

2022 学年第二学期期末教学质量调研

八年级数学试卷

考生注意:

1.本卷有 4 大题, 共 27 小题.

2.试卷满分 100 分. 考试时间 100 分钟.

3.按要求在答题纸上作答, 在试卷、草稿纸上答题一律无效.

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 共 18 分)

1. 一次函数 $y = -3x+2$ 的图象不经过()

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据一次函数的性质进行判断即可.

【详解】 解: $\because k = -3 < 0$,

$\therefore$ 一次函数 $y = -3x+2$ 的图象经过第二、四象限,

$\because b = 2 > 0$,

$\therefore$ 一次函数 $y = -3x+2$ 的图象与 y 轴的交点在 x 轴上方,

$\therefore$ 一次函数 $y = -3x+2$ 的图象经过第一、二、四象限,

即一次函数 $y = -3x+2$ 的图象不经过第三象限.

故选 C.

【点睛】 本题考查了一次函数的图象与性质, 熟知一次函数 k 、 b 的符号与其经过的象限是解题的关键.

2. 如果直线 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 过第二、三、四象限, 与 x 的交点为 $(-2, 0)$, 那么使得 $kx + b < 0$ 的 x 的取值范围是 ()

A. $x < -2$

B. $x > -2$

C. $x \leq -2$

D. $x \geq -2$

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据一次函数的性质可进行求解.

【详解】 解: 由直线 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 过第二、三、四象限, 可知: y 随 x 的增大而减小,

$\therefore$ 一次函数与 x 的交点为 $(-2, 0)$,

$\therefore$ 当 $kx + b < 0$ 时, 则 $x > -2$;

故选 B.

【点睛】 本题主要考查一次函数的图象与性质，熟练掌握一次函数的图象与性质是解题的关键.

3. 下列方程中，有实数根的方程是 ()

A. $2x^4 + 1 = 0$

B. $x^3 + 1 = 0$

C. $\sqrt{x-1} + 3 = 0$

D. $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 利用高次方程、无理方程及分式方程的定义分别判断后即可确定正确的选项.

【详解】 解： A. 整理得： $x^4 = -\frac{1}{2}$ ，故该方程无解，不符合题意；

B. 整理得 $x^3 = -1$ ，解得： $x = -1$ ，符合题意；

C. 整理得 $\sqrt{x-1} = -3$ ，无解，不符合题意；

D. 去分母后得 $x = 1$ ，代入最简公分母 $x - 1 = 0$ ，故该方程无实数根，不符合题意.

故选： B.

【点睛】 本题考查了高次方程、无理方程及分式方程的定义的知识，解题的关键是了解有关的定义，难度不大.

4. 下列图形中，一定是中心对称但不一定是轴对称图形的是 ()

A. 菱形

B. 矩形

C. 等腰梯形

D. 平行四边形

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据中心对称和轴对称的定义即可求解.

【详解】 解： A： 菱形既是中心对称图形，又是轴对称图形，故 A 错误；

B： 矩形既是中心对称图形，又是轴对称图形，故 B 错误；

C： 等腰梯形是轴对称图形，不是中心对称图形，故 C 错误；

D： 平行四边形是中心对称图形，不一定是轴对称图形，故 D 正确

故选： D

【点睛】 本题考查几何图形的对称性. 掌握中心对称和轴对称的定义是解题的关键.

5. 在矩形 $ABCD$ 中，下列结论中正确的是 ()

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

B. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

C. $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{CO}$

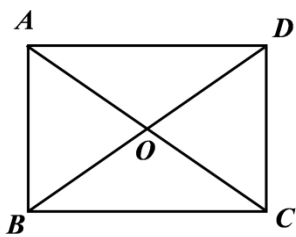
D. $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{CB}$

【答案】 D

【解析】

【分析】根据矩形的性质及向量的性质可进行求解.

【详解】解：如图，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AB = CD, AD \parallel BC, AO = OC,$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, 故 A 错误;

$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$, 故 B 错误;

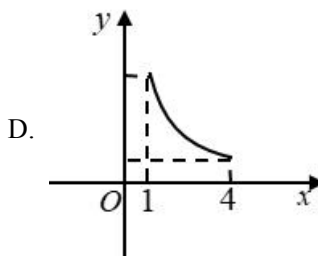
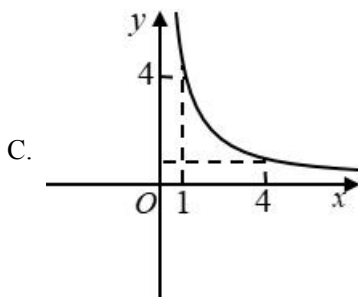
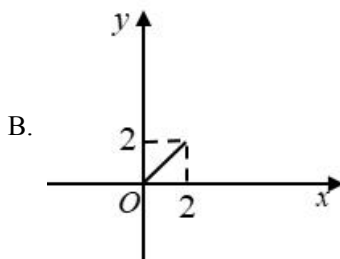
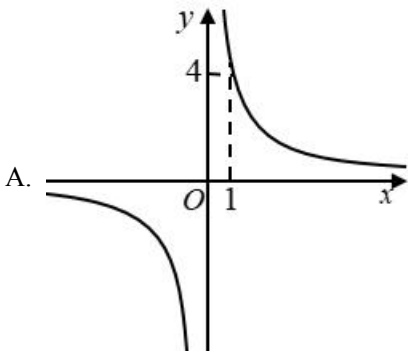
$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$, 故 C 错误;

$\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{CB}$, 故 D 正确;

故选 D.

【点睛】本题主要考查向量及矩形的性质，熟练掌握向量及矩形的性质是解题的关键.

