

2022 学年第二学期八年级期末考试

数学试卷

(考试时间 90 分钟, 满分 100 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 26 题;
2. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
3. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 一次函数 $y = -2x + 1$ 的图象不经过的象限是 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】C

【解析】

【分析】根据一次函数的解析式, 利用一次函数图象与系数的关系可得出一次函数 $y = -2x + 1$ 的图象经过第一、二、四象限, 此题得解.

【详解】解: $\because k = -2 < 0, b = 1 > 0,$

$\therefore$ 一次函数 $y = -2x + 1$ 的图象经过第一、二、四象限,

$\therefore$ 一次函数 $y = -2x + 1$ 的图象不经过第三象限.

故选: C.

【点睛】本题考查了一次函数图象与系数的关系, 牢记 “ $k < 0, b > 0 \Leftrightarrow y = kx + b$ 的图象在一、二、四象限” 是解题的关键.

2. 下列方程中, 有实数根的方程是 ()

- A. $8x^3 + 1 = 0$; B. $x^4 + 1 = 0$; C. $\sqrt{x+1} + 2 = 0$; D. $\frac{2}{x-2} = \frac{x}{x-2}$.

【答案】A

【解析】

【分析】根据解方程的方程, 幂的运算与开立方的运算, 解无理方程的方法, 解分式方程的方法即可求解.

【详解】解：A、 $8x^3+1=0$ ，整理得， $x^3=-\frac{1}{8}$ ，解方程得， $x=-\frac{1}{2}$ ，有实数根，符合题意；

B、 $x^4+1=0$ ，整理得， $x^4=-1$ ， $\because x^4 \geq 0$ ， $\therefore$ 原方程无解，不符合题意；

C、 $\sqrt{x+1}+2=0$ ，整理得， $\sqrt{x+1}=-2$ ， $\because \sqrt{x+1} \geq 0$ ， $\therefore$ 原方程无解，不符合题意；

D、 $\frac{2}{x-2}=\frac{x}{x-2}$ ，整理得， $x=2$ ， $\because$ 当 $x=2$ 时，分式方程无意义， $\therefore$ 原方程无解，不符合题意；

故选：A.

【点睛】本题主要考查解方程的综合，掌握解无理方程，分式方程，开立方的运算，二次根式的性质等知识是解题的关键.

3. 下列函数中，对于任意实数 x_1, x_2 ，当 $x_1 > x_2$ 时，满足 $y_1 < y_2$ 的是()

A. $y = -3x+2$ B. $y = 2x+1$ C. $y = 5x$ D. $y = -\frac{1}{x}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据一次函数和反比例函数的增减性,即可判断.

【详解】在 $y = -3x+2$ 中, y 随 x 的增大而减小, $\therefore$ 对于任意实数 x_1, x_2 ，当 $x_1 > x_2$ 时，满足 $y_1 < y_2$ ，故选项A正确，

在 $y = 2x+1$ 中， y 随 x 的增大而增大， $\therefore$ 对于任意实数 x_1, x_2 ，当 $x_1 > x_2$ 时，满足 $y_1 > y_2$ ，故选项B错误，

在 $y = 5x$ 中， y 随 x 的增大而增大， $\therefore$ 对于任意实数 x_1, x_2 ，当 $x_1 > x_2$ 时，满足 $y_1 > y_2$ ，故选项C错误，

在 $y = -\frac{1}{x}$ 中，在每个象限内， y 随 x 的增大而增大，当 $x_1 > x_2 > 0$ 时，满足 $y_1 > y_2$ ，故选项D错误，

故选A.

【点睛】本题重点考查了函数的增减性,一次函数的增减性由 k 来决定, $k > 0$, y 随 x 增大而增大，反之增大而减小，反比例函数的增减性也是由 k 来决定，在每一个象限内，当 $k > 0$ 时， y 随 x 增大而减小，反之，则增大而增大，因此熟练掌握相关的知识点是解题的关键.

4. 下列说法错误的是 ()

A. 不可能事件发生的概率为0

B. 随机事件发生的概率为0.5

C. 必然事件发生的概率为1

D. 随机事件发生的概率介于0和1之间

【答案】B

【解析】

【分析】根据概率值只是反映了事件发生的机会的大小，不是会一定发生．不确定事件就是随机事件，即可能发生也可能不发生的事件，发生的概率大于0并且小于1，可得答案.

【详解】解：A、不可能事件发生的概率为0，故A正确；

B、随机事件发生的概率介于 0 和 1 之间，故 B 错误；

C、必然事件发生的概率为 1，故 C 正确；

D、随机事件发生的概率介于 0 和 1 之间，故 D 正确.

故选 B.

【点睛】本题考查概率的意义，理解概率的意义反映的只是这一事件发生的可能性的大小：必然发生的事件发生的概率为 1，随机事件发生的概率大于 0 且小于 1，不可能事件发生的概率为 0.

