

2023 学年第二学期期末学情诊断

初二数学试卷

(满分 100 分, 考试时间 90 分钟) 2024.6

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分) 下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上.

1. 下列方程是高次方程的是 ()

A. $x - y = 1$

B. $x^3 = 1$

C. $\frac{1}{x^2} - x = 1$

D. $\sqrt{x^3} = 1$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了高次方程的概念: 整理后, 次数高于二次的一元整式方程, 同时理解无理方程与分式方程; 根据高次方程的概念即可判断.

【详解】解: A、是二元一次方程, 不是高次方程;

B、是一元三次方程, 故是高次方程;

C、是分式方程, 故不是高次方程;

D、是无理方程, 故不是高次方程;

故选: B.

2. 下列函数是一次函数的是 ()

A. $y = \frac{1}{x}$

B. $y = x^2$

C. $y = 2(x + 1)$

D. $y = x + \frac{1}{x}$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的定义, 形如 $y = kx + b$ (其中 $k \neq 0$, k, b 是常数) 的函数是一次函数; 把握两个要点: 是整式, 是关于自变量的一次式; 根据一次函数的定义即可判断.

【详解】解: A、不是整式, 故不是一次函数;

B、是关于自变量的二次式, 故不是一次函数;

C、是整式, 且是关于自变量的一次式, 故是一次函数;

D、不是整式, 故不是一次函数;

故选: C.

3. 用换元法解分式方程 $\frac{x^2 - 1}{x} + \frac{3x}{x^2 - 1} = 1$ 时, 设 $\frac{x^2 - 1}{x} = y$, 那么原方程化成整式方程正确的是 ()

A. $y + \frac{1}{y} = 1$ B. $y + \frac{3}{y} = 1$ C. $y^2 + 3y = 1$ D. $y^2 - y = -3$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了用换元法解分式方程，按照题意要求进行即可.

【详解】解：设 $\frac{x^2-1}{x} = y$ ，则原方程化为： $y + \frac{3}{y} = 1$ ，

方程两边同乘以 y 并整理得： $y^2 - y = -3$ ，

故选：D.

4. 下列说法正确的是 ()

A. $\vec{a} - \vec{a} = 0$ B. $\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|$ C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ D. $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 平行

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了向量的基本知识，向量的减法运算，根据向量的概念、运算及相关知识即可完成.

【详解】解：A、 $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$ ，故说法错误；

B、 $\overrightarrow{AB}$ 是一个向量，是一个既有大小又有方向的量，而 $|\overrightarrow{AB}|$ 是向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模，是一个只有大小的量，两者不相等，故说法错误；

C、 $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ ，故说法错误；

D、 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 平行，故说法正确；

故选：D.

5. 下列事件是随机事件的是 ()

- A. 汽车的车窗玻璃破碎
- B. 从地面上抛掷一枚硬币，硬币一定会落下
- C. 从一副没有大小王的扑克牌中任意取出一张牌，这张牌一定是大王
- D. 今年十四岁的你，明年一定是十五岁

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了随机事件，同时也考查了必然事件与不可能事件：在一定条件下可能发生也可能不发生的事件是随机事件，一定发生的事件是必然事件，一定不发生的事件是不可能事件；根据这三种事件的

含义进行判断即可.

【详解】解: A、是随机事件, 故符合题意;

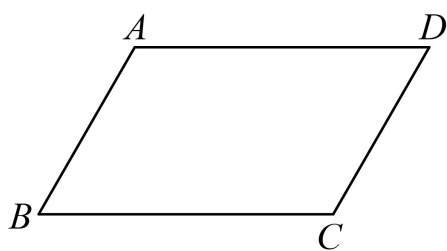
B、是必然事件, 故不符合题意;

C、是不可能事件, 故不符合题意;

D、是必然事件, 故不符合题意;

故选: A.

6. 已知在 $ABCD$ 中, 点 E 、 F 分别在边 BC 、 AD 上, 连结 AE 、 CF , 下列条件能使四边形 $AECF$ 一定是平行四边形的是 ()



A. $AE = CF$

B. $\angle EAF = \angle FCE$

C. $\angle EAF = \angle AFC$

D. $\angle EAF = \angle AEC$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的性质与判定, 掌握平行四边形的判定是解题的关键; 根据平行四边形的性质及平行四边形的判定逐项判定即可.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$;

$\therefore AF \parallel EC$;

A、当 $AE = CF$, 则一组对边平行, 另一组对边相等, 此时无法判断 $AECF$ 是平行四边形; 故选项不符合题意;

B、 $\because AF \parallel EC$,

$\therefore \angle EAF + \angle AEC = 180^\circ$;

$\because \angle EAF = \angle FCE$,

$\therefore \angle FCE + \angle AEC = 180^\circ$;

$\therefore AE \parallel FC$,

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 一定是平行四边形;

故选项 B 符合题意;

C、当 $\angle EAF = \angle AFC = 90^\circ$ 时, 则可得四边形 $AECF$ 一定是平行四边形;