6. 菱形的面积为 2，其对角线分别为 x 、 y ，则 y 与 x 的图象大致 ().



【答案】C

【解析】

【分析】先根据菱形的面积公式，得出 x 、 y 的函数关系，再根据 x 的取值范围选出答案.

【详解】 $\because$ 菱形的面积 $S = \frac{1}{2}xy$

$$\therefore xy = 4, \text{ 即 } y = \frac{4}{x}$$

其中, $x > 0$

故选: C

【点睛】本题考查菱形面积公式的应用, 注意在求解出 x 、 y 的关系后, 还需要判断 x 的取值范围.

二、填空题 (本大题共 13 题, 每题 2 分, 共 26 分)

7. 如果把直线 $y = 3x - 1$ 沿 y 轴向下平移 3 个单位, 所得直线的解析式是_____.

【答案】 $y = 3x - 4$

【解析】

【分析】根据一次函数图像的平移可进行求解.

【详解】解: 把直线 $y = 3x - 1$ 沿 y 轴向下平移 3 个单位, 所得直线的解析式是 $y = 3x - 4$;

故答案为 $y = 3x - 4$.

【点睛】本题主要考查一次函数图像的平移, 熟练掌握“左加右减, 上加下减”是解题的关键.

8. 一次函数的图像平行于直线 $y = 2x + 1$, 截距是 -3 , 这个一次函数的解析式是_____.

【答案】 $y = 2x - 3$ 或 $y = 2x + 6$

【解析】

【分析】设所求直线解析式为 $y = kx + b$, 先根据截距的定义得到直线过点 $(0, -3)$ 或 $(-3, 0)$, 再根据两直线平行的问题得到 $k = 2$, 由此可得到所求直线解析式.

【详解】解: 设所求直线解析式为 $y = kx + b$,

①一次函数的图像与 y 轴的截距是 -3 , 且与直线 $y = 2x + 1$ 平行,

$$\therefore k = 2, \quad b = -3,$$

$\therefore$ 所求直线解析式为 $y = 2x - 3$;

②当一次函数的图像与 x 轴的截距为 -3 , 且与直线 $y = 2x + 1$ 平行,

$$\therefore k = 2,$$

把点 $(-3, 0)$ 代入 $y = 2x + b$, 得: $0 = 2 \times (-3) + b$,

解得: $b = 6$,

∴ 所求直线解析式为 $y = 2x + 6$;

故答案为 $y = 2x - 3$ 或 $y = 2x + 6$.

【点睛】 本题考查了两直线相交或平行的问题：两条直线的交点坐标，就是由这两条直线相对应的一次函数表达式所组成的二元一次方程组的解；若两条直线是平行的关系，那么他们的自变量系数相同，即 k 值相同．也考查了待定系数法求一次函数解析式．

9. 如果一次函数 $y = (m-3)x - 1$ 的函数值 y 随着 x 的值增大而减小，那么 m 取值范围是_____.

【答案】 $m < 3$

【解析】

【分析】 根据一次函数的性质可进行求解.

【详解】 解： ∵ 一次函数 $y = (m-3)x - 1$ 的函数值 y 随着 x 的值增大而减小，

$$\therefore m-3 < 0,$$

$$\therefore m < 3;$$

故答案为 $m < 3$.

【点睛】 本题主要考查一次函数的性质，熟练掌握一次函数的性质是解题的关键.

10. 关于 x 方程 $a(x-1) = 1$ ($a \neq 0$) 的解是_____.

【答案】 $x = \frac{a+1}{a}$

【解析】

【分析】 根据一元一次方程的解法可进行求解.

【详解】 解： $a(x-1) = 1$

$$x-1 = \frac{1}{a}$$

$$\therefore x = \frac{a+1}{a};$$

故答案为 $x = \frac{a+1}{a}$.

【点睛】 本题主要考查一元一次方程的解法及分式的加法，熟练掌握一元一次方程的解法及分式的加法是解题的关键.

11. 确定事件的概率是_____.

【答案】 0 或 1 或 0

【解析】

【分析】确定事件包括必然事件和不可能事件，再根据必然事件和不可能事件的概率解答即可.

【详解】解：确定事件包括必然事件和不可能事件，

必然事件的概率为1，

不可能事件的概率为0，

故答案为：0或1.

【点睛】本题主要考查了确定事件的定义，确定事件包括必然事件与不可能事件，难度适中.

12. 某区为创建全国文明城区，计划今年建设绿地 250 公顷，比前年增加 90 公顷，设去年和今年比上一年的增长率都是 x ，根据题意，可得方程_____.

【答案】 $(250-90)(1+x)^2=250$

【解析】

【分析】根据题意可直接进行求解.

【详解】解：根据题意可得方程为 $(250-90)(1+x)^2=250$ ；

故答案为 $(250-90)(1+x)^2=250$.

【点睛】本题主要考查一元二次方程的应用，熟练掌握一元二次方程的增长率问题是解题的关键.

13. 若一个多边形的内角和是其外角和的 3 倍，则这个多边形的边数是_____.

【答案】8

【解析】

【分析】根据多边形的内角和定理，多边形的内角和等于 $(n-2) \cdot 180^\circ$ ，外角和等于 360° ，然后列方程求解即可.

【详解】解：设边数为 n ，由题意得，

$$180(n-2)=360 \times 3,$$

解得 $n=8$.

所以这个多边形的边数是 8.

故答案为：8.

【点睛】本题主要考查了多边形的内角和公式与外角和定理，根据题意列出方程是解题的关键.

14. $ABCD$ 中， $\angle A$ 与 $\angle C$ 的和为 100° ，那么 $\angle B =$ _____ $^\circ$.

