 \right) a = 300,$$

$$\text{解得 } a = 90,$$

答: 乙车变化后的速度 a 为 90 千米/时.

23. 已知: 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = DC$, 对角线 AC 、 BD 相交于点 P , 点 E 、 F 分别是 BD 、 AC 的中点, 连接 EF .



(1) 求证: $EF \parallel BC$;

(2) 连接 AE 、 DF , 如果 $AE \perp EF$, 求证: 四边形 $AEFD$ 是矩形.

【答案】(1) 见详解 (2) 见详解

【解析】

【分析】本题主要考查了等腰梯形的性质、等腰三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、矩形的判定等知识, 熟练掌握等腰梯形的性质和全等三角形的性质是解题关键.

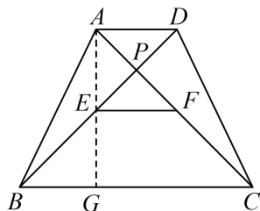
(1) 连接 AE 并延长交 BC 于点 G , 证明 $\triangle DAE \cong \triangle BGE$ (AAS), 得到 $AE = EG$, 利用三角形中位线定理证得 $EF \parallel CG$, 即可证明结论成立;

(2) 连接 AE 并延长交 BC 于点 G , 连接 DF 并延长交 BC 于点 H , 证明 $\triangle DAE \cong \triangle BGE$ (AAS), 推出

$AD = BG$ ，同理 $AD = CH$ ，得到 $BG = CH$ ，再证明 $\triangle ABG \cong \triangle DCH$ (SAS)，推出 $AG \parallel DH$ ，据此即可证明结论。

【小问 1 详解】

证明：连接 AE 并延长交 BC 于点 G ，



$\because$ 点 E 分别是 BD 的中点，

$\therefore BE = DE$ ，

$\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle ADE = \angle GBE$ ， $\angle DAE = \angle BGE$ ，

$\therefore \triangle DAE \cong \triangle BGE$ (AAS)，

$\therefore AE = EG$ ，

$\because$ 点 F 分别是 AC 的中点，

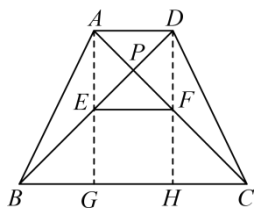
$\therefore EF$ 是 $\triangle AGC$ 的中位线，

$\therefore EF \parallel CG$ ，

$\therefore EF \parallel BC$ ；

【小问 2 详解】

证明：连接 AE 并延长交 BC 于点 G ，连接 DF 并延长交 BC 于点 H ，



$\because$ 在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB = DC$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为等腰梯形， $\angle ADE = \angle GBE$ ， $\angle DAE = \angle BGE$ ，

$\therefore \angle ABG = \angle DCH$ ，

由 (1) 可知， $EF \parallel BC$ ，又 $AD \parallel BC$ ，

$\therefore EF \parallel BC \parallel AD$ ，

$\because AE \perp EF$ ，

$\therefore \angle AEF = \angle AGH = \angle AGB = 90^\circ$ ，

由 (1) 得 $\triangle DAE \cong \triangle BGE$ (AAS),

$$\therefore AD = BG,$$

同理, $\triangle DAF \cong \triangle HCF$ (AAS),

$$\therefore AD = CH,$$

$$\therefore BG = CH,$$

$$\because AB = DC, \angle ABG = \angle DCH,$$

$$\therefore \triangle ABG \cong \triangle DCH \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle AGB = \angle DHC = 90^\circ,$$

$$\text{即 } \angle AGH = \angle DHC = 90^\circ,$$

$$\therefore AG \parallel DH,$$

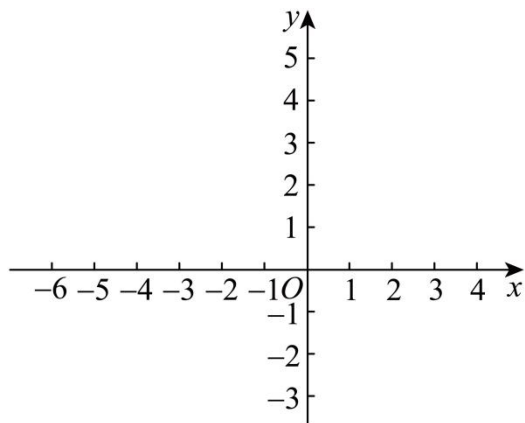
$$\because AD \parallel EF, AE \parallel DF,$$

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 为平行四边形,

$$\text{又 } \because \angle AEF = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是矩形.