但当 $\angle EAF = \angle AFC \neq 90^\circ$ 时，四边形 $AECF$ 不可能是平行四边形，

若四边形 $AECF$ 是平行四边形，则 $\angle EAF + \angle AFC = 180^\circ$ ，

而 $\angle EAF = \angle AFC$ ，则 $\angle EAF = \angle AFC = 90^\circ$ ，这与假设矛盾，

故四边形 $AECF$ 不可能是平行四边形；

故选项不符合题意；

D、若 $\angle EAF = \angle AEC$ ，

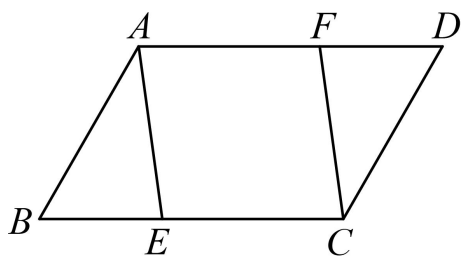
$\therefore AF \parallel EC$ ，

$\therefore \angle EAF + \angle AEC = 180^\circ$ ；

$\therefore \angle EAF = \angle AEC = 90^\circ$ ；

由于无法知晓 CF 与 BC 或 AD 是否垂直，故无法判断 AE 与 CF 是否平行，

故选项不符合题意；



故选：B.

二、填空题：（本大题共 12 题，每题 3 分，满分 36 分）请直接将结果填入答题纸的相应位置.

7. 方程 $x^4 = 16$ 的实数根是_____.

【答案】 $x = \pm 2$

【解析】

【分析】用直接开平方法求解即可.

【详解】 $\because x^4 = 16$ ，

$\therefore x^2 = 4$ ， $x^2 = -4$ （舍去），

$\therefore x = \pm 2$.

故答案为： $x = \pm 2$.

【点睛】 本题考查了直接开平方法解一元二次方程，其解法是将一元二次方程整理成 $x^2 = c (c \geq 0)$ ，然后两边同时开平方即可.

8. 方程 $\frac{1}{1-x} + 1 = \frac{1}{1+x}$ 的根是_____.

【答案】 $x_1 = 1 + \sqrt{2}, x_2 = 1 - \sqrt{2}$

【解析】

【分析】 本题考查解分式方程及一元二次方程，熟练掌握解方程的方法是解题的关键．利用解分式方程的步骤解方程即可．

【详解】 解：原方程去分母得： $1 + x + 1 - x^2 = 1 - x$ ，

整理得： $x^2 - 2x - 1 = 0$ ，

解得： $x_1 = 1 + \sqrt{2}, x_2 = 1 - \sqrt{2}$ ，

经检验， $x_1 = 1 + \sqrt{2}, x_2 = 1 - \sqrt{2}$ 是分式方程的解，

故答案为： $x_1 = 1 + \sqrt{2}, x_2 = 1 - \sqrt{2}$ ．

9. 方程 $\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{2x + 1}$ 的解是_____．

【答案】 $x = 3$

【解析】

【分析】 本题考查了解无理方程，注意：解无理方程一定要进行检验．方程两边平方得出 $x^2 - 2 = 2x + 1$ ，求出方程的解，再进行检验即可．

【详解】 解： $\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{2x + 1}$ ，

方程两边平方，得 $x^2 - 2 = 2x + 1$ ，

整理得： $x^2 - 2x - 3 = 0$ ，

$(x - 3)(x + 1) = 0$ ，

$x - 3 = 0$ 或 $x + 1 = 0$ ，

解得： $x = 3$ 或 -1 ，

经检验： $x = 3$ 是原方程的解， $x = -1$ 不是原方程的解，

所以原方程的解是 $x = 3$ ．

故答案为： $x = 3$ ．

10. 方程组 $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = \frac{3}{2} \end{cases}$ 的解是_____．

【答案】 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

【解析】

【分析】 本题考查了加减法解分式方程组；两式相减即可求得 y ，再求出 x 的值即可.

【详解】 解： $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \text{①} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = \frac{3}{2} \text{②} \end{cases}$

① - ② 得： $\frac{1}{2y} = \frac{1}{2}$,

解得 $y = 1$;

把 $y = 1$ 代入①得： $\frac{1}{x} = 1$,

解得： $x = 1$,

故 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$;

经检验 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 是原方程组的解.

11. 已知直线 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的截距等于 1，且经过点 $(1, 2)$ ，那么这条直线的表达式是_____.

【答案】 $y = x + 1$

【解析】

【分析】 本题考查了待定系数法求一次函数解析式，一次函数图象上点的坐标特征，熟练掌握待定系数法是解题的关键. 根据“直线 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的截距等于 1，” 计算求出 b 值，然后代入点 $(1, 2)$ 即可得解.

【详解】 解： $\because$ 直线 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的截距等于 1，

$\therefore b = 1$,

$\because$ 直线 $y = kx + 1$ 经过点 $(1, 2)$,

$\therefore k + 1 = 2$ ，解得 $k = 1$,

$\therefore$ 这条直线的表达式是 $y = x + 1$,

故答案为： $y = x + 1$.

