

2023 学年第二学期初二年级期末素养分析数学学科试卷

一、选择题：(本大题共 6 题，每题 3 分，满分 18 分)

1. 一次函数 $y = -3x + 1$ 的图象不经过

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】C

【解析】

【分析】根据一次函数的图像与性质解答即可.

【详解】 $\because -3 < 0, 1 > 0,$

$\therefore$ 图像经过一、二、四象限，不经过第三象限.

故选 C.

【点睛】本题考查了一次函数图象与系数的关系：对于 $y = kx + b$ (k 为常数， $k \neq 0$)，当 $k > 0, b > 0$ ， $y = kx + b$ 的图象在一、二、三象限；当 $k > 0, b < 0$ ， $y = kx + b$ 的图象在一、三、四象限；当 $k < 0, b > 0$ ， $y = kx + b$ 的图象在一、二、四象限；当 $k < 0, b < 0$ ， $y = kx + b$ 的图象在二、三、四象限.

2. 用换元法解分式方程 $\frac{x-2}{x} - \frac{3x}{x-2} = 2$ 时，如果设 $\frac{x-2}{x} = y$ ，那么原方程可化为 ()

- A. $y^2 + 2y - 3 = 0$ B. $y^2 - 2y - 3 = 0$
C. $y^2 - 3y - 2 = 0$ D. $y^2 - y - 2 = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了换元法解分式方程，一元二次方程，设 $\frac{x-2}{x} = y$ ，根据题意，化简方程，即可求解.

【详解】解：设 $\frac{x-2}{x} = y$ ，原方程可化为 $y - \frac{3}{y} = 2$

$$\text{即 } y^2 - 2y - 3 = 0$$

故选：B.

3. 下列方程中，没有实数解的是 ()

- A. $x^2 - 3 = 0$ B. $\frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{x-2}$ C. $x^2 + y^2 = 0$ D. $\sqrt{x-4} + 1 = 0$

【答案】D

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程，分式方程，二元二次方程，无理方程，根据题意逐项分析判断，即可求解.

【详解】 解： A. $x^2 - 3 = 0$ ，解得： $x = \pm\sqrt{3}$ ，故 A 选项不正确，不符合题意；

$$\text{B. } \frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{x-2}$$

方程两边同时乘以 $x-2$ ，得， $x^2 = 4$ ，

解得： $x = 2$ 或 $x = -2$ ，

经检验， $x = 2$ 是原方程的增根，原方程的解为 $x = -2$ ，

故 B 选项不正确，不符合题意；

C. $x^2 + y^2 = 0$ ，方程有实数解，故 C 选项不正确，不符合题意；

$$\text{D. } \sqrt{x-4} + 1 = 0,$$

$$\therefore \sqrt{x-4} = -1$$

$$\text{又} \because \sqrt{x-4} \geq 0$$

$\therefore$ 原方程无实数解，

故选： D.

4. 一个多边形的内角和与外角和相等，这个多边形是 ()

A. 三角形

B. 四边形

C. 五边形

D. 六边形

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了多边形的内角和公式与外角和定理，根据多边形的内角和公式 $(n-2) \cdot 180^\circ$ 与多边形的外角和定理列式进行计算是解题的关键.

【详解】 解： 设多边形的边数为 n ，根据题意得

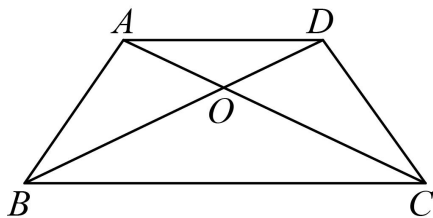
$$(n-2) \cdot 180^\circ = 360^\circ,$$

解得： $n = 4$.

所以这个多边形是四边形.

故选： B.

5. 如图，梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB = CD$ ， O 为对角线 AC 与 BD 的交点，那么下列结论正确的是 ()



- A. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ B. $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$ D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据平面向量的定义与运算法则即可判断各选项.

【详解】解: $\because$ 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = CD$,

$\therefore \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD}$, 故 A 不符合题意;

$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$, 故 B 符合题意;

$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$, 故 C 不符合题意;

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$, 故 D 不符合题意;

故选 B

【点睛】本题考查的是向量的线性运算, 熟记运算法则是解本题的关键.

6. 下列命题中, 真命题是 ()

- A. 一组对边平行, 且对角线平分一组对角的四边形是菱形
 B. 一组对边平行, 且另一组对边相等的四边形是平行四边形
 C. 一组对边平行, 且对角线相等的四边形是等腰梯形
 D. 一组对边平行, 且一组邻边互相垂直的四边形是矩形

【答案】A

【解析】

【分析】通过已知条件推导出对应图形以及根据平行四边形、等腰梯形、正方形、矩形和菱形的判定定理判断即可.

【详解】解: A、一组对边平行, 且对角线平分一组对角的四边形是菱形, 原命题是真命题;

B、一组对边平行, 且另一组对边相等的四边形可能是等腰梯形, 原命题是假命题;

C、一组对边平行, 且对角线相等的四边形可能是矩形, 原命题是假命题;

D、一组对边平行, 且一组邻边互相垂直的四边形可能是直角梯形, 原命题是假命题;

故选: A.

二、填空题：(本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分)

7. 已知一次函数 $y = (k+1)x - 1$ 与直线 $y = \frac{4}{3}x$ 平行，那么 $k =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的平移，根据平行的两直线的解析式的一次项系数相等，即可求解.