24. 已知在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y = kx + b$ 与 x 轴、 y 轴分别相交于点 $A(-2, 0)$ 、点 $B(0, 4)$. 点 C 是 x 轴上一点, 点 Q 是平面内一点, 四边形 $ACBQ$ 是菱形.



(1) 求点 C 和点 Q 的坐标;

(2) 由平面内不在同一直线上的一些线段首尾顺次连接所组成的封闭图形叫做多边形, 对于一个多边形, 画出它的任意一边所在的直线, 如果其余各边都在这条直线的一侧, 那么这个多边形叫做“凸多边形”; 否则叫做“凹多边形”. 如果点 E 是直线 $x = 1$ 上的一个动点, 纵坐标为 t , 且四边形 $AECB$ 是凹四边形 (线段 AE 与线段 BC 没有交点), 求 t 的取值范围.

【答案】(1) $C(3,0)$, $Q(-5,4)$

(2) $0 < t < \frac{8}{3}$ 或 $6 < t$

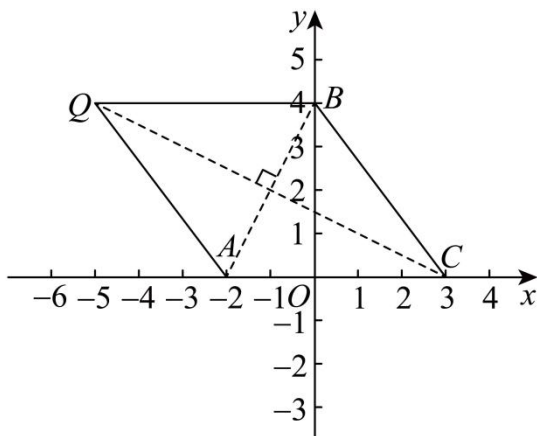
【解析】

【分析】(1) 根据题意, 画出示意图, 由四边形 $ACBQ$ 是菱形, 得到 $AB \perp CQ, AC = BC$, 设点 $C(t, 0) (t > 0)$, $Q(m, 4)$, 可得 $\sqrt{OC^2 + OB^2} = AC$, 求出 $t = 2$, 即 $C(2, 0)$, 在根据菱形对角线互相平分且垂直, 即可求解;

(2) 根据题意画出示意图, 求出直线 AB, BC 的解析式, 结合“凹多边形”的定义找到临界点即可求解.

【小问 1 详解】

解: 如图,



$\because$ 四边形 $ACBQ$ 是菱形,

$\therefore AB \perp CQ, AC = BC, AC \parallel BQ$,

设点 $C(t, 0) (t > 0)$, $Q(m, 4)$,

$\therefore \sqrt{OC^2 + OB^2} = AC$, 即 $\sqrt{16 + t^2} = t + 2$,

$\therefore 16 + t^2 = (t + 2)^2$, 即 $16 + t^2 = t^2 + 4t + 4$

$\therefore t = 3$, 即 $C(3, 0)$,

$\therefore \frac{-2 + 0}{2} = \frac{3 + m}{2}$,

$\therefore m = -5$, 即 $Q(-5, 4)$;

【小问 2 详解】

解: $\because A(-2,0), B(0,4), C(3,0)$,

将点 $A(-2,0), B(0,4)$ 代入直线 $AB: y=kx+b$, 则 $\begin{cases} 0=-2k+b \\ 4=b \end{cases}$,

