

2023-2024 学年八年级下学期期末模拟卷

数 学

(考试时间: 90 分钟 试卷满分: 100 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答第 I 卷时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。
3. 回答第 II 卷时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
4. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每题 2 分, 满分 12 分。在每个小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 请选出并在答题卡上将该项涂黑)

1. 一次函数 $y = -5x + 4$ 的图象不经过的象限是 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】C

【分析】本题考查了一次函数图象和系数的关系, 牢记当 $k < 0$, $b > 0$ 时图象经过第一、二、四象限是解题的关键。利用一次函数图象和系数的关系, 可得出一次函数 $y = -5x + 4$ 的图象经过第一、二、四象限。

【详解】解: $\because k = -5$, $b = 4$,

$\therefore$ 一次函数 $y = -5x + 4$ 的图象经过第一、二、四象限;

故选: C.

2. 下列方程中, 有实数根的是 ()

- A. $x^4 + 16 = 0$ B. $x^2 + 3x + 6 = 0$
C. $\frac{x^2 - 9}{x + 3} = 0$ D. $\sqrt{x - 3} + \sqrt{2x} = 0$

【答案】C

【分析】此题考查高次方程, 一元二次方程根的判别式的意义, 分式有意义的条件, 无理方程。利用在实数范围内, 一个数的偶数次幂不能为负数对 A 进行判断; 利用判别式的意义对 B 进行判断; 利用分子为 0 且分母不为 0 对 C 进行判断; 利用非负数的性质对 D 进行判断。

【详解】解: A、因为 $x^4 = -16 < 0$, 所以原方程没有实数解, 所以本选项不符合题意;

B、因为 $\Delta = 3^2 - 4 \times 6 = -15 < 0$, 所以原方程没有实数解, 所以本选项不符合题意;

C、 $x^2 - 9 = 0$, 且 $x + 3 \neq 0$,

解得 $x = 3$, 所以本选项符合题意;

D、 $\because x-3 \geq 0, 2x \geq 0,$

$\therefore x \geq 3,$

$\therefore \sqrt{x-3} + \sqrt{2x} \neq 0,$

$\therefore$ 原方程无解，所以本选项不符合题意；

故选：C.

3. 下列各式中错误的是()

A. $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$ B. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}| = 0$ C. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ D. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

【答案】A

【分析】根据向量的运算法则和运算律判断即可.

【详解】解：A. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ ，故本选项错误，B，C，D，均正确，

故选 A.

【点睛】本题考查了向量的运算，熟练掌握运算法则和运算律是解题关键.

4. “绿水青山就是金山银山”. 某工程队承接了 60 万平方米的荒山绿化任务，为了迎接雨季的到来，实际工作时每天的工作效率比原计划提高了 25%，结果提前 30 天完成了这一任务. 设实际工作时每天绿化的面积 x 万平方米，则下面所列方程中正确的是 ()

A. $\frac{60}{x} - \frac{60}{(1+25\%)x} = 30$ B. $\frac{60}{(1+25\%)x} - \frac{60}{x} = 3$
C. $\frac{60 \times (1+25\%)}{x} - \frac{60}{x} = 30$ D. $\frac{60}{x} - \frac{60 \times (1+25\%)}{x} = 30$

【答案】C

【分析】本题考查了分式方程的实际应用. 设实际工作时每天绿化的面积 x 万平方米，根据工作时间 = 工作总量 $\div$ 工作效率，结合提前 30 天完成任务，即可得出关于 x 的分式方程.

【详解】解：设实际工作时每天绿化的面积 x 万平方米，则原计划每天绿化的面积 $\frac{x}{1.25}$ 万平方米，

依题意得： $\frac{60}{\frac{x}{1.25}} - \frac{60}{x} = 30$ 即 $\frac{60 \times (1+25\%)}{x} - \frac{60}{x} = 30$.

故选：C.

5. 下列成语所反映的事件中，是确定事件的是 ()

A. 十拿九稳 B. 守株待兔 C. 水中捞月 D. 一箭双雕

【答案】C

【分析】本题考查的是必然事件、不可能事件、随机事件的概念. 必然事件指在一定条件下一定发生的事件. 不可能事件是指在一定条件下，一定不发生的事件. 不确定事件即随机事件是指在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件. 根据必然事件、不可能事件、随机事件的概念进行解答即可.

【详解】解：A. 十拿九稳是随机事件，不符合题意；

- B.守株待兔是随机事件，不符合题意；
C.水中捞月是不可能事件，是确定事件，符合题意；
D.一箭双雕是随机事件，不符合题意；

故选：C.

6. 已知四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， $AD \parallel BC$ ，下列判断中错误的是（ ）

- A. 如果 $AB = CD$ ， $AC = BD$ ，那么四边形 $ABCD$ 是矩形
B. 如果 $AB \parallel CD$ ， $OA = OB$ ，那么四边形 $ABCD$ 是矩形
C. 如果 $AD = BC$ ， $AC \perp BD$ ，那么四边形 $ABCD$ 是菱形
D. 如果 $OA = OC$ ， $AC \perp BD$ ，那么四边形 $ABCD$ 是菱形

【答案】A

【分析】本题考查了平行四边形、矩形、菱形、正方形的判定，根据平行四边形、矩形、菱形、正方形的判定方法逐项进行分析判定即可得答案.