【详解】 解： $\because$ 一次函数 $y = (k+1)x - 1$ 与直线 $y = \frac{4}{3}x$ 平行，

$$\therefore k+1 = \frac{4}{3},$$

$$\text{解得： } k = \frac{1}{3},$$

$$\text{故答案为： } \frac{1}{3}.$$

8. 当 a 为_____时，关于 x 的方程 $ax - 5 = 3x$ 无解.

【答案】 3

【解析】

【分析】 此题考查了一元一次方程的解，由方程无解的条件确定出 a 的值即可.

【详解】 解： $ax - 5 = 3x$

$$\therefore (a-3)x = 5$$

$$\because \text{原方程无解， } a-3 = 0$$

$$\text{解得： } a = 3,$$

$$\text{故答案为： } 3.$$

9. 方程 $\frac{1}{5}x^3 + 25 = 0$ 的根是_____.

【答案】 -5

【解析】

【分析】 本题考查了立方根的应用，掌握立方根的定义是解题关键. 根据立方根的定义解方程即可.

【详解】 解： $\frac{1}{5}x^3 + 25 = 0,$

$$\frac{1}{5}x^3 = -25,$$

$$x^3 = -125,$$

$$x = -5,$$

$$\text{故答案为： } -5.$$

10. 方程 $\sqrt{8-2x} = -x$ 的根是_____.

【答案】 $x = -4$

【解析】

【分析】 方程两边平方转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到无理方程的解.

【详解】 解：两边平方得： $8-2x=x^2$,

整理得： $(x+4)(x-2)=0$,

可得 $x+4=0$ 或 $x-2=0$,

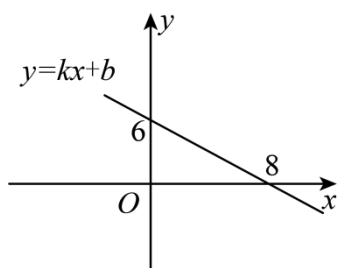
解得： $x=-4$ 或 $x=2$,

经检验 $x=2$ 是增根，无理方程的解为 $x=-4$.

故答案为 $x=-4$

【点睛】 此题考查了无理方程，利用了转化的思想，解无理方程注意要检验.

11. 已知一次函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$, k 、 b 均为常数) 的图象如图所示，那么关于 x 的不等式 $kx+b>0$ 的解集是_____.



【答案】 $x < 8$

【解析】

【分析】 此题主要考查了一次函数与一元一次不等式的关系从图象上得到函数的增减性及与 x 轴的交点的横坐标，即能求得不等式 $kx+b>0$ 的解集.

【详解】 解：函数 $y=kx+b$ 的图象经过点 $(8,0)$ ，并且函数值 y 随 x 的增大而减小，

所以当 $x<8$ 时，函数值大于 0，即关于 x 的不等式 $kx+b>0$ 的解集是 $x<8$.

故答案为： $x<8$.

12. 在一个不透明的盒子中放入标号分别为 1、2、9、4、5、6、7、8、9 的形状、大小、质地完全相同的 9 个球，充分混合后，从中取出一个球，标号为合数的概率_____.

【答案】 $\frac{5}{9}$

【解析】

【分析】 随机摸出一个小球共有 9 种等可能结果，其中摸出的小球标号为合数的有 5 种结果，根据概率公

$\because E、F、G、H$ 分别为各边的中点, $AC=6$, $BD=8$,

$\therefore EF \parallel AC$, $GH \parallel AC$, $EH \parallel BD$, $FG \parallel BD$,

$$EF = \frac{1}{2}AC = 3, \quad EH = \frac{1}{2}BD = 4,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形,

$\because$ 对角线 $AC、BD$ 相互垂直,

$$\therefore \angle AOD = \angle EMO = \angle ENO = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $EMON$ 是矩形,

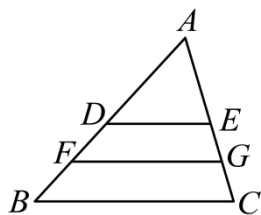
$$\therefore \angle MEN = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是矩形,

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 的面积为: $3 \times 4 = 12$.

故答案为: 12.

15. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, 点 $D、E$ 分别是边 $AB、AC$ 中点, $DE=5$, 点 $F、G$ 分别是 $DB、EC$ 的中点, 则 $FG =$ _____.



【答案】 $\frac{15}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了三角形的中位线及梯形的中位线, 熟练掌握两个定理是解题的关键. 根据三角形的中位线平行于第三边并且等于第三边的一半求出 $BC=10$, 再根据梯形的中位线平行于两底边并且等于两底和的一半求解即可.