解得: $\begin{cases} k=2 \\ b=4 \end{cases}$,

$\therefore$ 直线 AB 的解析式为: $y=2x+4$,

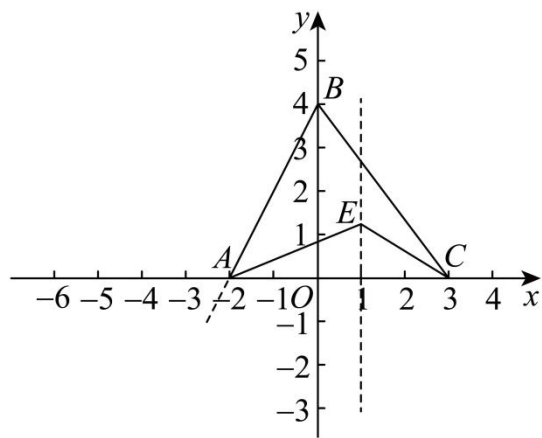
设直线 BC 的解析式为: $y=k'x+b'$,

将点 $B(0,4), C(3,0)$ 代入, 则 $\begin{cases} 0=3k'+b' \\ 4=b' \end{cases}$,

解得: $\begin{cases} k'=-\frac{4}{3} \\ b'=4 \end{cases}$,

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为: $y=-\frac{4}{3}x+4$,

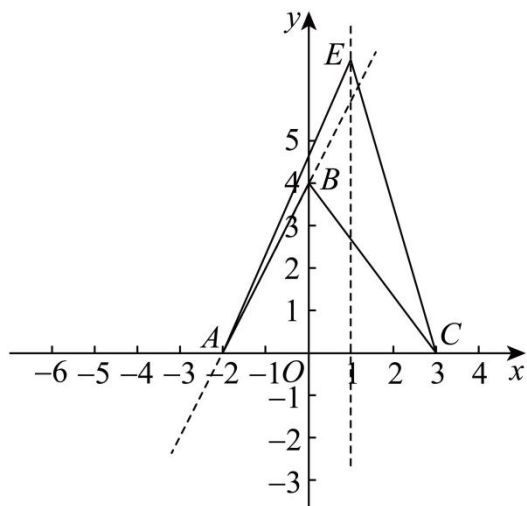
$\therefore$ 如图, 当点 E 在直线 BC 下方, 直线 AC 上方时, 四边形 $AE CB$ 是凹四边形,



此时, 令 $x=1$, 则有 $y=-\frac{4}{3} \times 1+4=\frac{8}{3}$,

$\therefore 0 < t < \frac{8}{3}$,

如图, 当点 E 在直线 AB 上方时, 四边形 $AE CB$ 是凹四边形,



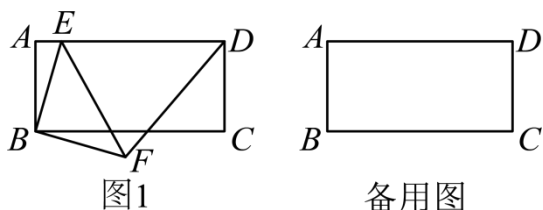
此时，令 $x=1$ ，则有 $y=2 \times 1+4=6$ ，

$\backslash 6 < t$ ，

综上，四边形 $AECB$ 是凹四边形， $0 < t < \frac{8}{3}$ 或 $6 < t$ 。

【点睛】本题考查了坐标与图形，菱形的性质，勾股定理，一次函数解析式及“凸多边形”“凹多边形”的定义理解，正确画出示意图是解题的关键。

25. 已知在矩形 $ABCD$ 中， $AB=4$ ， $AD=8$ ，点 E 是边 AD 上的动点，连接 BE 。线段 BE 绕点 B 顺时针旋转 90° ，点 E 落在点 F 处。



- (1) 如图 1，当 $AE=1$ 时，求 $\triangle DEF$ 的面积；
- (2) 设 $AE=x$ ， $DF=y$ ，求 y 关于 x 的函数关系式和定义域；
- (3) 作 $\angle EBF$ 的平分线与边 CD 所在直线交于点 G ，如果 $DG=2$ ，求 AE 的长。

【答案】(1) $\frac{35}{2}$

(2) $y = \sqrt{x^2 + 8x + 32}$ ($0 \leq x \leq 8$)