【答案】130

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质，对角相等以及邻角互补即可解答.

【详解】解： $\because$ 平行四边形 $ABCD$,

$$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ, \angle A = \angle C,$$

$$\therefore \angle A + \angle C = 100^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ.$$

故答案为 130.

【点睛】 本题考查了平行四边形的性质，在掌握平行四边形对角相等以及邻角互补的性质是解答本题的关键.

15. 如果要求写出一个二元二次方程，使该方程有一个解是 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ ，那么这个方程可以写为_____

【答案】 $xy = 2$

【解析】

【分析】 根据二元二次方程的定义和二元二次方程解的定义写出方程即可.

【详解】 解：由 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 可得 $xy = 2$,

$\therefore$ 这个二元二次方程可以写为 $xy = 2$,

故答案为： $xy = 2$.

【点睛】 本题考查了二元二次方程的定义和二元二次方程解的定义，熟练掌握基础概念是解题的关键.

16. 从 1、2、3 三个数中任取两个数组成一个没有重复数字的两位数，这个两位数是合数的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{2}$ 或 0.5

【解析】

【分析】 根据列举法可进行求解.

【详解】 解：从 1、2、3 三个数中任取两个数组成一个没有重复数字的两位数有 12、13、23、32、31、21，

其中两位数是合数的有 12、32、21，所以两位数是合数的概率为 $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$,

故答案为 $\frac{1}{2}$.

【点睛】 本题主要考查概率，熟练掌握利用列举法求解概率是解题的关键.

17. 在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，如果 $AD = 4$ ， $BC = 10$ ， E 、 F 分别是边 AB 、 CD 的中点，那么 $EF =$ _____.

【答案】 7.

【解析】

【分析】根据梯形中位线定理得到 $EF = \frac{1}{2} (AD+BC)$ ，然后把 $AD=4$ ， $BC=10$ 代入可求出 EF 的长.

【详解】 $\because E, F$ 分别是边 AB, CD 的中点，

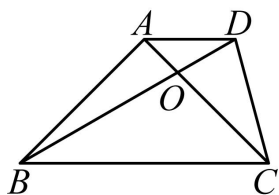
$\therefore EF$ 为梯形 $ABCD$ 的中位线，

$$\therefore EF = \frac{1}{2} (AD+BC) = \frac{1}{2} (4+10) = 7.$$

故答案为 7.

【点睛】本题考查了梯形中位线定理：梯形的中位线平行于两底，并且等于两底和的一半.

18. 如图，梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，且 $BD = BC$ ，那么 $\angle BOC =$ _____ 度.



【答案】105

【解析】

【分析】作 $AF \perp BC$ 于 F ， $DE \perp BC$ 于 E ，根据等腰直角三角形的性质用 AB 表示出 BC 及 AF 的长，由勾股定理及含 30° 直角三角形的性质求出 $\angle 1$ 的度数，根据 BC 三角形内角和等于 180° 得出 $\angle BOC$ 的度数即可.

【详解】解：如图，作 $AF \perp BC$ 于 F ， $DE \perp BC$ 于 E ，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，

$$\because AB = AC, \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\therefore BC = \sqrt{2}AB, \quad AF = \frac{\sqrt{2}}{2}AB,$$

$$\therefore AF = \frac{1}{2}BC.$$

$$\text{又} \because DE = AF,$$

$$\therefore DE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}BD,$$

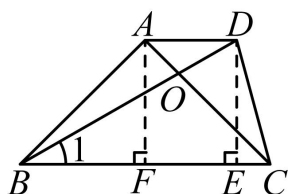
$$\therefore \frac{DE}{BD} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BE = \sqrt{BD^2 - DE^2} = \sqrt{3}DE,$$

$$\therefore \angle 1 = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ.$$

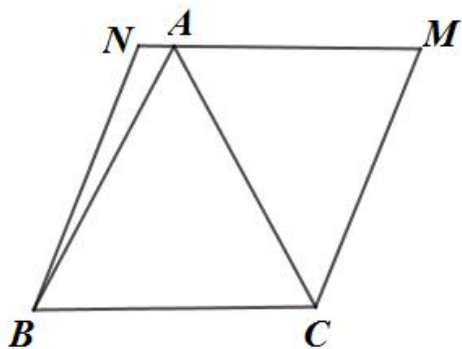
故答案为：105.



【点睛】本题考查了含 30 度直角三角形的性质、勾股定理及等腰三角形的判定，

难度一般，关键是巧妙作辅助线进行解答.

19. 对于任意三角形，如果存在一个菱形，使得这个菱形的一条边与三角形的一条边重合，且三角形的这条边所对的顶点在菱形的这条边的对边上，那么称这个菱形为该三角形的“最优覆盖菱形”. 问题：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $BC = 4$ ，且 $\triangle ABC$ 的面积为 m ，如果 $\triangle ABC$ 存在“最优覆盖菱形”为菱形 $BCMN$ ，那么 m 的取值范围是_____.



【答案】 $4\sqrt{3} \leq m \leq 8$

【解析】

【分析】由 $\triangle ABC$ 的面积为 m 可得 $\triangle ABC$ 的高为 $\frac{m}{2}$ ，然后再分三角形的高取最小值和最大值两种情况求解即可.