【详解】解：A、如果 $AD \neq BC$ ， $AD \parallel BC$ ，那么四边形 $ABCD$ 是梯形，不是平行四边形也就不是矩形，故 A 选项错误，符合题意；

B、如果 $AB \parallel CD$ ， $AD \parallel BC$ ，则四边形 $ABCD$ 是平行四边形，则 $OA = \frac{1}{2}AC$ ， $OB = \frac{1}{2}BD$ ，因为 $OA = OB$

所以 $AC = BD$ ，那么平行四边形 $ABCD$ 是矩形，故 B 选项正确，不符合题意；

C、如果 $AD = BC$ ， $AD \parallel BC$ ，则四边形 $ABCD$ 是平行四边形，又 $AC \perp BD$ ，那么平行四边形 $ABCD$ 是菱形，故 C 选项正确，不符合题意；

D、如果 $AD \parallel BC$ ， $OA = OC$ ，则可以证得四边形 $ABCD$ 是平行四边形，又 $AC \perp BD$ ，那么平行四边形 $ABCD$ 是菱形，故 D 选项正确，不符合题意，

故选 A.

第 II 卷

二、填空题（本大题共 12 小题，每空 3 分，满分 36 分）

7. 一次函数 $y = -2x + 3$ 的截距是_____

【答案】3

【分析】本题考查了直线与纵坐标交点问题；令 $x = 0$ ，可求得 y 的值，从而可得截距.

【详解】解：对于 $y = -2x + 3$ ，令 $x = 0$ ， $y = 3$ ，

即截距为 3，

故答案为：3.

8. 计算： $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} =$ _____.

【答案】 $\vec{0}$

【分析】根据平面向量的加减法计算即可.

【详解】解: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$
 $= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}$,
 $= \vec{0}$,

故答案为: $\vec{0}$.

【点睛】本题考查了平面向量的加减法, 解题的关键是掌握平面向量的加减法计算法则.

9. 方程 $32 + x^5 = 0$ 的根是 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】-2

【分析】本题考查了解特殊的高次方程, 熟练掌握解法是解决本题的关键.
本题中移项, 得 $x^5 = -32$, 将问题转化为求一个已知数的 n 次方根的问题.

【详解】解: $32 + x^5 = 0$,
 $x^5 = -32$
 $x = -2$,

故答案为: -2

10. 如果方程 $\sqrt{x+7} - x = 1$, 那么 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】2

【分析】根据解无理方程的解法, 即可求解,
本题考查了, 解无理方程, 解题的关键是: 注意验根.

【详解】解: $\sqrt{x+7} - x = 1$,
移项, 得 $\sqrt{x+7} = 1 + x$,
两边平方, 得 $x+7 = (1+x)^2$,
整理得 $x^2 + x - 6 = 0$,
解得 $x_1 = 2$, $x_2 = -3$,

检验: 当 $x = 2$ 时, 方程左边 $= \sqrt{2+7} - 2 = 1 =$ 右边, 则 $x = 2$ 为原方程的解;
当 $x = -3$ 时, 方程左边 $= \sqrt{-3+7} - (-3) = 5 \neq$ 右边, 则 $x = -3$ 不是原方程的解;
所以原方程的解为 $x = 2$.

故答案为: 2.

11. 已知直线 $y = ax + b$ 平行于直线 $y = 2x - 1$, 且在 y 轴上的截距是 3, 那么这条直线的解析式是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $y = 2x + 3$

【分析】根据互相平行的直线的解析式的一次项系数的值相等确定出 a , 根据在 y 轴上的截距为 3, 计算出 b 值, 即可得解.

【详解】解: $\because$ 直线 $y = ax + b$ 平行于直线 $y = 2x - 1$,
 $\therefore k = 2$,

又 $\because$ 直线 $y = ax + b$ 在 y 轴上的截距为 3,

$$\therefore b = 3,$$

$\therefore$ 这条直线的解析式是: $y = 2x + 3$.

故答案是: $y = 2x + 3$.

【点睛】此题考查两条直线平行问题, 解题关键在于确定 k 的值.

12. 已知点 $A(m, 2.5)$, $B(n, -1)$ 都在一次函数 $y = 7x + 1$ 的图像上, 那么 m 与 n 的大小关系是_____.

【答案】 $m > n / n < m$

【分析】根据一次函数的性质, 通过题中 $k = 7 > 0$, 可判断 y 随着 x 的增大而增大, 即可得答案.

【详解】解: $\because y = 7x + 1$,

$$\therefore k = 7 > 0,$$

$\therefore y$ 随着 x 的增大而增大,

$\because$ 点 $A(m, 2.5)$, $B(n, -1)$ 在一次函数 $y = 7x + 1$ 的图像上, $2.5 > -1$,

$$\therefore m > n,$$

故答案为: $m > n$.

【点睛】本题考查了一次函数的性质, 解题的关键是掌握 $k > 0$, y 随着 x 的增大而增大.

13. 已知点 A 是直线 $y = -3x + 1$ 在第一象限内的一点, 且它到两坐标轴的距离相等, 那么点 A 的坐标是_____.

【答案】 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

【分析】在第一象限内的一点, 且它到两坐标轴的距离相等, 说明此点的横纵坐标的相等, 那么 $x = y$, 且为正数, 据此作答.

【详解】解: 设 $A(x, y)$,

$\because$ 点 A 为直线 $y = -3x + 1$ 上的一点,

$$\therefore y = -3x + 1,$$

又 $\because$ 点 A 在第一象限内的一点, 且它到两坐标轴的距离相等,

$$\therefore x = y, \text{ 且为正数,}$$

$$\therefore x = -3x + 1,$$

$$\text{解得: } x = \frac{1}{4},$$

$$\therefore y = \frac{1}{4},$$

$$\therefore A\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right),$$

故答案为: $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

【点睛】 本题考查了一次函数图像上点的坐标特征，解题的关键是根据点 A 在第一象限内的一点，且它到两坐标轴的距离相等，列出方程.