12. 布袋里有 3 个红球、2 个白球，它们除颜色外其他都相同，从中任意摸出两个球恰好是同颜色的概率的

是_____.

【答案】 $\frac{2}{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了树状图或列表法求出事件的概率；关键是用树状图或列表法求出所有可能事件的结果数，某一事件发生的所有可能结果数．用列表法求解即可．

【详解】 解： 设三个红球分别记为 A 、 B 、 C ，两个白球记为 D 、 E ，列表如下：

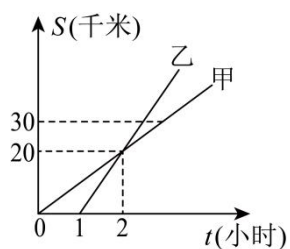
	A	B	C	D	E
A		AB	AC	AD	AE
B	AB		BC	BD	BE
C	AC	BC		CD	CE
D	AD	BD	CD		DE
E	AE	BE	CE	DE	

由表知，所有可能的结果数为 20 种，摸出两个球恰好是同颜色的结果数为 8 种，则任意摸出两个球恰好是

同颜色的概率的是 $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ ；

故答案为： $\frac{2}{5}$.

13. 甲、乙两人在公路上练习竞走和长跑，竞走、长跑的距离与时间的关系如图所示，那么在 30 千米的休息处，乙比甲早到了_____小时.



【答案】 1.5

【解析】

【分析】 本题考查了函数图象，从函数图象获得信息是解题的关键。由图象可求得甲乙两人的速度，则可分别求得在 30 千米的休息处两人行驶的时间，进而求得结果。

【详解】 解：由图象知，甲 2 小时行驶了 20 千米，乙 1 小时行驶了 20 千米，

则甲的速度为： $20 \div 2 = 10$ (千米/小时)，乙的速度为： $20 \div (2 - 1) = 20$ (千米/小时)，

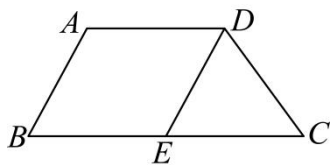
甲行驶到 30 千米的休息处行驶的时间为： $30 \div 10 = 3$ (小时)，

乙行驶到 30 千米的休息处行驶的时间为： $30 \div 20 = 1.5$ (小时)，

则乙比甲早到了 $3 - 1.5 = 1.5$ (小时)；

故答案为： 1.5 .

14. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，点 E 是 BC 的中点， $DE \parallel AB$ ，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ，那么 $\overrightarrow{CD} =$ _____ . (用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示)



【答案】 $-\vec{b} - \vec{a}$

【解析】

【分析】 本题考查平行四边形的性质和判定，向量的运算，根据题意证明四边形 $ABED$ 为平行四边形，得到 $AD = BE$ ， $AB = DE$ ，进而得到 $EC = BE = AD$ ，即有 $\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{AD} = -\vec{b}$ ， $\overrightarrow{ED} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{a}$ ，最后根据 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{ED}$ 即可解题.

【详解】 解： $\because AD \parallel BC$ ， $DE \parallel AB$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABED$ 为平行四边形，

$\therefore AD = BE$ ， $AB = DE$ ，

$\because$ 点 E 是 BC 的中点，

$\therefore EC = BE = AD$ ，

$\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ，

$\therefore \overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{AD} = -\vec{b}$ ， $\overrightarrow{ED} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{a}$ ，

$\therefore \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{ED} = -\vec{b} - \vec{a}$ ，

故答案为: $-\vec{b}-\vec{a}$.

15. 已知 n 边形的每个内角都是 160° , 那么 $n =$ _____.

【答案】 18

【解析】

【分析】 本题考查了多边形的内角和 360° ; 由多边形内角和为 $(n-2) \times 180^\circ$ 即可求得 n 的值.

【详解】 解: 由于多边形的每个内角为 160° ,

则有: $(n-2) \times 180^\circ = 160^\circ \times n$,

解得: $n = 18$;

故答案为: 18.

16. 在菱形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 相交于 O , 若 $AB = 6$, $AC = 4$, 那么 $BD =$ _____.

【答案】 $8\sqrt{2}$

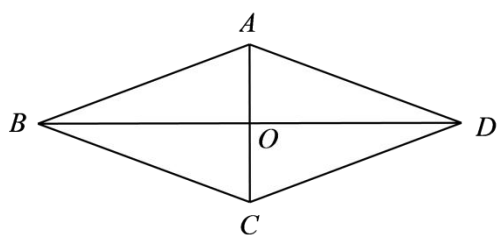
【解析】

【分析】 本题考查了菱形的性质, 勾股定理, 其中菱形的性质是关键. 根据题意画出图形, 由菱形的性质, 得 $OA = \frac{1}{2} AC = 2$, $BD = 2OB$, 由勾股定理求得 OB 即可.