【详解】解： $\because \triangle ABC$ 的面积为 m

$$\therefore \triangle ABC \text{ 边 } BC \text{ 上的高为 } \frac{m}{2}$$

如图：当高取最小值时， $\triangle ABC$ 为等边三角形， A 与 M 或 N 或 MN 上一重合重合，

如图：过 A 作 $AD \perp BC$ ，垂足为 D

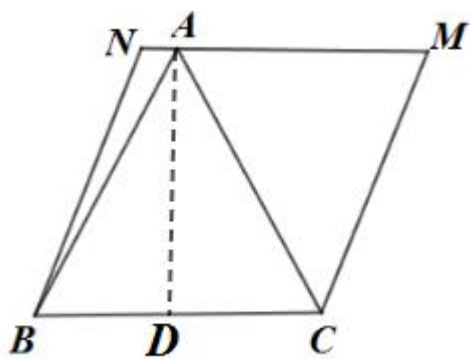
$\because$ 等边三角形 $ABC, BC=4$

$$\therefore \angle ABC=60^\circ, BC=4, \angle BAD=30^\circ$$

$$\therefore BD=2,$$

$$\therefore AD=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$$

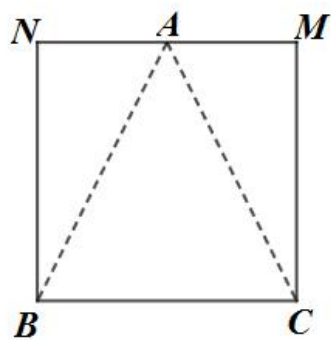
$$\therefore \frac{m}{2} = 2\sqrt{3}, \text{ 即 } m=4\sqrt{3};$$



如图：当高取最大值时，菱形为正方形，

$\therefore A$ 在 MN 中点，

$$\therefore \frac{m}{2} = 4, \text{ 即 } m=8$$



$$\therefore 4\sqrt{3} \leq m \leq 8.$$

故填： $4\sqrt{3} \leq m \leq 8$.

【点睛】 本题主要考查了菱形的性质、正方形的性质、等边三角形的性质以及勾股定理，考查知识点较多，灵活应用相关知识成为解答本题的关键.

二. 简答题本大题共 6 题，每题 6 分，共 36 分)

20. 解方程：

$$(1) \quad 3 - \sqrt{2x-3} = x.$$

$$(2) \quad \frac{1}{x-2} + \frac{4}{4-x^2} = 1.$$

【答案】 (1) $x=2$;

$$(2) \quad x=-1$$

【解析】

【分析】(1) 先将原方程进行变形化为整式方程，然后再解整式方程，最后进行检验即可；

(2) 先去分母，将分式方程变为整式方程，然后再解整式方程，最后进行检验.

【小问 1 详解】

$$3 - \sqrt{2x-3} = x$$

原方程可变形为 $-\sqrt{2x-3} = x-3$,

两边平方，得 $2x-3 = x^2 - 6x + 9$,

整理，得 $x^2 - 8x + 12 = 0$,

分解因式得 $(x-2)(x-6) = 0$,

解得 $x_1 = 2, x_2 = 6$,

经检验： $x_1 = 2$ 是原方程的解， $x_2 = 6$ 是增根，

$\therefore$ 原方程的解为 $x = 2$.

【小问 2 详解】

$$\frac{1}{x-2} + \frac{4}{4-x^2} = 1$$

方程两边同时乘以 $(x+2)(x-2)$ ，得

$$(x+2) - 4 = (x+2)(x-2),$$

整理，得 $x^2 - x - 2 = 0$,

解得 $x_1 = -1, x_2 = 2$,

经检验： $x_1 = -1$ 是原方程的解， $x_2 = 2$ 是增根，

$\therefore$ 原方程的解为 $x = -1$.

【点睛】本题主要考查了解分式方程和无理方程，将分式方程和无理方程化为整式方程是解题的关键.

$$21. \text{ 解方程组: } \begin{cases} x^2 + 4xy + 4y^2 = 9(1) \\ x - y = 6(2) \end{cases}.$$

$$\text{【答案】 } \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$$

【解析】

【分析】先降次转化成两个一次方程组，解方程组即可求解.

【详解】解：
$$\begin{cases} x^2 + 4xy + 4y^2 = 9 \textcircled{1} \\ x - y = 6 \textcircled{2} \end{cases},$$

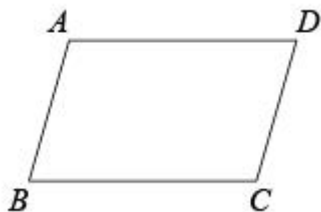
由方程①可得 $x+2y = -3$ 或 $x+2y = 3$,

则方程组可变为
$$\begin{cases} x+2y = -3 \\ x-y = 6 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+2y = 3 \\ x-y = 6 \end{cases},$$

解得
$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}.$$

【点睛】 本题考查的是高次方程，关键是通过分解，把高次方程降次，得到二元一次方程组，用到的知识点是因式分解、加减法.

22. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形， $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.



(1) 填空： $\overrightarrow{BD} =$ _____； $\overrightarrow{AC} =$ _____；

(2) 在图中求作： $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$. (保留作图痕迹，写出结果，不要求写作法)；

(3) 若 $AC \perp BD$ ， $|\overrightarrow{AC}| = 6$ ， $|\overrightarrow{BD}| = 8$ ， 则 $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| =$ _____.

【答案】 (1) $\vec{a} + \vec{b}$ ， $-\vec{a} + \vec{b}$ ； (2) 见详解； (3) 10

【解析】

【分析】 (1) 利用平行四边形的性质以及向量的三角形法则求解即可.