14. 如果一个十边形每个内角的度数都相等，那么它的一个内角的度数是_____度.

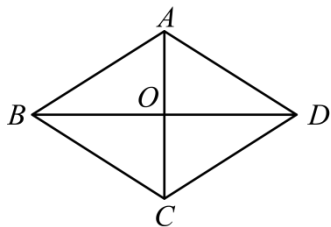
【答案】 144

【分析】 本题主要考查了正多边形内角和定理，正 n 边形的内角和为 $180^\circ \times (n-2)$ ，且正 n 边形有 n 个内角，据此可求出正 n 边形每个内角的度数，根据题意可知该多边形是正十边形，据此列式求解即可.

【详解】 解：由题意得：该十边形的一个内角的度数为 $\frac{180^\circ \times (10-2)}{10} = 144^\circ$ ，

故答案为：144.

15. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 交于点 O ，若 $\angle ABC = 60^\circ$ ， $OA = 1$ ，则菱形的面积等于_____.



【答案】 $2\sqrt{3}$

【分析】 本题考查菱形的性质，等边三角形的判定与性质，勾股定理；利用菱形的性质求出 AC ，再证 $\triangle ABC$ 是等边三角形，得到菱形的边长，进而勾股定理求得 OB ，根据菱形的性质即可求解.

【详解】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形， $OA = 1$ ，

$\therefore AB = BC$ ， $AC = 2OA = 2$ ，

$\because \angle ABC = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore AB = BC = AC = 2$ ，

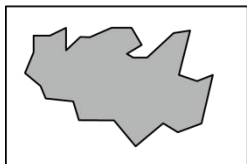
$\therefore OB = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{3}$

$\therefore BD = 2OB = 2\sqrt{3}$

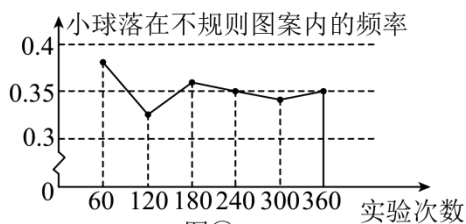
$\therefore$ 菱形的面积为： $\frac{1}{2} AC \times BD = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ ，

故答案为： $2\sqrt{3}$.

16. 如图①，平整的地面上有一个不规则图案（图中阴影部分），小明想了解该图案的面积是多少，他采取了以下办法：用一个长为 5m ，宽为 4m 的矩形将不规则图案围起来，然后在适当位置随机地朝矩形区域内扔小球，并记录小球落在不规则图案内的次数，将若干次有效试验的结果绘制成了如图②所示的折线统计图. 若每次投掷，小球落在矩形内每个点的可能性相同，由此他可以估计不规则图案的面积为_____ m^2 .



图①



图②

【答案】7

【分析】本题考查几何概率以及用频率估计概率，并在此基础上进行了题目创新，解题关键在于清晰理解题意，能从复杂的题目背景当中找到考点化繁为简，创新题目对基础知识要求极高.

首先假设不规则图案面积为 xm^2 ，根据几何概率知识求解不规则图案占长方形的面积大小；继而根据折线图用频率估计概率，综合以上列方程求解.

【详解】解：假设不规则图案面积为 xm^2 ，

由已知得：长方形面积为 $4 \times 5 = 20m^2$ ，

根据几何概率公式小球落在不规则图案的概率为： $\frac{x}{20}$ ，

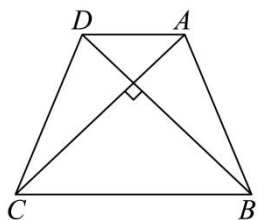
当事件 A 试验次数足够多，即样本足够大时，其频率可作为事件 A 发生的概率估计值，故由折线图可知，小球落在不规则图案的概率大约为 0.35，

综上有： $\frac{x}{20} = 0.35$ ，

解得 $x = 7$.

故答案为：7.

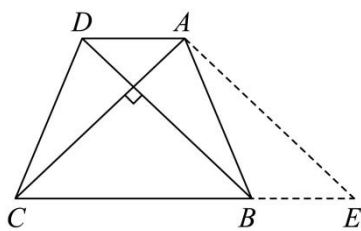
17. 如图，在等腰梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，对角线 AC 与 BD 互相垂直， $AC = 2\sqrt{2}$ ，那么梯形 $ABCD$ 的中位线长为_____.



【答案】2

【分析】本题主要考查了梯形的中位线定理、等腰直角三角形的判定与性质、平行四边形的判定与性质等知识，正确作出辅助线是解题关键. 过 A 作 $AE \parallel BD$ 交 CB 的延长线于 E，证明四边形 $ADBE$ 是平行四边形，易得 $AE = BD = AC$ ，进而可得 $\triangle ACE$ 是等腰直角三角形，然后根据等腰直角三角形的直角边的长求得斜边的长，从而利用中位线定义求得答案.

【详解】解：过 A 作 $AE \parallel BD$ 交 CB 的延长线于 E，



$\because AD \parallel BC, AE \parallel BD,$

$\therefore$ 四边形 $ADBE$ 是平行四边形,

$\therefore AD = BE, AE = BD,$

$\because$ 等腰梯形 $ABCD$ 中, $AC = BD,$

$\therefore AE = AC,$

$\because AC \perp BD, AE \parallel BD,$

$\therefore AE \perp AC,$

$\therefore \triangle ACE$ 是等腰直角三角形,

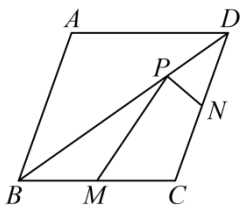
$\because AC = 5,$

$\therefore CE = BC + BE = BC + AD = \sqrt{2}AC = 4,$

$\therefore$ 梯形的中位线 $= \frac{1}{2}CE = 2.$

故答案为: 2.