【详解】 解: $\because$ 点 $D、E$ 分别是边 $AB、AC$ 中点,

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$$\therefore DE = \frac{1}{2}BC, \quad DE \parallel BC,$$

$$\because DE = 5,$$

$$\therefore BC = 10,$$

$\because$ 点 $F、G$ 分别是 $DB、EC$ 的中点,

$\therefore FG$ 是梯形 $BCED$ 的中位线,

$$\therefore FG = \frac{1}{2}(DE + BC) = \frac{15}{2},$$

故答案为: $\frac{15}{2}$

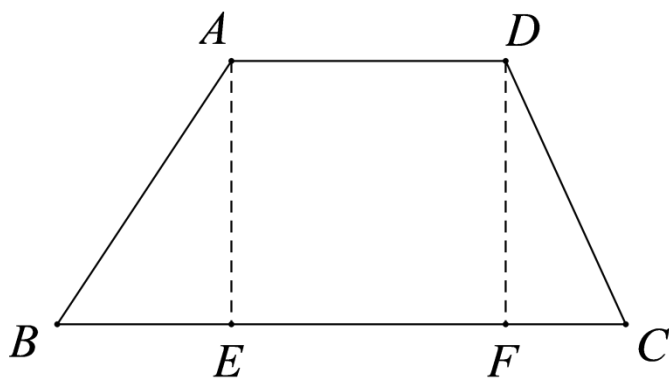
16. 已知高为12的梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle B$ 是锐角, $AD = 8$, $AB = 15$, $CD = 13$, 那么梯形 $ABCD$ 的面积为_____.

【答案】 180 或 120

【解析】

【分析】 本题考查了梯形的性质, 勾股定理; 根据题意分两种情况讨论, 分别画出图形, 求得 AC 的长, 根据梯形的面积公式, 即可.

【详解】 解: 如图所示, 过点 A 作 $AE \perp BC$ 于点 E , 过点 D 作 $DF \perp BC$ 于点 F ,



$\because$ 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是矩形,

$$\therefore EF = AD = 8, \quad AE = DF = 12,$$

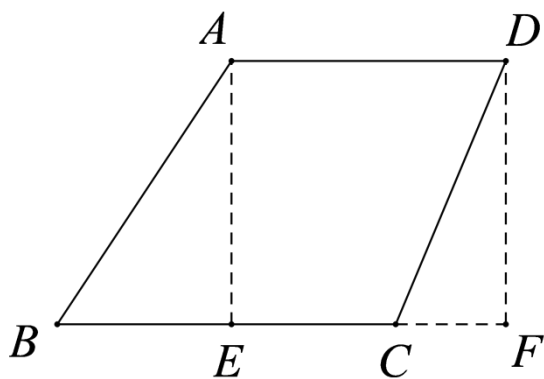
$$\therefore BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = 9,$$

$$\therefore CF = \sqrt{CD^2 - DF^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5,$$

$$\therefore BC = BE + EF + CF = 9 + 8 + 5 = 22.$$

$$\therefore S_{\text{梯形}ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \times AE = \frac{1}{2} \times (8 + 22) \times 12 = 180$$

如图, $BC = BE + EF - CF = 9 + 8 - 5 = 12$.



$$S_{\text{梯形}ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \times AE = \frac{1}{2} \times (8 + 12) \times 12 = 120$$

故答案为：180 或 120.

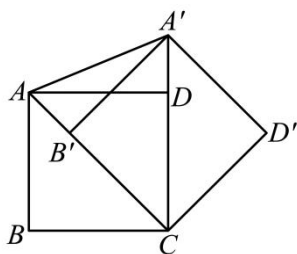
17. 如果把正方形 $ABCD$ 绕点 C 旋转得到正方形 $A'B'CD'$ ，点 B' 落在对角线 AC 上，点 A' 落在 CD 的延长线上，那么 $\angle AA'B' =$ _____ 度.

【答案】 22.5

【解析】

【分析】 本题考查了旋转的性质，正方形的性质，等腰三角形的性质以及三角形内角和定理；根据旋转的性质以及正方形的性质可得 $\angle ACA' = 45^\circ$ ， $AC = A'C$ ，进而得出 $\angle CAA' = 67.5^\circ$ ，进而即可求解.

【详解】 解： 如图所示，



$$\therefore \angle ACA' = 45^\circ, AC = A'C$$

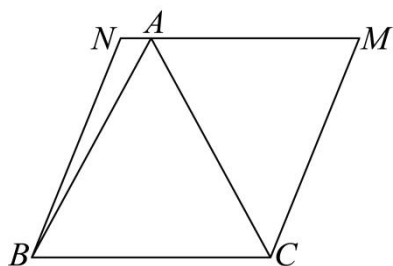
$$\therefore \angle CAA' = \frac{1}{2}(180^\circ - 45^\circ) = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle AA'B' = 90^\circ - \angle A'AB' = 22.5^\circ$$

故答案为： 22.5 .

18. 对于任意三角形，如果存在一个菱形，使得这个菱形的一条边与三角形的一条边重合，且三角形的这条边所对的顶点在菱形的这条边的对边上，那么称这个菱形为该三角形的“友好菱形”. 问题: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC, BC = 6$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 S . 如果 $\triangle ABC$ 存在“友好菱形”为菱形 $BCMN$, 那么 S 的

取值范围是_____.



【答案】 $9\sqrt{3} \leq S \leq 18$

【解析】

【分析】由 $\triangle ABC$ 的面积为 S 可得 $\triangle ABC$ 的高为 $\frac{S}{3}$ ，然后再分三角形的高取最小值和最大值两种情况求解即可.