(3) $\frac{4}{7}$ 或 $\frac{12}{5}$

【解析】

【分析】(1) 过点 F 作 $FH \perp AD$ 于点 H ，交 BC 于点 G ，证明四边形 $ABGH$ 为矩形，易得 $HG = AB = 4$ ，

$\angle BGH = 90^\circ$ ，由旋转的性质可得 $BE = BF$ ， $\angle EBF = 90^\circ$ ，进而证明 $\angle ABE = \angle GBF$ ，即可证明

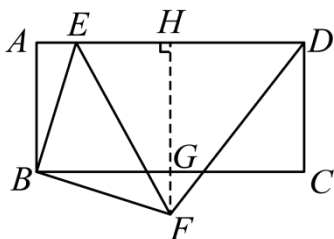
$\triangle ABE \cong \triangle GBF$ (AAS)，由全等三角形的性质可得 $GF = AE = 1$ ，可求得 $FH = FG + GH = 5$ ，然后利用三角形面积公式求解即可；

(2) 设 $AE = x$ ， $DF = y$ ，则 $GF = AE = x$ ，易得 $FH = x + 4$ ，在 $\text{Rt}\triangle FDH$ 中，由勾股定理可得 $DF = \sqrt{DH^2 + FH^2}$ ，即可获得答案；

(3) 分两种情况讨论：①当点 G 在射线 CD 上时，设 $\angle EBF$ 的平分线与 EF 交于点 O ，与 AD 交于点 P ，设 $OE = a$ ，则 $OB = \frac{1}{2}EF = OE = a$ ，由勾股定理得 $BG = 10$ ，再证明 $\triangle GDP \sim \triangle BAP$ ，由相似三角形的性质可解得 $PD = \frac{8}{3}$ ， $PG = \frac{10}{3}$ ，进而可得 $PA = \frac{16}{3}$ ， $PB = \frac{20}{3}$ ，证明 $\triangle POE \sim \triangle PAB$ ，由相似三角形的性质可得 $\frac{PO}{PA} = \frac{OE}{AB}$ ，代入数值解得 $a = \frac{20}{7}$ ，即可确定 OE 、 OB 、 BE 的值，然后利用勾股定理计算 AE 的长度；②当点 G 在线段 CD 上时，设 $\angle EBF$ 的平分线与 EF 交于点 O ，延长 AD 、 BG 交于点 P ，设 $OE = a$ ，则 $OB = \frac{1}{2}EF = OE = a$ ，证明 $\triangle PDG \sim \triangle BCG$ ， $\triangle PDG \sim \triangle POE$ ，结合相似三角形的性质解得 a 的值，即可确定 OE 、 OB 、 BE 的值，然后利用勾股定理计算 AE 的长度。

【小问 1 详解】

解：如下图，过点 F 作 $FH \perp AD$ 于点 H ，交 BC 于点 G ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形， $AB = 4$ ， $AD = 8$ ，

$\therefore AD \parallel BC$ ， $\angle A = \angle ABC = 90^\circ$ ，

又 $\because \angle AHG = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABGH$ 为矩形，

$\therefore HG = AB = 4$ ， $\angle BGH = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BGF = 180^\circ - \angle BGH = 90^\circ$ ，

$\because$ 线段 BE 绕点 B 顺时针旋转 90° ，点 E 落在点 F 处，

$\therefore BE = BF$ ， $\angle EBF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle EBF = \angle ABC = 90^\circ$ ，即 $\angle ABE + \angle EBC = \angle EBC + \angle GBF$ ，

$\therefore \angle ABE = \angle GBF$ ，

又 $\because \angle A = \angle BGF = 90^\circ$ ， $BE = BF$ ，

设 $OE = a$ ，则 $OB = \frac{1}{2}EF = OE = a$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形， $AB = 4$ ， $AD = 8$ ， $DG = 2$ ，

$\therefore \angle C = 90^\circ$ ， $AB \parallel CD$ ， $CD = AB = 4$ ， $BC = AD = 8$ ，

$$\therefore BG = \sqrt{BC^2 + CG^2} = \sqrt{8^2 + (4+2)^2} = 10,$$

$\because AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle G = \angle ABP$ ， $\angle GDP = \angle A$ ，