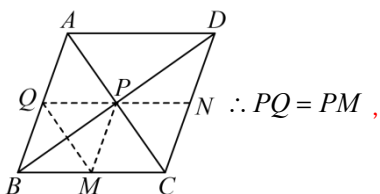
18. 如图, 已知菱形 $ABCD$ 的两条对角线分别为 6 和 8, 点 M 是边 BC 的中点, 点 N 是边 CD 上一点, 点 P 是对角线 BD 上一点, 则 $PM + PN$ 的最小值为_____.



【答案】 $\frac{24}{5}$

【分析】 本题考查了轴对称-最短路线问题, 菱形的性质, 勾股定理的应用, 菱形的面积, 解此题的关键是能确定出当 $QN \perp CD$ 时有最小值. 作 M 关于 BD 的对称点 Q , 连接 NQ , 交 BD 于 P , 连接 PM , 则 $PM + PN = QN$, 要使 $PM + PN$ 的值最小, 则当 $QN \perp CD$ 时, QN 有最小值, 则连接 AC , 求出 CP 、 BP , 根据勾股定理求出 CD 长, 再根据等面积法即可得出答案.

【详解】 解: 作 M 关于 BD 的对称点 Q , 连接 NQ , 交 BD 于 P , 连接 PM ,



$$\therefore PM + PN = PQ + PN = QN$$

要使 $PM + PN$ 的值最小，即 QN 要最小，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore AC \perp BD, \angle QBP = \angle MBP,$$

又 $\because MQ \perp BD$ ， M 是边 BC 的中点，

即 Q 在 AB 上，且为 AB 中点，

$$\therefore AB \parallel CD$$

$\therefore$ 当 $QN \perp CD$ 时， QN 有最小值，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore CP = \frac{1}{2}AC = 3, DP = \frac{1}{2}BD = 4$$

$$\therefore CD = \sqrt{BP^2 + CP^2} = 5$$

$$\therefore S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = QN \cdot CD$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 5QN$$

$$\therefore QN = \frac{24}{5}$$

$$\therefore PM + PN \text{ 的值最小为 } \frac{24}{5},$$

$$\text{故答案为: } \frac{24}{5}.$$

三、解答题 (本大题共 4 题，第 19、20 题每题 5 分，第 21、22 题 7 分，第 23、24 题 8 分，第 25 题 12 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤)

$$19. \text{ 解方程: } \frac{6x}{x^2-9} + \frac{x}{x+3} = 2.$$

$$\text{【答案】 } x = 6$$

【分析】 本题主要考查解分式方程，方程两边都乘以 $(x+3)(x-3)$ 得出 $6x + x(x-3) = 2(x+3)(x-3)$ ，求出方程的解，再进行检验即可

$$\text{【详解】 解: } \frac{6x}{x^2-9} + \frac{x}{x+3} = 2$$

方程两边都乘以 $(x+3)(x-3)$ 得

$$6x + x(x-3) = 2(x+3)(x-3),$$

$$\text{整理得, } x^2 - 3x - 18 = 0,$$

$$(x-6)(x+3) = 0$$

$$\text{解得, } x_1 = 6, x_2 = -3,$$

检验：当 $x=6$ 时， $(x+3)(x-3) \neq 0$ ，所以， $x=6$ 是分式方程的解；

当 $x=-3$ 时， $(x+3)(x-3)=0$ ，所以， $x=-3$ 是增根，

所以，分式方程的解是 $x=6$

20. 解方程组：
$$\begin{cases} x-y=3 \text{ ①} \\ x^2-5xy+6y^2=0 \text{ ②} \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=\frac{9}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}.$$

【分析】 本题考查了解高次方程组，能把高次方程组转化成二元一次方程组是解题的关键.

由方程②得 $x-2y=0$ ③或 $x-3y=0$ ④，再由①③和①④组成两个方程组，再求出方程组的解即可.

【详解】 解：
$$\begin{cases} x-y=3 \text{ ①} \\ x^2-5xy+6y^2=0 \text{ ②} \end{cases}$$

由方程②得 $(x-2y)(x-3y)=0$ ，

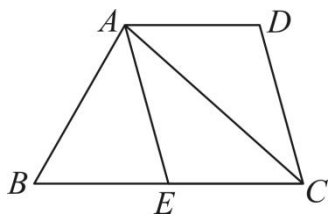
$\therefore x-2y=0$ 或 $x-3y=0$ ，即 $x-2y=0$ ③或 $x-3y=0$ ④，

$\therefore$ 原方程组为
$$\begin{cases} x-y=3 \\ x-2y=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x-y=3 \\ x-3y=0 \end{cases},$$

解得
$$\begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=\frac{9}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases},$$

答：方程组的解为
$$\begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=\frac{9}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}.$$

21. 如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $BC=2AD$ ，点 E 是 BC 的中点.



(1) 填空： $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) 如果把图中的线段都画成有向线段，那么在有些有向线段所表示的向量中，与 $\overrightarrow{BC}$ 平行的向量共有 个；

(3) 求作： $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EC}$. (不写作法，保留作图痕迹，写出结果)

【答案】 (1) $\overrightarrow{AC}$ ； $\overrightarrow{BC}$

(2) 7

(3)图形见解析

【分析】(1) 根据平行四边形的性质，向量的运算，即可；

(2) 根据平行向量的意义求解；

(3) 根据三角形的作图，即可.