【详解】解： $\because \triangle ABC$ 的面积为 S ,

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times BC \times h,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 边 } BC \text{ 上的高为 } \frac{S}{3},$$

如图：当高取最小值时， $\triangle ABC$ 为等边三角形， A 与 M 或 N 或 MN 上重合，

如图：过 A 作 $AD \perp BC$ ，垂足为 D ，

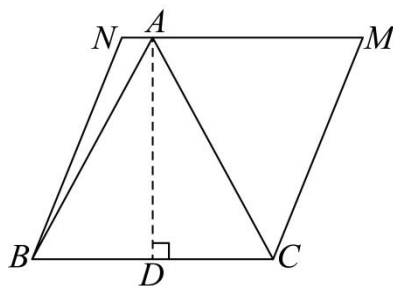
$\because$ 等边三角形 ABC , $BC = 6$,

$$\therefore \angle ABC = 60^\circ, BC = 6, \angle BAD = 30^\circ,$$

$$\therefore BD = 3,$$

$$\therefore AD = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3},$$

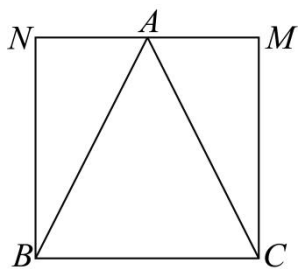
$$\therefore \frac{S}{3} = 3\sqrt{3}, \text{ 即 } S = 9\sqrt{3};$$



如图：当高取最大值时，菱形为正方形，

$\therefore A$ 在 MN 中点，

$$\therefore \frac{S}{3} = 6, \text{ 即 } S = 18$$



$$\therefore 9\sqrt{3} \leq S \leq 18.$$

故填: $9\sqrt{3} \leq S \leq 18$.

【点睛】本题主要考查了菱形的性质、正方形的性质、等边三角形的性质以及勾股定理，考查知识点较多，灵活应用相关知识成为解答本题的关键.

三、简答题: (本大题共 4 题, 每题 6 分, 满分 24 分)

19. 解方程: $\frac{1}{x-1} - 1 = \frac{2x}{x^2-1}$.

【答案】 $x = -2$

【解析】

【分析】本题考查了解分式方程，解一元二次方程，先去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解.

【详解】解: $\frac{1}{x-1} - 1 = \frac{2x}{x^2-1}$,

方程两边同时乘以 $(x+1)(x-1)$ 得, $x+1-x^2+1=2x$,

即 $x^2+x-2=0$,

解得: $x=-2$ 或 $x=1$,

经检验, 当 $x=1$ 时, $(x+1)(x-1)=0$,

当 $x=-2$ 时, $(x+1)(x-1) \neq 0$,

$\therefore x=-2$ 是原方程的解.

20. 解方程组:
$$\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \\ 2x - y = 15 \end{cases}$$

【答案】 $\begin{cases} x_1 = 9 \\ y_1 = 3 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 10 \\ y_2 = 5 \end{cases}$.

【解析】

【分析】由①可得 $x-3y=0$ 或 $x-2y=0$ ，进而转化为 2 个二元一次方程组，解方程组求解即可。

【详解】解：
$$\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 & \text{①} \\ 2x - y = 15 & \text{②} \end{cases},$$

由①得 $x-3y=0$ 或 $x-2y=0$ ，

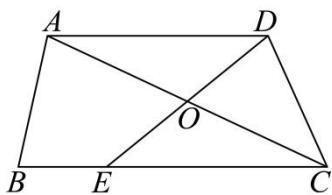
所以原方程组化为
$$\begin{cases} x-3y=0 \\ 2x-y=15 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x-2y=0 \\ 2x-y=15 \end{cases},$$

解两个方程组得
$$\begin{cases} x=9 \\ y=3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=10 \\ y=5 \end{cases},$$

所以原方程组的解为
$$\begin{cases} x_1=9 \\ y_1=3 \end{cases}, \begin{cases} x_2=10 \\ y_2=5 \end{cases}.$$

【点睛】本题考查了解二元二次方程组，降次消元是解题的关键。

21. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，点 O 是对角线 AC 的中点， DO 的延长线与 BC 相交于点 E ，设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ ， $\overrightarrow{BE}=\vec{c}$ 。



- (1) 试用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 表示向量： $\overrightarrow{ED} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；
- (2) 写出图中所有与 $\overrightarrow{AD}$ 互为相反向量的向量： $\underline{\hspace{2cm}}$ ；
- (3) 求作： $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{OC}$ 。（画出所求向量，并直接写出结论）

【答案】(1) $-\vec{a} - \vec{c} + \vec{b}$

(2) $\overrightarrow{DA}$ 和 $\overrightarrow{CE}$

(3) 见详解

【解析】

【分析】(1) 由 $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$ ， $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ ， $\overrightarrow{BE}=\vec{c}$ ，代入即可；

(2) 由 $\triangle AOD \cong \triangle COE$ ，可知 $AD=EC$ ，因此图中与 $\overrightarrow{AD}$ 互为相反向量的向量有 $\overrightarrow{DA}$ 和 $\overrightarrow{CE}$ ；

(3) 如图，作 $DM \parallel OC$ ， $CM \parallel OD$ ，则向量 $\overrightarrow{AM}$ 即为所求。

【小问 1 详解】

解: $\because \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BE} = \vec{c}$

$$\therefore \overrightarrow{ED} = -\vec{a} - \vec{c} + \vec{b}.$$

故答案为: $-\vec{a} - \vec{c} + \vec{b}$;

【小问 2 详解】

解: $\because AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle DAO = \angle ECO,$$