【详解】 解: 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $AC \perp BD$, $OA = \frac{1}{2} AC = 2$, $BD = 2OB$,

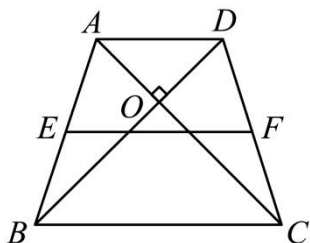
由勾得 $OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{36 - 4} = 4\sqrt{2}$,

则 $BD = 2OB = 8\sqrt{2}$;



故答案为: $8\sqrt{2}$.

17. 如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = DC$, $AC \perp BD$ 于 O , E 、 F 分别是 AB 、 DC 的中点, 梯形 $ABCD$ 的面积为 24, 那么 $EF =$ _____.



【答案】 $2\sqrt{6}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了等腰梯形. 熟练掌握等腰梯形性质, 等腰直角三角形性质, 三角形面积公式, 是解决问题的关键.

根据等腰梯形性质得到 $AC = BD$, $EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$, 过 C 作 $CG \parallel DB$ 交 AD 延长线 G , $CH \perp AG$ 于点 H , 得到四边形 $DBCG$ 是平行四边形, 得到 $CG = BD$, $DG = BC$, 得到 $AC = GC$, $AG = AD + BC$, 根据 $AC \perp BD$, 得到 $CH = AH = \frac{1}{2}AG$, 推出 $S_{\triangle ACG} = S_{\text{梯形}ABCD} = 24$, 得到 $CH^2 = 24$, $CH = 2\sqrt{6}$, 即得.

【详解】 如图, 过 C 作 $CG \parallel DB$ 交 AD 延长线 G , 作 $CH \perp AG$ 于点 H ,

$\because$ 等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB = DC$, $AD \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $DBCG$ 是平行四边形,

$\therefore CG = BD$, $DG = BC$,

$\therefore AG = AD + DG = AD + BC$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形,

$\therefore AC = BD$,

$\therefore AC = GC$,

$\because AC \perp BD$,

$\therefore AC \perp CG$,

$\therefore \angle ACG = 90^\circ$,

$\therefore CH = AH = \frac{1}{2}AG$,

$\because E$ 、 F 分别是 AB 、 DC 的中点,

$\therefore EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$,

$\therefore EF = CH$,

$\because S_{\triangle ADC} = S_{\triangle DAB}$, $S_{\triangle BCD} = S_{\triangle GDC}$,

$$\therefore S_{\triangle ACG} = S_{\triangle ADC} + S_{\triangle GDC} = S_{\triangle DAB} + S_{\triangle BCD} = S_{\text{梯形}ABCD} = 24,$$

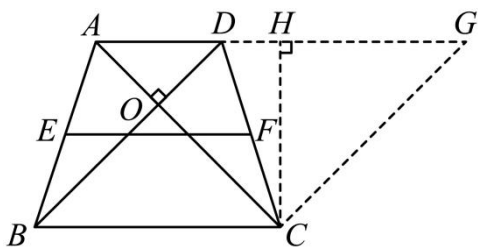
$$\because S_{\triangle ACG} = \frac{1}{2}AG \cdot CH = AH \cdot CH = CH^2,$$

$$\therefore CH^2 = 24,$$

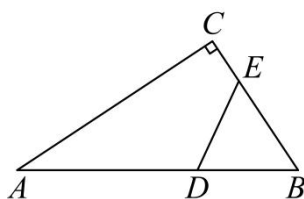
$$\therefore CH = 2\sqrt{6},$$

$$\therefore EF = 2\sqrt{6}.$$

故答案为: $2\sqrt{6}$.



18. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$ ($BC < AC$), $BC = 8$, 点 D 、 E 分别在边 AB 、 BC 上, 连接 DE , $\angle DEC = 120^\circ$, 将 $\triangle BDE$ 沿直线 DE 翻折, 点 B 恰好落在边 AC 上的点 B' 处, 那么线段 $BB' =$ _____.



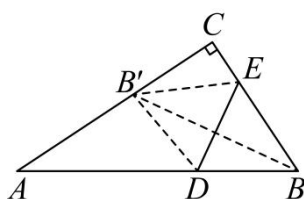
【答案】 $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查勾股定理, 直角三角形性质, 折叠的性质, 根据题意作图, 利用折叠的性质得到 $\angle B'ED = \angle BED = 60^\circ$, $BE = B'E$, 进而得到 $\angle CB'E = 30^\circ$, 结合直角三角形性质得到 $CE = \frac{8}{3}$, $BE = B'E = \frac{16}{3}$, 利用勾股定理得到 $B'C$, 进而得到 BB' , 即可解题.