【详解】(1) $\because$ 点 E 是 BC 的中点，

$$\therefore BC = 2BE = 2EC,$$

$$\because BC = 2AD,$$

$$\therefore EC = AD,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AE = CD,$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC},$$

故答案为: $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BC}$.

(2) 与 $\overrightarrow{BC}$ 平行的向量有: $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CB}$ 共 7 个，

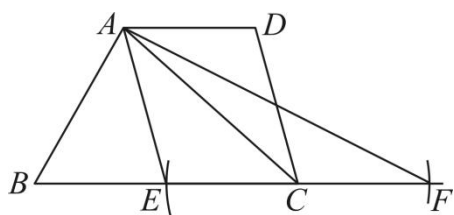
故答案为: 7.

(3) 以点 C 为圆心， EC 长为半径，延长 BC ，连接 AF ，

$$\therefore EC = CF,$$

$$\therefore AC + EC = AC + CF = AF.$$

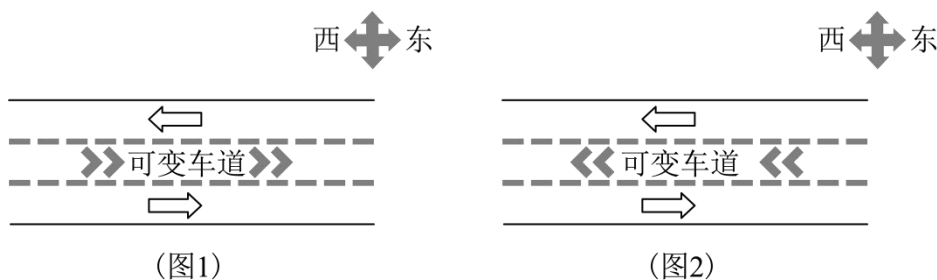
图形见下:



【点睛】本题考查向量，平行四边形的知识，解题的关键是掌握平行向量的性质，平行四边形的性质.

22. 某条东西方向道路双向共有三条车道，在早晚高峰经常会拥堵，数学研究小组希望改善道路拥堵情况，他们对该路段的交通量（辆/分钟）和时间进行了统计和分析，得到下列表格，并发现时间和交通量的变化规律符合一次函数的特征.

时间 x	8 时	11 时	14 时	17 时	20 时
y_1 自西向东交通量 (辆/分钟)	10	16	22	28	34
y_2 自东向西交通量 (辆/分钟)	25	22	19	16	13



- (1) 请用一次函数分别表示 y_1 与 x 、 y_2 与 x 之间的函数关系. (不写定义域)
- (2) 如图, 同学们希望设置可变车道来改善拥堵状况, 根据车流量情况改变可变车道的行车方向. 单位时间内双向交通总量为 $v_{\text{总}} = y_1 + y_2$, 车流量大的方向交通量为 v_m , 经查阅资料得: 当 $v_m \geq \frac{2}{3}v_{\text{总}}$, 需要使可变车道行车方向与拥堵方向相同, 以改善交通情况, 该路段从 8 时至 20 时, 如何设置可变车道行车方向以缓解交通拥堵, 并说明理由.

【答案】 (1) $y_1 = 2x - 6$, $y_2 = -x + 33$

(2) 8 时到 9 时, 可变车道的方向为自东向西; 18 时到 20 时, 可变车道的方向为自西向东, 理由见解析

【分析】 本题主要考查了一次函数的应用、解不等式的应用等知识, 结合题意确定一次函数解析式是解题关键.

(1) 直接利用待定系数法求解即可;

(2) 结合 (1) 可知单位时间内双向交通总量为 $v_{\text{总}} = x + 27$, 分 $y_1 \geq \frac{2}{3}v_{\text{总}}$ 和 $y_2 \geq \frac{2}{3}v_{\text{总}}$ 两种情况讨论, 分别建立关于 x 的不等式, 求解即可获得答案.

【详解】 (1) 解: 设自西向东交通量 $y_1 = k_1x + b_1$ ($k_1 \neq 0$),

将点 (8, 10)、(20, 34) 代入,

$$\text{可得} \begin{cases} 10 = 8k_1 + b_1 \\ 34 = 20k_1 + b_1 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k_1 = 2 \\ b_1 = -6 \end{cases},$$

$\therefore$ 自西向东交通量 $y_1 = 2x - 6$;

设自东向西交通量 $y_2 = k_2x + b_2$ ($k_2 \neq 0$),

将点 (8, 25)、(20, 13) 代入,

$$\text{可得} \begin{cases} 25 = 8k_2 + b_2 \\ 13 = 20k_2 + b_2 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k_2 = -1 \\ b_2 = 33 \end{cases},$$

$\therefore$ 自东向西交通量 $y_2 = -x + 33$;

(2) 结合 (1) 可知,

单位时间内双向交通总量为 $v_{\text{总}} = y_1 + y_2 = 2x - 6 + (-x + 33) = x + 27$,

当 $y_1 \geq \frac{2}{3}v_{\text{总}}$ ，即 $2x - 6 \geq \frac{2}{3}(x + 27)$ 时，

解得 $x \geq 18$ ；

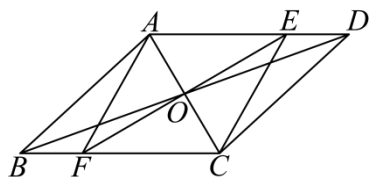
当 $y_2 \geq \frac{2}{3}v_{\text{总}}$ ，即 $-x + 33 \geq \frac{2}{3}(x + 27)$ 时，