$\because$ 点 O 是对角线 AC 的中点,

$$\therefore AO = OC,$$

$$\therefore \angle AOD = \angle COE$$

$$\therefore \triangle AOD \cong \triangle COE,$$

$$\therefore AD = EC,$$

$\therefore$ 图中与 $\overrightarrow{AD}$ 互为相反向量的向量有 $\overrightarrow{DA}$ 和 $\overrightarrow{CE}$,

故答案为: $\overrightarrow{DA}$ 和 $\overrightarrow{CE}$;

【小问 3 详解】

如图, 向量 $\overrightarrow{AM}$ 即为所求

作 $DM \parallel OC$, $CM \parallel OD$,

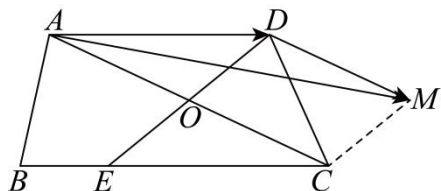
则四边形 $DOCM$ 是平行四边形,

$$\therefore OC = DM,$$

$$\therefore \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DM},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AM},$$

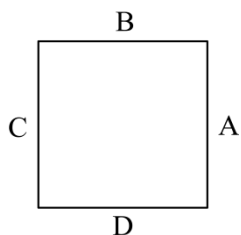
则向量 $\overrightarrow{AM}$ 即为所求.



【点睛】 本题考查平面向量三角形法则、四边形法则, 平行四边形的判定与性质, 全等三角形的判定与性质, 相反向量的定义等知识, 解题的关键是熟练掌握基本概念.

22. 如图, 时下有一种四人对战桌游十分流行, 游戏开始前, 四个人通常经过抽签决定座位 A 、 B 、 C 、 D . 小

明和小张一同报名参加了这项桌游.



(1) 小明抽中 A 座位的概率为_____;

(2) 若面对面座位上的两人视为游戏中的盟友, 求小明和小张成为盟友的概率. (请用“画树状图”或“列表”等方法写出分析过程)

【答案】(1) $\frac{1}{4}$

(2) $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】本题考查列表法与树状图法、概率公式, 熟练掌握列表法与树状图法以及概率公式是解答本题的关键.

(1) 直接利用概率公式可得答案.

(2) 列表可得出所有等可能的结果数以及小明和小张成为盟友的结果数, 再利用概率公式可得出答案.

【小问 1 详解】

解: 由题意得, 小明抽中 A 座位的概率为 $\frac{1}{4}$;

【小问 2 详解】

列表如下:

小张 \ 小明	A	B	C	D
A		(A, B)	(A, C)	(A, D)
B	(B, A)		(B, C)	(B, D)
C	(C, A)	(C, B)		(C, D)
D	(D, A)	(D, B)	(D, C)	

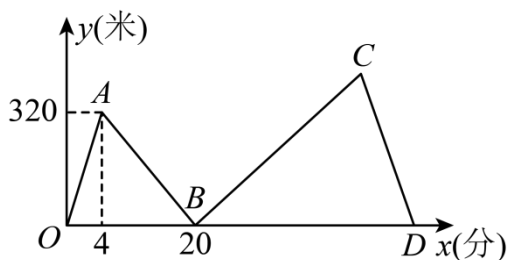
共有 12 种等可能的结果, 其中小明和小张成为盟友的结果有: (A, C) , (B, D) , (C, A) , (D, B) , 共 4 种结果,

$\therefore$ 小明和小张成为盟友的概率为 $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

四、解答题: (本大题共 4 题, 第 23、24 每题 8 分, 第 25、26 题 9 分, 满分 34 分)

23. 小杰、小明两人在一段笔直的滨江步道上同起点、同终点、同方向匀速步行 3200 米, 先到终点的人原地休息. 已知小杰先出发 4 分钟, 在整个步行过程中, 小杰、小明两人间的距离 y (米) 与小杰出发的时

间 x (分) 之间的关系如图中折线 $OA-AB-BC-CD$ 所示.



- (1) 求线段 AB 的表达式, 并写出自变量 x 的取值范围;
- (2) 求小明的步行速度;
- (3) 求小明比小杰早几分钟到达终点?

【答案】 (1) $y = -20x + 400$ ($4 \leq x \leq 20$)

- (2) 小明的步行速度为 100 米/分
- (3) 小明比小杰早 4 分钟到达终点

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的应用;

(1) 根据图示, 设线段 AB 的表达式为: $y = kx + b$, 把 $(4, 320)$, $(20, 0)$ 代入得到关于 k , b 的二元一次方程组, 解之, 即可得到答案,

(2) 根据线段 OA , 求出甲的速度, 根据图示可知: 乙在点 B 处追上甲, 根据速度 = 路程 $\div$ 时间, 计算求值即可,

(3) 根据图示, 求出二者相遇时与出发点的距离, 进而求出与终点的距离, 结合 (2) 的结果, 分别计算出相遇后, 到达终点二者所用的时间, 二者的时间差即可所求答案.