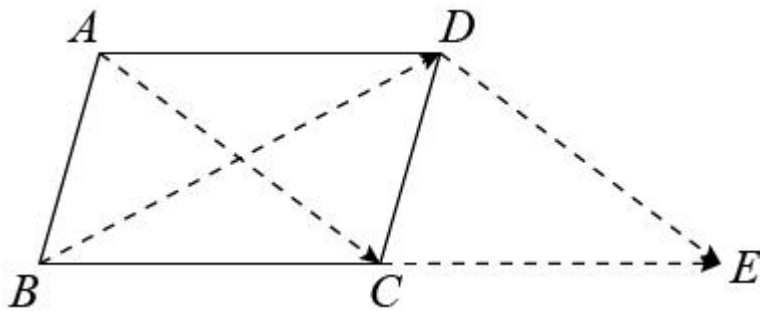
(2) 连接 AC ， BD ， 作 $DE \parallel AC$ 交 BC 的延长线于 E ， $\overrightarrow{BE}$ 即为所求.

(3) 根据平行四边形的对角线互相平分， 结合已知条件， 求出 $|\vec{b}| = 5$ ， 再根据 (2) 中结论解决问题即可.

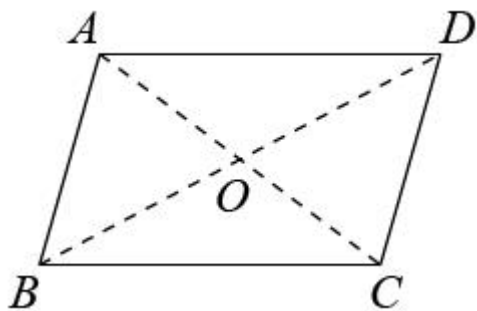
【详解】 解： (1) $\overrightarrow{BD} = \vec{a} + \vec{b}$ ， $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\vec{a} + \vec{b}$ ， 故答案为： $\vec{a} + \vec{b}$ ， $-\vec{a} + \vec{b}$

(2) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\vec{b}$ ， $\overrightarrow{BE}$ 即为所求.

如图， 连接 AC ， BD ， 作 $DE \parallel AC$ 交 BC 的延长线于 E ， 根据平面向量的三角形法则， $\overrightarrow{BE}$ 即为所求.



(3) 如图, 连接 AC, BD , 交于点 O .



根据平行四边形的性质, $AC = 6$, $CO = \frac{1}{2}AC = 3$.

$BD = 8$, $BO = \frac{1}{2}BD = 4$.

$\because AC \perp BD \therefore BC = \sqrt{BO^2 + CO^2} = 5$.

利用 (2) 中图形及结论, 易知 $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{AC} + \vec{BD}| = |2\vec{b}| = 10$

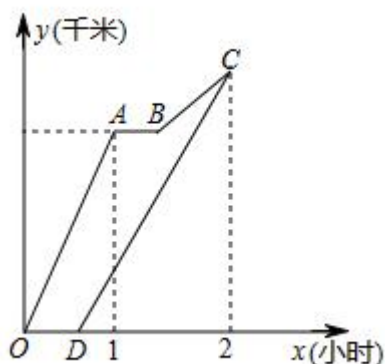
【点睛】 本题考查了平面向量, 涉及了平行四边形的性质和勾股定理. 解题的关键是熟练掌握平面向量的三角形法则.

23. 现有一段 20 千米长, 可供长跑爱好者跑步的笔直跑道 MN , 已知甲、乙两人都从 M 点出发, 甲跑到途中的 P 点后原地休息了 20 分钟, 之后继续跑到 N 点, 共用时间 2 小时; 乙虽然比甲晚出发半小时, 但和甲同时到达 N 点. 假设两人跑步均为匀速, 在甲出发后的 2 小时内两人离开 M 点的距离 y (千米) 与时间 x (小时) 的函数关系如图所示. 请回答下列问题:

(1) 图中 B 点的坐标为_____

(2) 甲从点 P 跑到点 N 的速度为_____千米/时;

(3) 求图中线段 CD 的表达式. 并写出定义域.



【答案】(1) $(\frac{4}{3}, 15)$; (2) 7.5; (3) $y = \frac{40}{3}x - \frac{20}{3}$ ($0.5 \leq x \leq 2$)

【解析】

【分析】(1) 根据题意可以写出点 B 的坐标，本题得以解决；

(2) 根据函数图象中的数据可以求得甲从点 P 跑到点 N 的速度；

(3) 根据题意和函数图象中的数据可以写出点 D 和点 C 的坐标，从而可得到线段 CD 的表达式，并写出定义域.

【详解】解：(1) 由题意可得，

点 B 的横坐标为： $1 + \frac{20}{60} = \frac{4}{3}$ ，纵坐标为： 15，

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(\frac{4}{3}, 15)$ ，

故答案为： $(\frac{4}{3}, 15)$ ；

(2) 甲从点 P 跑到点 N 的速度为： $\frac{20-15}{2-\frac{4}{3}} = 7.5$ 千米/时，

故答案为： 7.5；

(3) 由题意可得，点 D 的坐标为 $(0.5, 0)$ ，点 C 的坐标为 $(2, 20)$ ，

设线段 CD 的函数表达式为 $y = kx + b$ ，

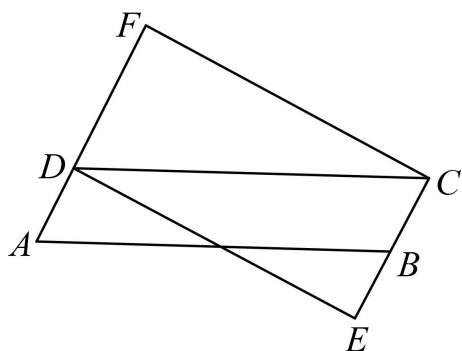
$$\begin{cases} 0.5k + b = 0 \\ 2k + b = 20 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} k = \frac{40}{3} \\ b = -\frac{20}{3} \end{cases},$$

即线段 CD 的表达式是 $y = \frac{40}{3}x - \frac{20}{3}$ ($0.5 \leq x \leq 2$).