解得 $x \leq 9$ 。

所以，8 时到 9 时，可变车道的方向为自东向西；

18 时到 20 时，可变车道的方向为自西向东。

23. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，对角线 AC ， BD 交于点 O ， E 是 AD 上一点，连接 EO 并延长，交 BC 于点 F 。连接 AF 、 CE ， EF 平分 $\angle AEC$ 。



(1) 求证：四边形 $AFCE$ 是菱形；

(2) 若四边形 $AFCE$ 的周长为 12，两条对角线的和等于 7，求四边形 $AFCE$ 的面积 S 。

【答案】(1) 见解析

(2) $\frac{13}{4}$

【分析】((1) 由“ AAS ”证明 $\triangle AOE \cong \triangle COF$ ，得 $AE = CF$ ，证出四边形 $AFCE$ 是平行四边形，再利用角平分线性质和等腰三角形性质得到 $CE = CF$ ，即可得出结论；

(2) 由题意得四边形 $AFCE$ 的边长为 4，设 $AC = x$ ， $EF = y$ ，则 $x + y = 7$ ，进而得到 $x^2 + 2xy + y^2 = 49$ ，利用菱形的性质和勾股定理得到 $\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + \left(\frac{1}{2}y\right)^2 = 9$ ，进而得到 xy ，最后根据菱形的面积公式求解，即可解题。

【详解】(1) 证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，对角线 AC ， BD 交于点 O ，

$\therefore AE \parallel FC$ ， $AO = CO$ ，

$\angle AEO = \angle CFO$ ，

$\therefore \angle AOE = \angle COF$ ，

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF (AAS)$ ，

$\therefore AE = CF$ ，

$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 是平行四边形，

$\because EF$ 平分 $\angle AEC$ ，

$\therefore \angle AEO = \angle CEO$ ，

$$\therefore \angle CFO = \angle CEO,$$

$$\therefore CE = CF,$$

$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 是菱形;

(2) 解: $\because$ 四边形 $AFCE$ 的周长为 12,

$$\therefore AE = FC = CE = AF = 3,$$

$\therefore$ 两条对角线的和等于 7,

$$\text{设 } AC = x, \quad EF = y,$$

$$\therefore x + y = 7,$$

$$\therefore (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 49,$$

$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 是菱形,

$$\therefore AC \perp EF \text{ 于点 } O, \quad OA = OC = \frac{1}{2}x, \quad OE = OF = \frac{1}{2}y,$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + \left(\frac{1}{2}y\right)^2 = 9, \quad \text{即 } x^2 + y^2 = 36,$$

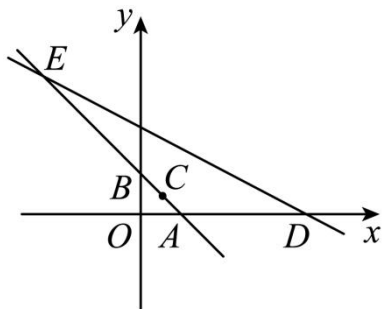
$$\therefore 2xy + 36 = 49,$$

$$\therefore xy = \frac{13}{2},$$

$$\therefore \text{四边形 } AFCE \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2}xy = \frac{13}{4}.$$

【点睛】 本题考查了菱形的判定与性质、平行四边形的判定与性质、角平分线性质、全等三角形的判定与性质、勾股定理等知识; 熟练掌握菱形的判定与性质是解题的关键.

24. 如图, 在平面直角坐标系中, 直线 $y = -x + b$ 经过点 $C(1, 1)$, 与 x 轴、 y 轴分别相交于点 A 、 B , 直线 DE 与 x 轴交于点 $D(1, 1)$, 与直线 AB 相交于点 E , 点 E 在第二象限, 已知 $\triangle DAE$ 的面积为 18



(1) 求直线 DE 的表达式;

(2) 点 P 是直线 DE 上一点, 点 Q 是 y 轴上一点, 如果以 B 、 C 、 P 、 Q 为顶点的四边形是等腰梯形, 请直接写出点 P 、 Q 的坐标.

$$\text{【答案】 (1) } y = -\frac{1}{2}x + 4$$

$$(2) P(6, 1), Q(0, 7) \text{ 或 } P\left(1, \frac{7}{2}\right), Q\left(0, \frac{5}{2}\right)$$

【分析】(1) 把点 $C(1, 1)$ 代入 $y = -x + b$ 可得直线 AB 的表达式, 可得 B 点坐标, 根据 $\triangle DAE$ 的面积为 18 可求出 E 点坐标, 根据 D, E 坐标即可求出直线 DE 的表达式;

(2) 根据点 P 是直线 DE 上一点, 点 Q 是 y 轴上一点, 设出 P, Q 点坐标, 根据以 B, C, P, Q 为顶点的四边形是等腰梯形, 进行分类讨论, 分为两类: ①当 $BC \parallel PQ$ 且 $CP = BQ$ 时, $CP \parallel x$ 轴, 求出 P 点坐标, 根据 $BQ = CP = n - 2 = 5$ 求出 Q 点坐标; ②当 $BP \parallel CQ$ 且 $BC = PQ$ 时, $CQ \parallel y$ 轴, 求出 P 点坐标, 根据 $y_B - y_C = y_P - y_Q$ 求出 Q 点坐标即可解答;

【详解】(1) 把点 $C(1, 1)$ 代入 $y = -x + b$ 得 $1 = -1 + b$,

解得 $b = 2$,

$\therefore$ 直线 AB 的表达式为: $y = -x + 2$,

$\therefore A(2, 0)$,

$\therefore D(8, 0)$, $AD = 6$,

设 $E(x, -x + 2)(x < 0)$,

$$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \times 6(-x + 2) = 18, \text{ 解得 } x = -4, \text{ 点 } E(-4, 6),$$