【详解】 解: 根据题意作图如下:

连接 BB' ,



$$\because \angle DEC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BED = 60^\circ,$$

由折叠的性质可知: $\angle B'ED = \angle BED = 60^\circ$, $BE = B'E$,

$$\therefore \angle B'EC = 60^\circ,$$

$$\because \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CB'E = 30^\circ,$$

$$\therefore CE = \frac{1}{2}B'E = \frac{1}{2}BE,$$

$$\because BC = 8,$$

$$\therefore CE = \frac{8}{3}, \quad BE = B'E = \frac{16}{3},$$

$$\therefore B'C = \sqrt{B'E^2 - CE^2} = \frac{8}{3}\sqrt{3},$$

$$\therefore BB' = \sqrt{B'C^2 + BC^2} = \frac{16\sqrt{3}}{3}.$$

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 52 分)

19. 解方程组:
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \\ y_1 = \frac{1}{3} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

【解析】

【分析】 本题考查了二元二次方程组的解法; 其基本思想是用代入法消元; 由第一个方程变形得 $y = 2x - 1$, 再代入第二个方程中, 求得 x 的值, 即可求得 y 的值, 从而求解.

【详解】 解:
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \text{ ①} \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \text{ ②} \end{cases}$$

由①得: $y = 2x - 1$ ③;

把③代入②中, $x^2 - 3x(2x - 1) + 2(2x - 1)^2 = 0$

整理得: $3x^2 - 5x + 2 = 0$,

解得: $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = 1$,

把上述值代入③中, 得: $y_1 = \frac{1}{3}, y_2 = 1$,

故方程组的解为: $\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \\ y_1 = \frac{1}{3} \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{cases}.$

20. 解关于 x 的方程: $bx^2 - 1 = 1 - x^2$ ($b \neq -1$).

【答案】 $b > -1$, $\pm \frac{\sqrt{2(b+1)}}{b+1}$; $b < -1$, 方程无解.

【解析】

【详解】 方程整理后, 利用平方根定义开方即可求出解.

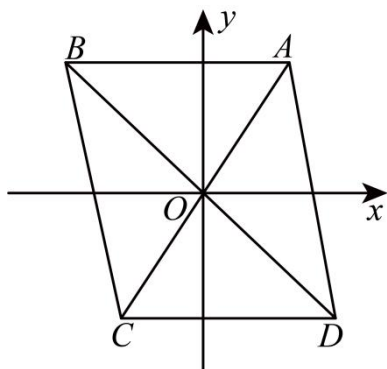
解: 方程整理得: $(b+1)x^2 = 2$,

即 $x^2 = \frac{2}{b+1}$ ($b \neq -1$, 即 $b+1 \neq 0$),

若 $b+1 > 0$, 即 $b > -1$, 开方得: $x = \pm \sqrt{\frac{2}{b+1}} = \pm \frac{\sqrt{2(b+1)}}{b+1}$;

若 $b+1 < 0$, 即 $b < -1$, 方程无解.

21. 如图, 在直角坐标平面内, $ABCD$ 的对角线的交点正好与坐标原点重合, 且点 A 、 B 坐标分别为 $(2, 3)$, $(-3, 3)$.



(1) 求点 C 、 D 的坐标;

(2) 求 $ABCD$ 的周长.

【答案】 (1) $C(-2, -3)$, $D(3, -3)$

(2) $2(5 + \sqrt{37})$

【解析】

【分析】 (1) 根据平行四边形是中心对称图形, 结合已知即可求得点 C 、 D 的坐标;

(2) 由勾股定理可求得 AD 的长度, 即可求得平行四边形的周长.

【小问 1 详解】

解: $\because \square ABCD$ 的对角线的交点正好与坐标原点重合, 且平行四边形是中心对称图形,

$\therefore A, C$ 关于原点对称, B, D 关于原点对称,

$\therefore C(-2, -3), D(3, -3);$

【小问 2 详解】

解: $\because AB = 2 - (-3) = 5,$

由勾股定理得: $AD = \sqrt{(2-3)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{37},$

$\therefore \square ABCD$ 的周长为 $2(AB + AD) = 2(5 + \sqrt{37}).$

【点睛】 本题考查了坐标与图形, 平行四边形的性质, 关于原点对称的点的坐标特征, 勾股定理.

22. 为了落实“珍惜和合理利用每一寸土地”的基本国策, 某地区计划若干年内开发“改造后可利用土地”的面积达到 360 平方千米, 实际施工中, 每年比原计划开发的土地面积多 2 平方千米. 如果按此速度继续开发, 预计可提前 6 年完成任务. 求实际施工中每年开发土地面积是多少平方千米?

【答案】 实际每年可开发 12 平方千米.

【解析】

【分析】 本题考查了分式方程的应用. 分析可得等量关系: 原计划开发年数 - 实际开发年数 = 6.

【详解】 解: 设实际每年可开发 x 平方千米,

依题意得: $\frac{360}{x-2} - \frac{360}{x} = 6,$

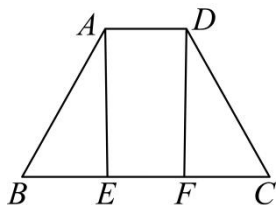
整理得: $x^2 - 2x - 120 = 0,$

解得: $x_1 = 12, x_2 = -10,$

经检验: $x_1 = 12, x_2 = -10$ 都是原方程的解, 但 $x_2 = -10$ 不合题意舍去, 所以只取 $x = 12.$

答: 实际每年可开发 12 平方千米.