【小问 1 详解】

设线段 AB 的表达式为: $y = kx + b$ ($4 \leq x \leq 16$),

把 $(4, 320)$, $(20, 0)$ 代入得:

$$\begin{cases} 4k + b = 320 \\ 20k + b = 0 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = -20 \\ b = 400 \end{cases},$$

即线段 AB 的表达式为: $y = -20x + 400$ ($4 \leq x \leq 20$),

【小问 2 详解】

由线段 OA 可知: 小杰的速度为: $\frac{320}{4} = 80$ (米/分),

小明的步行速度为: $\frac{320 + (20-4) \times 80}{20-4} = 100$ (米/分),

答: 小明的步行速度为 100 米/分,

【小问 3 详解】

在 B 处小杰、小明相遇时, 与出发点的距离为: $100 \times (20-4) = 1600$ (米),

与终点的距离为: $3200 - 1600 = 1600$ (米),

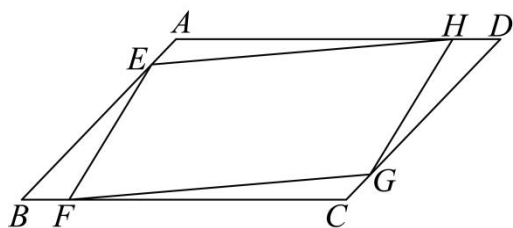
相遇后, 到达终点小杰所用的时间为: $\frac{1600}{80} = 20$ (分),

相遇后, 到达终点小明所用的时间为: $\frac{1600}{100} = 16$ (分),

$20 - 16 = 4$ (分),

答: 小明比小杰早 4 分钟到达终点.

24. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 、 F 、 G 、 H 分别在边 AB 、 BC 、 CD 、 DA 上, $BE = DG$, $BF = DH$.



(1) 求证: 四边形 $EFGH$ 是平行四边形;

(2) 当 $AB = BC$, 且 $BE = BF$ 时, 请判断四边形 $EFGH$ 的形状并证明.

【答案】(1) 见解析 (2) 四边形 $EFGH$ 是矩形, 证明见解析

【解析】

【分析】本题考查了矩形的判定, 平行四边形的判定和性质, 全等三角形的判定和性质;

(1) 根据全等证得 $EF = HG$, $EH = FG$, 对边相等, 即可证得四边形 $EFGH$ 是平行四边形;

(2) 证得四边形 $EFGH$ 中一个角为直角, 即可证得四边形 $EFGH$ 是矩形.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB = CD$, $AD = BC$, $\angle B = \angle D$, $\angle A = \angle C$,

$\because BE = DG$, $BF = DH$, 且 $\angle B = \angle D$,

$\therefore \triangle BEF \cong \triangle DGH$ (SAS),

$\therefore EF = HG$,

同理可得 $EH = FG$,

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形;

【小问 2 详解】

四边形 $EFGH$ 是矩形, 证明如下,

$\because AB = BC, BE = BF$

$\therefore AB = BC = CD = AD, BE = BF = DH = DG,$

$\therefore AE = AH,$

$\because AD \parallel BC,$

$\therefore \angle B + \angle A = 180^\circ,$

$\because BE = BF, AE = AH,$

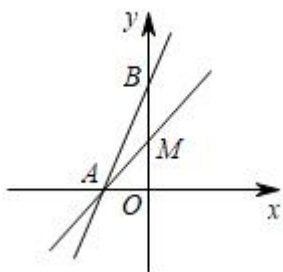
$\therefore \angle BEF = \angle BFE = \frac{180^\circ - \angle B}{2}, \angle AEH = \angle AHE = \frac{180^\circ - \angle A}{2},$

$\therefore \angle AEH + \angle BEF = 90^\circ,$

$\therefore \angle FEH = 90^\circ,$

$\therefore$ 平行四边形 $EFGH$ 是矩形.

25. 如图, 在平面直角坐标系中, 函数 $y = 2x + 6$ 的图象分别交 x 轴, y 轴于 A, B 两点, 过点 A 的直线交 y 轴正半轴于点 M , 且点 M 为线段 OB 的中点.



(1) 求直线 AM 的函数解析式;

(2) 试在直线 AM 上找一点 P , 使得 $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle AOB}$, 请求出点 P 的坐标;

(3) 若点 N 为坐标平面内任意一点, 在坐标平面内是否存在这样的点 N , 使以 A, B, M, N 为顶点的四边形是平行四边形? 若存在, 请直接写出所有点 N 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $y = x + 3$

(2) $(-9, -6)$ 或 $(3, 6)$

(3) 存在, $(-3, -3), (-3, 3)$ 或 $(3, 9)$

【解析】

【分析】(1) 通过函数 $y = 2x + 6$ 求出 A 、 M 两点坐标，由两点坐标求出直线 AM 的函数解析式；

(2) 设点 P 的坐标为 $(x, x+3)$ ，按照等量关系 “ $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle AOB}$ ” 即可求出；

(3) 设点 N 的坐标为 (m, n) ，结合平行四边形的性质和中点坐标公式，分三种情况进行讨论即可。

【小问 1 详解】

当 $x = 0$ 时， $y = 2x + 6 = 6$ ，

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(0, 6)$ ，即 $OB = 6$ ，

当 $y = 0$ 时， $2x + 6 = 0$ ，

解得： $x = -3$ ，

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-3, 0)$ ，即 $OA = 3$ ，

$\therefore$ 点 M 为线段 OB 的中点，

$\therefore OM = 3$ ，即点 M 的坐标为 $(0, 3)$ 。

设直线 AM 的函数解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$ ，

将 $A(-3, 0)$ ， $M(0, 3)$ ，代入 $y = kx + b$ ，

$$\text{得: } \begin{cases} -3k + b = 0 \\ b = 3 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k = 1 \\ b = 3 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AM 的函数解析式为 $y = x + 3$ ；