设直线 DE 的表达式为 $y = kx + b(k \neq 0)$,

$$\text{把 } E(-4, 6), D(8, 0) \text{ 代入上式得 } \begin{cases} 6 = -4k + b \\ 0 = 8k + b \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = 4 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 DE 的表达式为 $y = -\frac{1}{2}x + 4$;

(2) $\therefore$ 点 P 是直线 DE 上一点, 点 Q 是 y 轴上一点, P 是直线 DE 上一点,

$\therefore$ 设 $P\left(m, -\frac{1}{2}m + 4\right)$, $Q(0, n)$,

$\therefore$ 直线 AB 的表达式为: $y = -x + 2$,

$\therefore B(0, 2)$,

$\therefore$ 以 B, C, P, Q 为顶点的四边形是等腰梯形,

$\therefore$ ①当 $BC \parallel PQ$ 且 $CP = BQ$ 时, $CP \parallel x$ 轴,

$\therefore P$ 点纵坐标为 1,

代入直线 DE 的表达式 $y = -\frac{1}{2}x + 4$ 得 $P(6, 1)$,

$\therefore CP = 6 - 1 = 5$,

$$\therefore BQ = CP = n - 2 = 5,$$

$$\therefore n = 7,$$

$$\therefore Q(0, 7);$$

②当 $BP \parallel CQ$ 且 $BC = PQ$ 时, $CQ \parallel y$ 轴,

$\therefore P$ 点横坐标为 1,

代入直线 DE 的表达式 $y = -\frac{1}{2}x + 4$ 得 $P\left(1, \frac{7}{2}\right)$,

$$\therefore y_B - y_C = 1,$$

$$y_P - y_Q = \frac{7}{2} - n,$$

$$\therefore \frac{7}{2} - n = 1,$$

$$\therefore n = \frac{7}{2},$$

$$\therefore Q\left(0, \frac{7}{2}\right);$$

$\therefore$ 综上所述 $P(6, 1), Q(0, 7)$ 或 $P\left(1, \frac{7}{2}\right), Q\left(0, \frac{5}{2}\right)$.

【点睛】 本题主要考查了一次函数图像上点的特征, 一次函数解析式求解以及一次函数与等腰梯形相结合的存在性问题, 该题解题的关键是根据等腰梯形腰相等以及上下两底互相平行的性质结合图像进行分类讨论并合理转化.

25. 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 8, BC = 16$, E, F 是直线 AC 上的两个动点, 分别从 A, C 两点同时出发相向而行, 速度均为每秒 2 个单位长度, 运动时间为 t 秒, 其中 $(0 \leq t \leq 10)$.

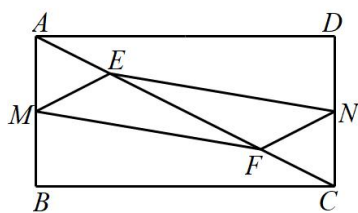


图1

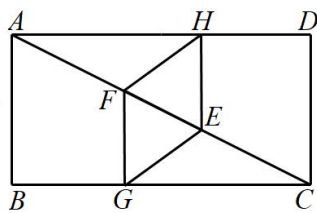


图2

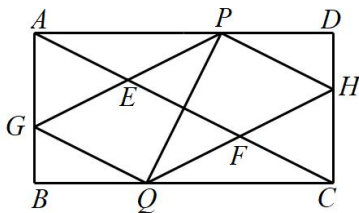


图3

(1)如图 1, M, N 分别是 AB, CD 中点, 当四边形 $EMFN$ 是矩形时, 求 t 的值;

(2)若 G, H 分别从点 A, C 沿折线 $A-B-C, C-D-A$ 运动, 与 E, F 相同的速度同时出发.

①如图 2, 若四边形 $EGFH$ 为菱形, 求 t 的值;

②如图 3, 作 AC 的垂直平分线交 AD, BC 于点 P, Q , 当四边形 $PGQH$ 的面积是矩形 $ABCD$ 面积的 $\frac{15}{32}$ 时, 则 t 的值是_____.

【答案】 (1) $t = 2\sqrt{5} - 4$ 或 $2\sqrt{5} + 4$

(2)① $t = 7$; ② $\frac{5}{2}$

【分析】(1) 先证明 $\triangle AME \cong \triangle CNF$ (SAS), 则 $ME = FN$, $\angle AEM = \angle CFN$, 可得 $\angle MEF = \angle EFN$, 则 $ME \parallel FN$, 得四边形 $EMFN$ 是平行四边形, 连接 MN , 证明四边形 $MBCN$ 是矩形, 则 $MN = BC = 16$, $AC = 8\sqrt{5}$, 当 $EF = MN = 16$ 时, 四边形 $EMFN$ 是矩形, 则 $8\sqrt{5} - 4t = 16$ 或 $4t - 8\sqrt{5} = 16$, 解方程即可得到答案;

(2) ①由 (1) 知: $AE = CF$, 连接 GH , CH , 由四边形 $EGFH$ 为菱形得到 $AC \perp GH$, $OE = OF$, 则 $OA = OC$, 则 $AH = HC$, 由勾股定理得到 $HC^2 = CD^2 + DH^2$, 则 $AH^2 = 64 + (16 - AH)^2$, 求得 $AH = CH = 10$, 则 $DH = 6$, 则 $CD + DH = 8 + 6 = 14$, 即可得到 $t = \frac{14}{2} = 7$;

②连接 AQ , 由①同理得 $AQ = CQ = 10$, $BQ = 6$, 由①知 $AP = 10$, 则 $AP = CQ$, 可证明 $\triangle APG \cong \triangle CQH$ (SAS), 则 $GP = QH$, 同理可证 $PH = GQ$, 得到四边形 $GQHP$ 是平行四边形, 由四边形 $PGQH$ 的面积是矩形 $ABCD$ 面积的 $\frac{15}{32}$ 得到 $S_{\triangle PGQ} = 30$, 则 $S_{\triangle AGP} + S_{\triangle GBQ} = \frac{1}{2} \times 8 \times 16 - 30 = 34$, 即 $\frac{1}{2} \times AG \times 10 + \frac{1}{2} \times 6 \times (8 - AG) = 34$, 求得 $AG = 5$, 得到 $t = \frac{5}{2}$.