5. 在 $\square ABCD$ 中， AC 与 BD 相交于点 O ，要使四边形 $ABCD$ 是矩形，还需添加一个条件，这个条件可以是()

A. $AC \perp BD$ ； B. $\angle OAB = \angle OAD$ ； C. $BA = BO$ ； D. $OB = OC$.

【答案】D

【解析】

【分析】根据对角线相等的平行四边形是矩形得出即可.

【详解】解：添加选项 D: $OB = OC$ ，

理由是： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore OA = OC = \frac{1}{2}AC, \quad OB = OD = \frac{1}{2}BD,$$

$$\because OB = OC,$$

$$\therefore AC = BD,$$

$$\therefore ABCD \text{ 为矩形},$$

补充其他选项推导：

A 选项， $AC \perp BD$ ，对角线互相垂直，可以证明 $ABCD$ 为菱形，但不能证明 $ABCD$ 为矩形，不符合题意；

B 选项、 $\angle OAB = \angle OAD$ ，对角线 BD 平分内角 $\angle BAD$ ，可以证明 $ABCD$ 为菱形，但不能证明 $ABCD$ 为矩形，不符合题意；

C 选项，不能证明 $ABCD$ 为矩形，不符合题意.

故选 D.

【点睛】本题考查矩形的判定、平行四边形的性质等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考基础题.

6. 已知向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，则 ()

A. $\vec{a} = \vec{b}$

B. $\vec{a} = -\vec{b}$

C. $\vec{a} \parallel \vec{b}$

D. 以上都有可能

【答案】 D

【解析】

【分析】 利用单位向量的定义和性质直接判断即可.

【详解】 解: 若向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$,

可得: $\vec{a}=\vec{b}$, 或 $\vec{a}=-\vec{b}$, 或 $\vec{a} \parallel \vec{b}$,

故选: D.

【点睛】 此题考查平面向量问题. 解题时要认真审题, 注意单位向量、零向量、共线向量的定义和性质的合理运用.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7. 已知直线 $y=kx+b$ 经过点 $(2,2)$, 并且与直线 $y=2x+1$ 平行, 那么 $b=$ _____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】 根据两直线平行, 可知 k 的值, 再把点 $(2,2)$ 代入计算即可求解.

【详解】 解: $\because$ 直线 $y=kx+b$ 与直线 $y=2x+1$ 平行,

$\therefore k=2$,

$\therefore y=2x+b$, 把点 $(2,2)$ 代入得, $2 \times 2 + b = 2$, 解得, $b=-2$,

故答案为: -2.

【点睛】 本题主要考查两直线的位置关系, 待定系数法求解析式, 掌握两线平行的知识, 待定系数法求一次函数解析式的运算方法是解题的关键.

8. 方程 $x^4 - 16 = 0$ 的根是_____.

【答案】 ± 2

【解析】

【分析】 根据平方根的定义, 很容易求解, 或者把方程左边因式分解, 通过降次的方法也可以求解.

【详解】 $\because x^4 - 16 = 0$,

$\therefore (x^2+4)(x+2)(x-2) = 0$,

$\therefore x = \pm 2$,

$\therefore$ 方程 $x^4 - 16 = 0$ 的根是 $x = \pm 2$,

故答案为 ± 2 .

【点睛】该题为高次方程，因此解决该题的关键，是需要把方程左边因式分解，从而达到降次的目的，把高次方程转化为低次方程，从而求解.

9. 关于 x 的方程 $a^2x = 2 - x$ 的解是_____.

【答案】 $x = \frac{2}{a^2 + 1}$

【解析】

【分析】根据移项，化系数为 1，即可求解.

【详解】解： $a^2x = 2 - x$

$$\therefore a^2x + x = 2$$

$$\text{即 } (a^2 + 1)x = 2,$$

$$\text{解得： } x = \frac{2}{a^2 + 1}$$

$$\text{故答案为： } x = \frac{2}{a^2 + 1}.$$

【点睛】本题考查解一元一次方程，熟练掌握一元一次方程的解法是解题的关键.

10. 已知关于 x 的方程 $\frac{3x}{x^2 - 1} + \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{5}{2}$ ，如果设 $\frac{x}{x^2 - 1} = y$ ，那么原方程化为关于 y 的方程是_____.

【答案】 $3y + \frac{1}{y} = \frac{5}{2}$.

【解析】

【分析】先根据 $\frac{x}{x^2 - 1} = y$ 得到 $\frac{x^2 - 1}{x} = \frac{1}{y}$ ，再代入原方程进行换元即可.