【小问 2 详解】

设点 P 的坐标为 $(x, x+3)$ ，

$\therefore OM = 3$ ， $OB = 6$ ，

$\therefore MB = 3$ ，

$\therefore S_{\triangle ABP} = S_{\triangle AOB}$ ，

$$\therefore \frac{1}{2} \times BM \cdot |x_P - x_A| = \frac{1}{2} \times OA \cdot OB,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times 3 \times |x + 3| = \frac{1}{2} \times 3 \times 6,$$

解得: $x_1 = -9$, $x_2 = 3$,

即: $y_1 = x_1 + 3 = -6$, $y_2 = x_2 + 3 = 6$,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-9, -6)$ 或 $(3, 6)$;

【小问 3 详解】

存在, 理由如下:

设点 N 的坐标为 (m, n) ,

$\because$ 点 M 的坐标为 $(0, 3)$, 点 B 的坐标为 $(0, 6)$, 点 A 的坐标为 $(-3, 0)$,

分三种情况考虑:

$$\text{①当 } AM \text{ 为对角线时, } \begin{cases} \frac{0+m}{2} = \frac{-3+0}{2} \\ \frac{6+n}{2} = \frac{0+3}{2} \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m = -3 \\ n = -3 \end{cases},$$

$\therefore$ 点 N_1 的坐标为 $(-3, -3)$;

$$\text{②当 } AB \text{ 为对角线时, } \begin{cases} \frac{0+m}{2} = \frac{-3+0}{2} \\ \frac{3+n}{2} = \frac{0+6}{2} \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m = -3 \\ n = 3 \end{cases},$$

$\therefore$ 点 N_2 的坐标为 $(-3, 3)$;

$$\text{③当 } BM \text{ 为对角线时, } \begin{cases} \frac{-3+m}{2} = \frac{0+0}{2} \\ \frac{0+n}{2} = \frac{3+6}{2} \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m = 3 \\ n = 9 \end{cases},$$

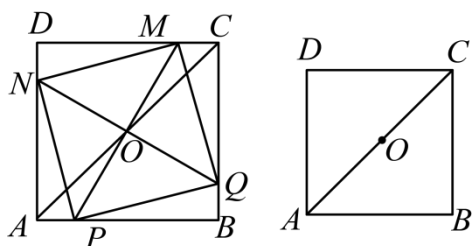
$\therefore$ 点 N_3 的坐标为 $(3, 9)$.

综上所述: 在坐标平面内存在点 N , 使以 A , B , M , N 为顶点的四边形是平行四边形, 点 N 的坐标为

$(-3, -3)$, $(-3, 3)$ 或 $(3, 9)$.

【点睛】此题考查一次函数综合题，解题关键在于求出 A 、 M 两点坐标，再利用待定系数法求解解析式.

26. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， $AB = 8\text{cm}$ ，点 O 是对角线 AC 的中点，动点 P 、 Q 分别从点 A 、 B 同时出发，点 P 以 2cm/s 的速度沿边 AB 向终点 B 匀速运动，点 Q 以 4cm/s 的速度沿折线 $BC-CD$ 向终点 D 匀速运动，联结 PO 并延长交边 CD 于点 M ，联结 QO 并延长交折线 $DA-AB$ 于点 N ，联结 PQ 、 QM 、 MN 、 NP ，得到四边形 $PQMN$. 设点 P 的运动时间为 $x(\text{s})$ ($0 < x < 4$)，四边形 $PQMN$ 的面积为 $y\text{cm}^2$.



(1) BP 的长为 _____ cm ， CM 的长为 _____ cm ，(用含 x 的代数式表示)

(2) 求 y 关于 x 的函数解析式，并写出自变量 x 的取值范围；

(3) 当四边形 $PQMN$ 是轴对称图形时，请直接写出 x 的值.

【答案】(1) $(8-2x)$ ， $2x$

(2) $y = \begin{cases} 16x^2 - 48x + 64 & (0 < x \leq 2) \\ -16x + 64 & (2 < x < 4) \end{cases}$

(3) x 的值是 $\frac{4}{3}$ 或 $\frac{8}{3}$.

【解析】

【分析】(1) 根据正方形的性质得出 $\angle MCO = \angle PAO$ ， $\angle CMO = \angle APO$ ，即可证得 $\triangle MCO$ 和 $\triangle PAO$ 全等，从而得出 $CM = AP$ ；

(2) 分 $0 < x \leq 2$ ， $2 < x < 4$ 两种情况分别画出图形，根据正方形的面积、直角三角形的面积、平行四边形的面积即可求解；

(3) 根据 (2) 中的图形，分四边形 $PQMN$ 为矩形、菱形分别求解即可.