【详解】(1) 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,
 $\therefore AB \parallel CD$, $AB = CD$,
 $\therefore \angle MAE = \angle NCF$,
 $\because M$ 、 N 分别是 AB , DC 的中点,
 $\therefore AM = CN$,
 $\because E$ 、 F 分别从 A 、 C 同时出发相向而行, 速度均为每秒 2 个单位长度,
 $\therefore AE = CF = 2t$,
 $\therefore \triangle AME \cong \triangle CNF$ (SAS),
 $\therefore ME = FN$, $\angle AEM = \angle CFN$,
 $\therefore \angle MEF = \angle EFN$,
 $\therefore ME \parallel FN$,
 $\therefore$ 四边形 $EMFN$ 是平行四边形,
 如图 1, 连接 MN ,

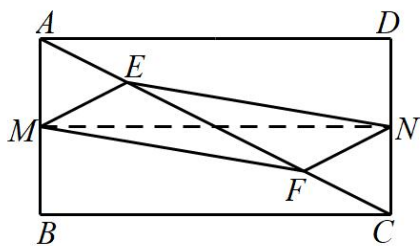


图1

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, M, N 分别是 AB, DC 中点,

$\therefore MB = CN, MB \parallel CN, \angle B = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $MBCN$ 是平行四边形,

$\because \angle B = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $MBCN$ 是矩形,

$\because$ 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 8, BC = 16$,

$\therefore MN = BC = 16, AC = \sqrt{8^2 + 16^2} = 8\sqrt{5}$,

$\because$ 四边形 $EMFN$ 是平行四边形,

$\therefore$ 当 $EF = MN = 16$ 时, 四边形 $EMFN$ 是矩形,

$\therefore 8\sqrt{5} - 4t = 16$ 或 $4t - 8\sqrt{5} = 16$,

解得: $t = 2\sqrt{5} - 4$ 或 $2\sqrt{5} + 4$;

(2) ①由 (1) 知: $AE = CF$,

如图 2, 连接 GH, CH ,

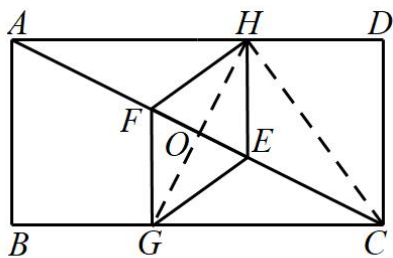


图2

$\because$ 四边形 $EGFH$ 为菱形,

$\therefore AC \perp GH, OE = OF$,

$\therefore OA = OC$,

$\therefore AH = HC$,

$\because HC^2 = CD^2 + DH^2$,

$\therefore AH^2 = 64 + (16 - AH)^2$,

$\therefore AH = CH = 10$,

$\therefore DH = 6$,

$$\therefore CD + DH = 8 + 6 = 14,$$

$$\therefore t = \frac{14}{2} = 7;$$

②如图 3，连接 AQ ，

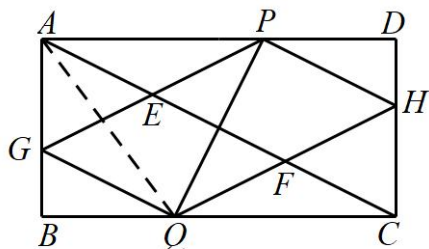


图3

由①同理得： $AQ = CQ = 10$ ， $BQ = 6$ ，

由①知： $AP = 10$ ，

$$\therefore AP = CQ,$$

$\because$ G、H 分别从点 A、C 沿折线 $A-B-C$ ， $C-D-A$ 运动，

$$\therefore AG = CH,$$

又 $\because \angle GAP = \angle QCH = 90^\circ$ ，

$$\therefore \triangle APG \cong \triangle CQH \text{ (SAS)},$$

$$\therefore GP = QH,$$

同理可证 $PH = GQ$ ，

$\therefore$ 四边形 $GQHP$ 是平行四边形，

$\because$ 四边形 $PGQH$ 的面积是矩形 $ABCD$ 面积的 $\frac{15}{32}$ ，

$$\therefore S_{\square PGQH} = \frac{15}{32} S_{\text{矩形} ABCD},$$

$$\therefore 2S_{\triangle PGQ} = \frac{15}{32} S_{\text{矩形} ABCD} = \frac{15}{32} \times 8 \times 16 = 60,$$

$$\therefore S_{\triangle PGQ} = 30,$$

$$\therefore S_{\triangle AGP} + S_{\triangle GBQ} = \frac{1}{2} \times 8 \times 16 - 30 = 34,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times AG \times 10 + \frac{1}{2} \times 6 \times (8 - AG) = 34,$$

$$\therefore AG = 5,$$

$$\therefore t = \frac{5}{2}.$$

故答案为： $\frac{5}{2}$.

【点睛】 此题考查了矩形的判定和性质、平行四边形的判定和性质、全等三角形的判定和性质、菱形的性质、勾股定理等知识，熟练掌握特殊平行四边形的判定和性质是解题的关键.