$\therefore \triangle GDP \sim \triangle BAP$ ，

$$\therefore \frac{PD}{PA} = \frac{PG}{PB} = \frac{DG}{AB}, \text{ 即 } \frac{PD}{8-PD} = \frac{PG}{10-PG} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\text{解得 } PD = \frac{8}{3}, \quad PG = \frac{10}{3},$$

$$\therefore PA = \frac{16}{3}, \quad PB = \frac{20}{3},$$

$\because \angle EPO = \angle BPA$ ， $\angle POE = \angle A = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle POE \sim \triangle PAB$ ，

$$\therefore \frac{PO}{PA} = \frac{OE}{AB}, \text{ 即 } \frac{\frac{20}{3} - a}{\frac{16}{3}} = \frac{a}{4},$$

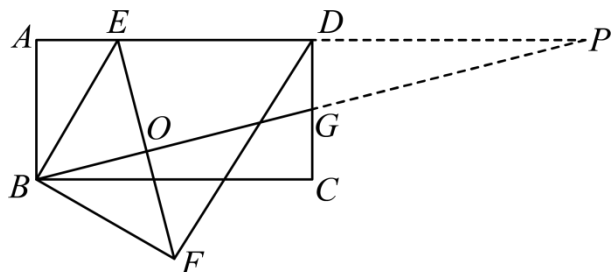
$$\text{解得 } a = \frac{20}{7},$$

$$\therefore OE = OB = \frac{20}{7},$$

$$\therefore BE = \sqrt{OE^2 + OB^2} = \frac{20}{7}\sqrt{2},$$

$$\therefore AE = \sqrt{BE^2 - AB^2} = \frac{4}{7};$$

②当点 G 在线段 CD 上时，如下图，设 $\angle EBF$ 的平分线与 EF 交于点 O ，延长 AD 、 BG 交于点 P ，



$\because DG = 2$ ，

$\therefore CG = CD - DG = 2$ ，

$$\therefore BG = \sqrt{BC^2 + CG^2} = \sqrt{8^2 + 2^2} = 2\sqrt{17},$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle P = \angle CBG, \quad \angle PDG = \angle BCG,$$

$$\therefore \triangle PDG \sim \triangle BCG,$$

$$\therefore \frac{PD}{BC} = \frac{PG}{BG} = \frac{DG}{CG}, \quad \text{即} \quad \frac{PD}{8} = \frac{PG}{2\sqrt{17}} = \frac{2}{2} = 1,$$

$$\therefore PD = 8, \quad PG = 2\sqrt{17},$$

$$\therefore BP = BG + PG = 4\sqrt{17},$$

$$\text{设 } OE = a, \text{ 则 } OB = \frac{1}{2}EF = OE = a,$$

$$\therefore PO = PB - BO = 4\sqrt{17} - a,$$

$$\because \angle EPO = \angle GPD, \quad \angle PDG = \angle POE = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle PDG \sim \triangle POE,$$

$$\therefore \frac{PD}{PO} = \frac{DG}{OE}, \quad \text{即} \quad \frac{8}{4\sqrt{17} - a} = \frac{2}{a},$$

$$\text{解得 } a = \frac{4}{5}\sqrt{17},$$

$$\therefore OE = OB = \frac{4}{5}\sqrt{17},$$

$$\therefore BE = \sqrt{OE^2 + OB^2} = \frac{4}{5}\sqrt{34},$$

$$\therefore AE = \sqrt{BE^2 - AB^2} = \frac{12}{5};$$

$$\text{综上所述, } AE \text{ 的长为 } \frac{4}{7} \text{ 或 } \frac{12}{5}.$$

【点睛】 本题主要考查了旋转的性质、矩形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、相似三角形的判定与性质、等腰直角三角形的判定与性质、函数解析式、勾股定理等知识，综合性强，难度较大，正确作出辅助线，熟练运用全等三角形的判定与性质、相似三角形的判定与性质是解题关键。