【点睛】此题主要考查了一次函数的应用，涉及了待定系数法求解函数解析式，函数图像等相关知识，熟练掌握并灵活运用相关基础知识及性质是解题的关键.

四、解答题 (本大题共 3 题, 分别是 8 分, 8 分, 10 分, 共 36 分)

24. 如图, 已知 $ABCD$, 过点 D 作 $DE \perp BC$ 交 CB 延长线于点 E , 过点 C 作 $CF \parallel DE$ 交 AD 的延长线于点 F .



(1) 求证: 四边形 $DECF$ 是矩形;

(2) 设 DE 边与 AB 相交于点 G , 连结 CG 、 BD , 若 $CG = BD$, 求证: $\angle FDC = \angle BGE$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 可得 $AD \parallel BC$, 由 $CF \parallel DE$, 得到四边形 $DECF$ 是平行四边形, 由 $DE \perp BC$ 得到 $\angle DEC = 90^\circ$, 即可得到结论;

(2) 证明四边形 $DGBC$ 为等腰梯形, 求出 $DG = CB = AD$, 然后根据矩形的性质和三角形内角和定理求出 $\angle BGE = \angle DGA = 45^\circ$, $\angle FDC = \angle FDE - \angle CDG = 45^\circ$ 即可.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$,

$\because CF \parallel DE$,

$\therefore$ 四边形 $DECF$ 是平行四边形,

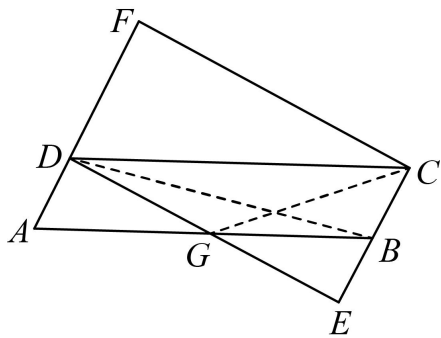
$\because DE \perp BC$,

$\therefore \angle DEC = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $DECF$ 是矩形;

【小问 2 详解】

如图,



$$\because BG \parallel CD, CG = BD,$$

$\therefore$ 四边形 $DGBC$ 为等腰梯形,

$$\therefore DG = CB,$$

$$\because AD = BC,$$

$$\therefore AD = DG,$$

$$\because \angle ADG = \angle FDG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAG = \angle DGA = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BGE = \angle DGA = 45^\circ,$$

$$\because AB \parallel DC,$$

$$\therefore \angle CDG = \angle DGA = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle FDC = \angle FDE - \angle CDG = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle FDC = \angle BGE.$$

【点睛】 本题考查了平行四边形的判定和性质，矩形的判定和性质，等腰梯形的判定和性质，平行线的性质以及三角形内角和定理等知识，灵活运用各性质进行推理论证是解题的关键.

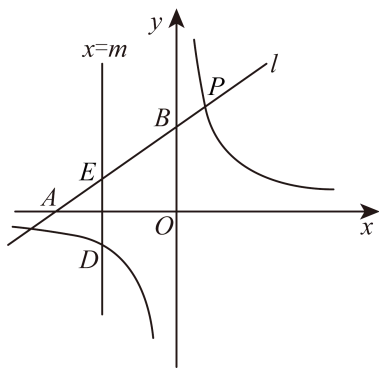
25. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $l: y = \frac{3}{4}x + b$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B ，与双曲线 $H: y = \frac{k}{x}$

交于点 $P(2, \frac{9}{2})$ ，直线 $x = m$ 分别与直线 l 和双曲线 H 交于点 E 、 D .

(1) 求 k 和 b 的值;

(2) 当点 E 在线段 AB 上时，如果 $ED = BO$ ，求 m 的值;

(3) 点 C 是 y 轴上一点，如果四边形 $BCDE$ 是菱形，求点 C 的坐标.



【答案】 (1) $k=9$, $b=3$; (2) $m=-2\sqrt{3}$; (3) $(0, -\frac{3}{4})$ 或 $(0, \frac{39}{8})$

【解析】

【分析】 (1) 利用待定系数法将点 $P(2, \frac{9}{2})$ 分别代入直线 l 和双曲线 H 的解析式中, 即可求出 k 和 b 的值;

(2) 由题意可得 $E(m, \frac{3}{4}m+3)$, $D(m, \frac{9}{m})$, 可得 $ED = \frac{3}{4}m+3 - \frac{9}{m}$, 利用 $ED=BO$, 建立方程求解即可;

(3) 过点 E 作 $EF \perp y$ 轴于点 F , 运用勾股定理求出 $BE = \frac{5}{4}|m|$, 由于四边形 $BCDE$ 是菱形, 可得 $BE=DE=BC$, 建立方程求解即可.