23. 如图, 已知在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 点 E, F 分别在底边 BC 上, 连接 AE, DF , $\angle AEF = \angle ADF.$



(1) 求证: 四边形 $AEFD$ 是平行四边形;

(2) 若 $BE = FC$, 求证: 四边形 $AEFD$ 是矩形.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 利用平行线性质得到 $\angle DAE + \angle AEF = 180^\circ$ ，结合等量代换得到 $\angle DAE + \angle ADF = 180^\circ$ ，进而得到 $AE \parallel DF$ ，即可证明四边形 $AEFD$ 是平行四边形；

(2) 利用平行线性质得到 $\angle AEF + \angle EFD = 180^\circ$ ，进而得到 $\angle AEB + \angle CFD = 180^\circ$ ，证明 $\triangle AEB \cong \triangle DFC$ (SSS)，得到 $\angle AEB = \angle DFC = 90^\circ$ ，进而得到 $\angle AEF = 90^\circ$ ，即可证明四边形 $AEFD$ 是矩形。

【小问 1 详解】

证明： $\because AD \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle DAE + \angle AEF = 180^\circ,$$

$$\because \angle AEF = \angle ADF,$$

$$\therefore \angle DAE + \angle ADF = 180^\circ,$$

$$\therefore AE \parallel DF,$$

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是平行四边形；

【小问 2 详解】

证明： $\because AE \parallel DF$ ，

$$\therefore \angle AEF + \angle EFD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB + \angle CFD = 180^\circ,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，

$$\therefore AB = DC,$$

$\because$ 四边形 $AEFD$ 是平行四边形，

$$\therefore AE = DF,$$

$$\therefore BE = FC,$$

$$\therefore \triangle AEB \cong \triangle DFC \text{ (SSS)},$$

$$\therefore \angle AEB = \angle DFC = 90^\circ,$$

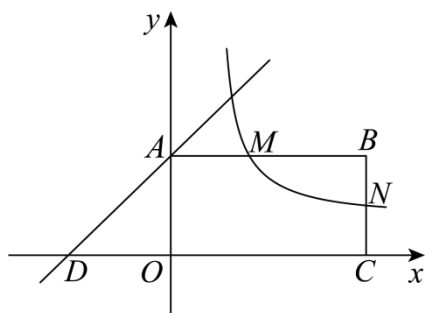
$$\therefore \angle AEF = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是矩形。

【点睛】本题考查了平行线性质和判定，平行四边形性质和判定，全等三角形性质和判定，矩形判定，等腰梯形性质，熟练掌握矩形的判定定理是解题的关键。

24. 在平面直角坐标系中，四边形 $OABC$ 是矩形，点 C 、 A 分别在 x 轴和 y 轴正半轴上， $OA = 2$ ， $OC = 4$ ，

双曲线 $y = \frac{4}{x} (x > 0)$ 与矩形 $OABC$ 交于 M 、 N 两点，直线 AD 与 x 轴负半轴交于点 D ， $\angle ADO = 45^\circ$ 。



- (1) 求直线 AD 的表达式；
- (2) 将直线 AD 向下平移 m 个单位，使平移后直线与双曲线的交点在矩形 $OABC$ 内部，求 m 的取值范围；
- (3) 设直线 l 是平移直线 AD 所得直线，点 P 是直线 l 上的一个动点，当 $\triangle PMN$ 是等边三角形时，求直线 l 的表达式。

【答案】 (1) $y = x + 2$

(2) $2 < m < 5$

(3) 直线 l 的表达式为 $y = x - \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ 或 $y = x - \frac{3+\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】 (1) 由 $OA = 2$ ， $\angle ADO = 45^\circ$ 得 A 、 D 两点的坐标，用待定系数法即可求解；

(2) 由题意易得 M 、 N 两点的坐标，直线 AD 向下平移 m 个单位后的解析式可求出，根据点 M 、 N 在直线 AD 上可求得向下平移的 m 值，即可求得 m 的取值范围；

(3) 设直线 l 解析式为 $y = x + 2 - n$ ，其中 n 为正数，设点 P 的坐标为 $(t, t + 2 - n)$ ，由勾股定理可分别求得 $\triangle PMN$ 的三边，根据等边三角形的性质建立方程即可求出 n 的值，从而求得直线 l 的表达式。

【小问 1 详解】

解： $\because OA = 2$ ， $\angle ADO = 45^\circ$ ， $\angle AOD = 90^\circ$ ，

$\therefore OD = OA = 2$ ；

$\therefore A(0, 2)$ 、 $D(-2, 0)$ ；

设直线 AD 解析式为 $y = kx + b$ ，

把 A 、 D 两点坐标分别代入得：
$$\begin{cases} b = 2 \\ -2k + b = 0 \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} b = 2 \\ k = 1 \end{cases}$$

即直线 AD 解析式为 $y = x + 2$;

【小问 2 详解】

解: $\because OC = 4$,

$\therefore C(4, 0)$;

由于 M 、 N 两点在双曲线 $y = \frac{4}{x} (x > 0)$ 上,

当 $y = 2$ 时, $x = 2$; 当 $x = 4$ 时, $y = 1$;