【小问 1 详解】

解：由题意得， $AP = 2x \text{ cm}$ ， $BQ = 4x \text{ cm}$ ，

$\because AB = 8\text{cm}$ ，

$$\therefore BP = AB - AP = (8 - 2x) \text{ cm},$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle MCO = \angle PAO, \quad \angle CMO = \angle APO,$$

$\because$ 点 O 是对角线 AC 的中点,

$$\therefore CO = AO,$$

在 $\triangle MCO$ 和 $\triangle PAO$ 中,

$$\begin{cases} \angle MCO = \angle PAO \\ \angle CMO = \angle APO, \\ CO = AO \end{cases}$$

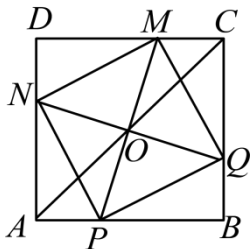
$$\therefore \triangle MCO \cong \triangle PAO (\text{AAS}),$$

$$\therefore CM = AP = 2x \text{ cm},$$

故答案为: $(8 - 2x)$, $2x$;

【小问 2 详解】

当 $0 < x \leq 2$ 时, 点 Q 在边 BC 上,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle QCO = \angle NAO, \quad \angle CQO = \angle ANO,$$

$\because$ 点 O 是对角线 AC 的中点,

$$\therefore CO = AO,$$

在 $\triangle QCO$ 和 $\triangle NAO$ 中,

$$\begin{cases} \angle QCO = \angle NAO \\ \angle CQO = \angle ANO, \\ CO = AO \end{cases}$$

$$\therefore \triangle QCO \cong \triangle NAO (\text{AAS}),$$

$$\therefore CQ = AN.$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore BC = AB = CD = AD = 8\text{cm},$$

$$\therefore BQ = 4x \text{ cm},$$

$$\therefore CQ = BC - BQ = (8 - 4x) \text{ cm},$$

$$\therefore AN = (8 - 4x) \text{ cm},$$

$$\therefore DM = CD - CM = (8 - 2x) \text{ cm}, \quad DN = AD - AN = 4x \text{ cm},$$

$$\therefore S_{\triangle APN} = \frac{1}{2} AP \cdot AN = \frac{1}{2} \times 2x(8 - 4x) = 8x - 4x^2$$

$$S_{\triangle CMQ} = \frac{1}{2} CM \cdot CQ = \frac{1}{2} \times 2x(8 - 4x) = 8x - 4x^2,$$

$$S_{\triangle BPQ} = \frac{1}{2} BP \cdot BQ = \frac{1}{2} (8 - 2x) \times 4x = 16x - 4x^2,$$

$$S_{\triangle DMN} = \frac{1}{2} DM \cdot DN = \frac{1}{2} (8 - 2x) \cdot 4x = 16x - 4x^2,$$

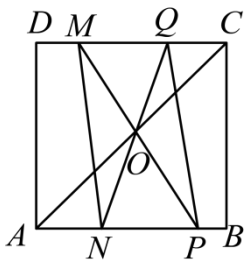
$$\therefore y = S_{\text{正方形}ABCD} - S_{\triangle APN} - S_{\triangle CMQ} - S_{\triangle BPQ} - S_{\triangle DMN}$$

$$= 8^2 - 2(8x - 4x^2) - 2(16x - 4x^2)$$

$$= 64 - 16x + 8x^2 - 32x + 8x^2$$

$$= 16x^2 - 48x + 64;$$

当 $2 < x < 4$ 时, 点 Q 在边 CD 上, 如图,



同上 $\triangle MCO \cong \triangle PAO$, $\triangle QCO \cong \triangle NAO$,

$$\therefore MO = PO, \quad QO = NO,$$

$\therefore$ 四边形 $PQMN$ 是平行四边形,

$$\because AP = 2x \text{ cm}, \quad AN = CQ = (4x - 8) \text{ cm},$$

$$\therefore PN = AP - AN = 2x - (4x - 8) = (-2x + 8) \text{ cm},$$

$$\therefore y = AD \cdot PN = 8(-2x + 8) = -16x + 64;$$

$$\text{综上, } y = \begin{cases} 16x^2 - 48x + 64 & (0 < x \leq 2) \\ -16x + 64 & (2 < x < 4) \end{cases};$$

【小问3详解】

①当 $0 < x \leq 2$ 时,

当四边形 $PQMN$ 是矩形时, 是轴对称图形, 此时 $\angle PQM = 90^\circ$

$$\because \angle PQB = 90^\circ - \angle MQC = \angle QMC, \quad \angle B = \angle MCQ = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle PQB \sim \triangle MCQ$$

$$\therefore \frac{PB}{CQ} = \frac{BQ}{CM}, \quad \text{即 } \frac{8-2x}{8-4x} = \frac{4x}{2x}, \quad \text{解得: } x = \frac{4}{3}$$

当四边形 $PQMN$ 是菱形时, $PQ = MQ$,

$$\therefore (8-2x)^2 + (4x)^2 = (2x)^2 + (8-4x)^2,$$

解得 $x = 0$ (舍去);

②当 $2 < x < 4$ 时,

当四边形 $PQMN$ 是矩形时, $PB = CQ$,

$$\therefore 8-2x = 4x-8,$$

$$\text{解得 } x = \frac{8}{3};$$

当四边形 $PQMN$ 是菱形时, $PN = PQ$,

$$\therefore (-2x+8)^2 = 8^2 + [4x-8-(8-2x)]^2,$$

$$\because \Delta < 0,$$

$\therefore$ 方程无解, 舍去;

综上, 当四边形 $PQMN$ 是轴对称图形时, x 的值是 $\frac{4}{3}$ 或 $\frac{8}{3}$.

【点睛】 本题考查了正方形的性质, 三角形全等的判定与性质, 矩形的性质, 菱形的性质, 相似三角形的判定和性质, 动点问题等知识, 熟练掌握这些知识是解题的关键.