【详解】 解: (1) 把点 $P(2, \frac{9}{2})$ 代入 $y = \frac{k}{x}$, 得: $\frac{9}{2} = \frac{k}{2}$,

解得: $k=9$;

把点 $P(2, \frac{9}{2})$ 代入 $y = \frac{3}{4}x+b$, 得: $\frac{3}{2}+b = \frac{9}{2}$,

解得: $b=3$;

(2) 在直线 $y = \frac{3}{4}x+3$ 中, 令 $x=0$, 得: $y=3$,

$\therefore B(0, 3)$,

$\therefore OB=3$,

令 $y=0$, 得: $\frac{3}{4}x+3=0$,

解得: $x=-4$,

$\therefore A(-4, 0)$,

$\therefore$ 直线 $x=m$ 分别与直线 $y = \frac{3}{4}x+3$ 和双曲线 $y = \frac{9}{x}$ 交于点 E 、 D .

$$\therefore E \left(m, \frac{3}{4}m+3\right), D \left(m, \frac{9}{m}\right),$$

$\because$ 点 E 在线段 AB 上,

$$\therefore -4 \leq m \leq 0,$$

$$\therefore ED = \frac{3}{4}m+3 - \frac{9}{m},$$

$$\because ED = BO,$$

$$\therefore \frac{3}{4}m+3 - \frac{9}{m} = 3,$$

$$\text{解得: } m_1 = -2\sqrt{3}, m_2 = 2\sqrt{3},$$

经检验, $m_1 = -2\sqrt{3}, m_2 = 2\sqrt{3}$ 都是原方程的解, 但 $-4 \leq m \leq 0$,

$$\therefore m = -2\sqrt{3};$$

(3) 如图, 过点 E 作 $EF \perp y$ 轴于点 F ,

$$\because B(0, 3), E \left(m, \frac{3}{4}m+3\right), D \left(m, \frac{9}{m}\right),$$

$$\therefore F \left(0, \frac{3}{4}m+3\right),$$

$$\therefore BE^2 = BF^2 + EF^2 = \left[3 - \left(\frac{3}{4}m+3\right)\right]^2 + m^2 = \frac{25}{16}m^2,$$

$$\therefore BE = \frac{5}{4}|m|,$$

$$\text{又有 } DE = \left|\frac{3}{4}m+3 - \frac{9}{m}\right|,$$

$\because$ 四边形 $BCDE$ 是菱形,

$$\therefore BE = DE = BC,$$

$$\therefore \frac{5}{4}|m| = \left|\frac{3}{4}m+3 - \frac{9}{m}\right|,$$

$$\text{解得: } m_1 = -3, m_2 = \frac{3}{2},$$

$$\text{当 } m_1 = -3 \text{ 时, } D(-3, -3), E\left(-3, \frac{3}{4}\right),$$

$$\therefore DE = \frac{3}{4} - (-3) = \frac{15}{4},$$

$$\therefore BC = \frac{15}{4},$$

$$\therefore C\left(0, -\frac{3}{4}\right);$$

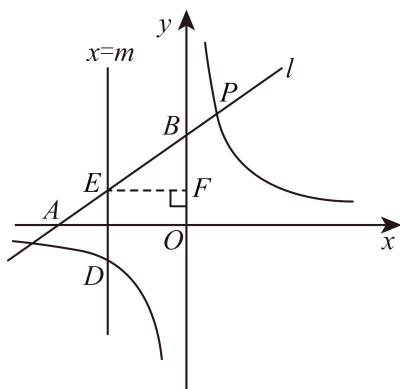
$$\text{当 } m_2 = \frac{3}{2} \text{ 时, } D\left(\frac{3}{2}, 6\right), E\left(\frac{3}{2}, \frac{33}{8}\right),$$

$$\therefore DE = 6 - \frac{33}{8} = \frac{15}{8},$$

$$\therefore BC = \frac{15}{8},$$

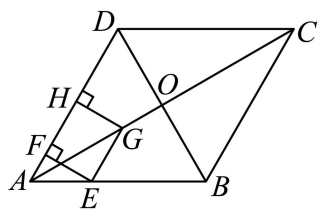
$$\therefore C(0, \frac{39}{8});$$

综上所述，点 C 的坐标为 $(0, -\frac{3}{4})$ 或 $(0, \frac{39}{8})$.

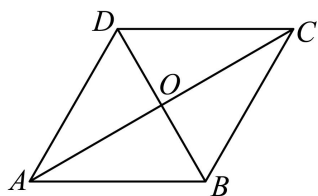


【点睛】 本题考查了一次函数和反比例函数的综合题，待定系数法，勾股定理，菱形性质等，熟练掌握反比例函数图像和性质等相关知识，灵活运用数形结合思想和方程思想是解题关键.

26. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ， $AB = 8$ ， $\angle BAD = 60^\circ$ ，点 E 从点 A 出发，沿 AB 以每秒 2 个单位长度的速度向终点 B 运动，当点 E 与点 A 不重合时，过点 E 作 $EF \perp AD$ 于点 F ，作 $EG \parallel AD$ 交 AC 于点 G ，过点 G 作射线 AD 垂线段 GH ，垂足为点 H ，得到矩形 $EFHG$ ，设点 E 的运动时间为 t 秒.



(备用图1)



(备用图2)

- (1) 求点 H 与点 D 重合时 t 的值;
- (2) 设矩形 $EFHG$ 与菱形 $ABCD$ 重叠部分图形的面积为 S ，求 S 与 t 之间的函数关系式;
- (3) 设矩形 $EFHG$ 的对角线 EH 与 FG 相交于点 O' ，
 - ①当 $OO' \parallel AD$ 时， t 的值为_____;
 - ②当 $O'O \perp AD$ 时，求出 t 的值.