即 $M(2, 2)$, $N(4, 1)$;

直线 AD 向下平移 m 个单位后的解析式为 $y = x + 2 - m$,

$\because$ 点 M 、 N 在直线 AD 上,

$\therefore 2 = 2 + 2 - m, 1 = 4 + 2 - m$,

解得: $m = 2, m = 5$,

所以 m 的取值范围为 $2 < m < 5$;

【小问 3 详解】

解: 设直线 l 解析式为 $y = x + 2 - n$, 其中 n 为正数,

设点 P 的坐标为 $(t, t + 2 - n)$,

由勾股定理得: $MN^2 = 5$, $PM^2 = (t - 2)^2 + (t - n)^2$, $PN^2 = (t - 4)^2 + (t - n + 1)^2$;

$\because \triangle PMN$ 为等边三角形,

$\therefore PM = PN = MN$,

$(t - 4)^2 + (t - n + 1)^2 = (t - 2)^2 + (t - n)^2 = 5$,

由 $(t - 4)^2 + (t - n + 1)^2 = (t - 2)^2 + (t - n)^2$, 整理得: $n = \frac{13}{2} - t$,

把它代入 $(t - 2)^2 + (t - n)^2 = 5$ 中, 整理得: $4t^2 - 24t + 33 = 0$,

解得: $t = \frac{6 \pm \sqrt{3}}{2}$,

则 $n = \frac{13}{2} - \frac{6 \pm \sqrt{3}}{2} = \frac{7 \mp \sqrt{3}}{2}$,

所以直线 l 的表达式为 $y = x - \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$ 或 $y = x - \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$.

【点睛】本题考查了待定系数法求一次函数解析式，一次函数图象的平移，等腰直角三角形的判定，勾股定理，等边三角形的性质，反比例函数的图象，解一元二次方程等知识，有一定的综合性.

25. (1) 性质证明：已知：如图 1， BP 、 CP 分别是 $\triangle ABC$ 的外角平分线，求证： AP 平分 $\angle BAC$ ；
根据上述证明可以得到这样一条性质：三角形一个内角的平分线和其他两个内角的外角平分线交于一点，我们把这个交点叫做这个三角形的旁心. 图 1 中点 P 就是 $\triangle ABC$ 的一个旁心.

(2) 性质应用：

①如图 2，已知点 O 是 $\triangle ABC$ 的一个旁心，求证： $\angle O = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC$ ；

②已知点 O_1 、 O_2 、 O_3 是 $\triangle ABC$ 的三个旁心， $AB = 2$ ，在 $\triangle O_1O_2O_3$ 中， $\angle O_1 = 30^\circ$ ， $O_1O_2 = O_1O_3$ ，且 O_2O_3 经过点 B ，求 $\triangle O_1O_2O_3$ 的面积.

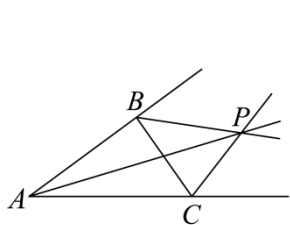


图1

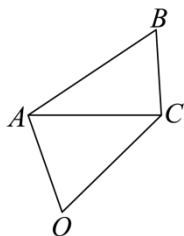


图2

【答案】(1) 见解析；(2) ①见解析；② $8 - 4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 过点 P 分别作 $PD \perp AC$ ， $PE \perp BC$ ， $PF \perp AB$ ，垂足分别为 D 、 E 、 F ，由角平分线的性质定理可得 $PF = PD$ ，再由角平分线的判定定理即可证明结果；

(2) ①分别延长射线 BA 、 BC ，由角平分线的意义得 $\angle OAC = \frac{1}{2}\angle CAE$ ， $\angle OCA = \frac{1}{2}\angle ACF$ ，再由三角形外角的性质及三角形内角和定理即可证明结论成立；

②首先易得 O_1O_3 、 O_1O_2 分别过点 C 、 A ；由①易得 $AB = BC = 2$ ， $\angle ABC = 120^\circ$ ，且 $\triangle ABO_2$ 、 $\triangle CBO_3$ 都是等腰三角形， $\angle ABO_2 = 30^\circ$ ；连接 O_1B 、 O_2C ，过 A 作 $AD \perp O_3O_2$ 于 D ，则得 $O_1B \perp O_2O_3$ ， $O_2C \perp O_1O_3$ ，由含 30° 直角三角形性质及勾股定理可求得 O_1B ，即可求得结果.

【详解】(1) 证明：如图，过点 P 分别作 $PD \perp AC$ ， $PE \perp BC$ ， $PF \perp AB$ ，垂足分别为 D 、 E 、 F ，
 $\because BP$ 、 CP 分别是 $\triangle ABC$ 的外角平分线，
 $\therefore PE = PF$ ， $PD = PE$ ；
 $\therefore PF = PD$ ；
 $\therefore AP$ 平分 $\angle BAC$ ；

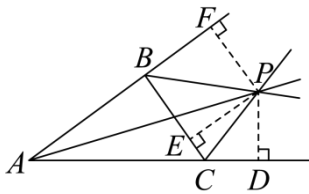


图1

(2) ①证明: 如图, 分别延长射线 BA 、 BC ,

$\because$ 点 O 是 $\triangle ABC$ 的一个旁心,

$\therefore AO$ 、 CO 分别平分 $\angle CAE$ 、 $\angle ACF$,

$$\therefore \angle OAC = \frac{1}{2} \angle CAE, \quad \angle OCA = \frac{1}{2} \angle ACF;$$

$$\because \angle CAE = \angle B + \angle ACB, \quad \angle ACF = \angle B + \angle BAC, \quad \angle B + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle CAE + \angle ACF = \angle B + \angle B + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ + \angle B,$$

$$\therefore \angle O = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle CAE + \angle ACF)$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ + \angle B)$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2} \angle B;$$

$$\text{即 } \angle O = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle ABC;$$

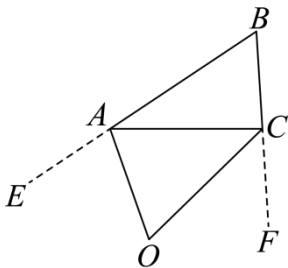


图2

②解: 由题意得: $\angle ACO_1$ 、 $\angle BCO_3$ 分别是 $\angle ACB$ 的补角的平分线,

$$\text{则 } \angle ACO_1 + \angle BCO_3 + \angle ACB = 180^\circ,$$

即 O_1O_3 过点 C ; 同理 O_1O_2 过点 A ;

$$\text{由①知, } \angle O_2O_1O_3 = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 120^\circ;$$

$$\because O_1O_2 = O_1O_3,$$

$$\therefore \angle O_1 O_2 O_3 = \angle O_1 O_3 O_2 = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle O_2 O_1 O_3) = 75^\circ;$$

同理得 $\angle ACB = \angle CAB = 30^\circ$,

$$\therefore AB = BC = 2, \quad \angle BAO_2 = \angle CAO_1 = 75^\circ, \quad \angle BCO_3 = \angle ACO_1 = 75^\circ,$$

$\therefore \triangle ABO_2$ 、 $\triangle CBO_3$ 都是等腰三角形,

$$\therefore \angle ABO_2 = \angle CBO_3 = 30^\circ, \quad BO_2 = BO_3 = AB = BC = 2;$$

$\therefore B$ 点是 $O_2 O_3$ 的中点, $\triangle BAO_2 \cong \triangle BCO_3$ (SAS);

$$\therefore O_2 O_3 = 2BO_2 = 4, \quad AO_2 = CO_3;$$

连接 $O_1 B$ 、 $O_2 C$, 过 A 作 $AD \perp O_3 O_2$ 于 D ,

$$\because O_1 O_2 = O_1 O_3,$$

$$\therefore O_1 B \perp O_2 O_3, \quad AO_1 = CO_1;$$

$$\because BO_2 = BO_3 = BC = 2,$$

$$\therefore \angle BCO_2 = \angle BO_2 C = \frac{1}{2} \angle CBO_3 = 15^\circ,$$

$$\text{则 } \angle BO_2 C + \angle O_2 O_3 O_1 = 90^\circ,$$

$$\text{即 } O_2 C \perp O_1 O_3;$$

$$\because AD \perp O_3 O_2, \quad \angle ABO_2 = 30^\circ,$$

$$\therefore AD = \frac{1}{2} AB = 1,$$

$$\text{由勾股定理得: } BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore O_2 D = BO_2 - BD = 2 - \sqrt{3},$$

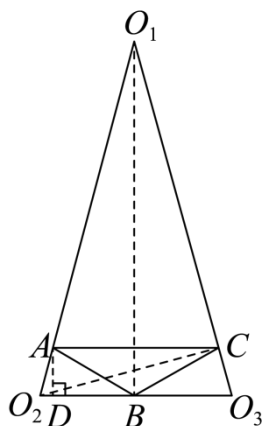
$$\therefore AO_2 = \sqrt{AD^2 + O_2 D^2} = \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1);$$

在 $\text{Rt} \triangle O_1 O_2 C$ 中, 设 $O_2 C = a$, 则 $O_1 O_2 = 2O_2 C = 2a$,

$$\text{由勾股定理得 } AO_1 = CO_1 = \sqrt{O_1 O_2^2 - O_2 C^2} = \sqrt{3}a,$$

$$\therefore AO_2 = O_1 O_2 - AO_1 = 2a - \sqrt{3}a = \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1),$$

$$\text{解得: } a = \sqrt{2} + \sqrt{6};$$

$$\therefore S_{\triangle O_1 O_2 O_3} = \frac{1}{2} O_2 O_3 \cdot O_1 B = \frac{1}{2} \times 4 \times (4 - 2\sqrt{3}) = 8 - 4\sqrt{3}.$$


定理, 等腰三角形的判定与性质, 含 30° 直角三角形性质等知识, 灵活运用这些知识解决问题是解题的关键.