【答案】 (1) $t = \frac{8}{3}$

$$(2) S = \begin{cases} 2\sqrt{3}t^2 & (0 < t \leq \frac{8}{3}) \\ -\frac{5}{2}\sqrt{3}t^2 + 24\sqrt{3}t - 32\sqrt{3} & (\frac{8}{3} < t \leq 4) \end{cases}$$

(3) ①4; ②3

【解析】

【分析】由四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle BAD = 60^\circ$, 可得 $GE = AE = 2t$, $FH = GE = 2t$, $AF = \frac{1}{2}AE = t$,

$$EF = \sqrt{AE^2 - AF^2} = \sqrt{3}t, \quad AH = AF + FH = 3t,$$

(1) 点 H 与点 D 重合时, $AH = AD$, 有 $3t = 8$, 即得 $t = \frac{8}{3}$;

(2) ①当 H 在边 AD 上, 即 $0 < t \leq \frac{8}{3}$ 时, $S = EF \cdot FH = \sqrt{3}t \cdot 2t = 2\sqrt{3}t^2$,

② 当 H 在边 AD 延长线上, 即 $\frac{8}{3} < t \leq 4$ 时, 设 HG 交 CD 于 M , 求出

$$S_{\triangle DHM} = \frac{1}{2}DH \cdot HM = \frac{9\sqrt{3}}{2}t^2 - 24\sqrt{3}t + 32\sqrt{3}, \quad S = EF \cdot FH - S_{\triangle DHM} \text{ 即可得到答案;}$$

(3) ①当 $O'O \parallel AD$ 时, 证明 $O'O$ 是 $\triangle AFG$ 的中位线, 得 O 是 AG 中点, 从而可得 G 与 C 重合, 此时, E 与 B 重合, 可得到 $t = \frac{AE}{2} = \frac{AB}{2} = 4$;

②当 $OO' \perp AD$ 时, 延长 OO' 交 AD 于 N , 证明 $O'N$ 是 $\triangle FGH$ 的中位线, 从而可得 $AN = AF + FN = 2t$,

而在 $\text{Rt}\triangle AON$ 中, $\angle DAC = 30^\circ$, $AN = \sqrt{OA^2 - ON^2} = 6$, 故 $2t = 6$, 即得 $t = 3$.

【小问1详解】

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle BAD = 60^\circ$,

$$\therefore \angle DAC = \angle BAC = \frac{1}{2}\angle BAD = 30^\circ,$$

$\because GE \parallel AD$,

$$\therefore \angle GEB = \angle BAD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EGA = \angle GEB - \angle BAC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle EGA = \angle BAC = 30^\circ,$$

$$\therefore GE = AE = 2t,$$

$\because$ 四边形 $EFHG$ 是矩形,

$$\therefore FH = GE = 2t,$$

在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中, $AF = \frac{1}{2}AE = t$, $EF = \sqrt{AE^2 - AF^2} = \sqrt{3}t$,

$$\therefore AH = AF + FH = 3t,$$

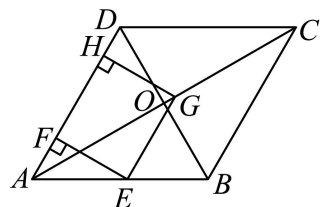
当点 H 与点 D 重合时, $AH = AD$,

$$\therefore 3t = 8,$$

$$\therefore t = \frac{8}{3};$$

【小问 2 详解】

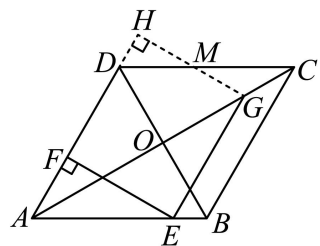
解: ①当 H 在边 AD 上, 即 $0 < t \leq \frac{8}{3}$ 时, 如图:



矩形 $EFHG$ 与菱形 $ABCD$ 重叠部分图形的面积即是矩形 $EFHG$ 的面积,

$$\therefore S = EF \cdot FH = \sqrt{3}t \cdot 2t = 2\sqrt{3}t^2,$$

②当 H 在边 AD 延长线上, 即 $\frac{8}{3} < t \leq 4$ 时, 设 HG 交 CD 于 M , 如图:



在 $\text{Rt}\triangle DHM$ 中, $\angle HDM = \angle DAB = 60^\circ$, $DH = AH - AD = 3t - 8$,

$$\therefore DM = 2DH = 6t - 16, \quad HM = \sqrt{DM^2 - DH^2} = 3\sqrt{3}t - 8\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle DHM} = \frac{1}{2}DH \cdot HM = \frac{9\sqrt{3}}{2}t^2 - 24\sqrt{3}t + 32\sqrt{3},$$

$\therefore$ 矩形 $EFHG$ 与菱形 $ABCD$ 重叠部分图形的面积

$$S = EF \cdot FH - S_{\triangle DHM} = 2\sqrt{3}t^2 - \left(\frac{9\sqrt{3}}{2}t^2 - 24\sqrt{3}t + 32\sqrt{3} \right) = -\frac{5}{2}\sqrt{3}t^2 + 24\sqrt{3}t - 32\sqrt{3},$$

$$\text{综上所述, 矩形 } EFHG \text{ 与菱形 } ABCD \text{ 重叠部分图形的面积 } S = \begin{cases} 2\sqrt{3}t^2 & \left(0 < t \leq \frac{8}{3} \right) \\ -\frac{5}{2}\sqrt{3}t^2 + 24\sqrt{3}t - 32\sqrt{3} & \left(\frac{8}{3} < t \leq 4 \right) \end{cases},$$

【小问 3 详解】

解: ①当 $O'O \parallel AD$ 时, 如图:

在 $\text{Rt}\triangle AON$ 中, $\angle DAC = 30^\circ$,

$$\therefore ON = \frac{1}{2}OA = 2\sqrt{3}, \quad AN = \sqrt{OA^2 - ON^2} = 6,$$

$$\therefore 2t = 6,$$

$$\therefore t = 3.$$

【点睛】 本题考查菱形性质及应用、矩形的性质应用, 涉及勾股定理、中位线定理等的应用, 解题的关键是方程的思想的应用, 用 t 表达出相关线段的长度, 再列方程解决问题.