【详解】由 $\frac{x}{x^2 - 1} = y$ ，可得 $\frac{x^2 - 1}{x} = \frac{1}{y}$

$$\therefore \text{原方程化为 } 3y + \frac{1}{y} = \frac{5}{2}$$

$$\text{故答案为 } 3y + \frac{1}{y} = \frac{5}{2}.$$

【点睛】本题主要考查了换元法解分式方程，换元的实质是转化，将复杂问题简单化. 常用的是整体换元法，是在已知或者未知中，某个代数式几次出现，用一个字母来代替它可以简化问题，有时候要通过变形

才能换元.

11. 方程 $\sqrt{2x+3} = -x$ 的解为_____.

【答案】 $x = -1$

【解析】

【分析】 根据二次根式的性质，二次根式运算法则，解一元二次方程的方法即可求解.

【详解】 解: $\sqrt{2x+3} = -x$

两边同时平方得, $2x+3 = x^2$, 整理得, $x^2 - 2x - 3 = 0$,

$\therefore (x+1)(x-3) = 0$, 解得, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$,

当 $x = -1$ 时, 被开方数 $2x+3 = 2 \times (-1) + 3 = 1$, 且 $\sqrt{1} = -(-1) = 1$, 符合题意;

当 $x = 3$ 时, 被开方数 $2x+3 = 2 \times 3 + 3 = 9$, 且 $\sqrt{9} = 3 \neq -3$, 不符合题意;

$\therefore$ 原方程的解为 $x = -1$,

故答案为: $x = -1$.

【点睛】 本题主要考查二次根式与解一元二次方程的综合, 掌握二次根式的性质, 解一元二次方程的方法是解题的关键.

12. 布袋里有 2 个红球和 4 个白球, 它们除了颜色外其他都相同. 从布袋里随机摸出一个球恰好为白球的概率是_____.

【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 根据概率的计算方法即可求解.

【详解】 解: 摸出一个球恰好为白球的概率是 $\frac{4}{2+4} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$,

故答案为: $\frac{2}{3}$.

【点睛】 本题主要考查概率的计算, 理解并掌握随机事件概率的计算公式, 方法是解题的关键.

13. 正多边形的一个外角等于 20° , 则这个正多边形的边数是_____.

【答案】 18

【解析】

【详解】 试题分析: 因为正多边形的外角和是 360° , 若这个正多边形的一个外角等于 20° , 则这个正多边形的边数是 $360 \div 20 = 18$. 是正十八边形.

考点: 正多边形的边角计算.

14. 如果一个梯形的中位线长是 6cm，高是 4cm，那么它的面积等于_____cm².

【答案】 24

【解析】

【分析】梯形的上底是 a ，下底是 b ，高为 h ，则有 $\frac{1}{2}(a+b) = 6\text{cm}$ ， $h = 4\text{cm}$ ，从而利用梯形的面积公式求解.

【详解】设梯形的上底是 a ，下底是 b ，高为 h ，

$\because$ 中位线长是 6cm，中位线长等于上底与下底之和的一半，

$$\therefore \frac{1}{2}(a+b) = 6\text{cm}$$

又 $\because$ 高是 4cm，即 $h = 4\text{cm}$ ，

$$\therefore \text{这个梯形的面积为：} S = \frac{1}{2}(a+b)h = 6 \times 4 = 24(\text{cm}^2),$$

故答案是：24.

【点睛】本题考查梯形的中位线定理和梯形的面积公式，掌握这两个知识点是解题的关键.

15. 某厂去年 1 月份的产值为 144 万元，3 月份下降到 100 万元，求这两个月平均每月产值降低的百分率. 如果设平均每月产值降低的百分率是 x ，那么列出的方程是_____.

【答案】 $144(1-x)^2 = 100$.

【解析】

【分析】设平均每月产值降低的百分率是 x ，那么 2 月份的产值为 $144(1-x)$ 万元，3 月份的产值为 $144(1-x)^2$ 万元，然后根据 3 月份的产值为 100 万元即可列出方程.

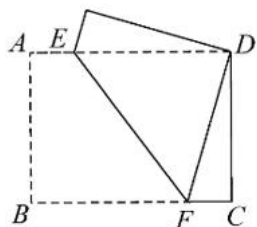
【详解】设平均每月产值降低的百分率是 x ，则 2 月份的产值为 $144(1-x)$ 万元，3 月份的产值为 $144(1-x)^2$ 万元，

根据题意，得 $144(1-x)^2 = 100$.

故答案为 $144(1-x)^2 = 100$.

【点睛】本题考查由实际问题抽象出一元二次方程-求平均变化率的方法. 若设变化前的量为 a ，变化后的量为 b ，平均变化率为 x ，则经过两次变化后的数量关系为 $a(1 \pm x)^2 = b$. 得到 3 月份的产值的等量关系是解决本题的关键.

16. 如图，在矩形纸片 $ABCD$ 中， $AB = 6\text{cm}$ ， $BC = 8.5\text{cm}$ ，将矩形纸片折叠，使点 B 与点 D 重合，那么 $\triangle DCF$ 的周长是_____cm.



【答案】 14.5

【解析】

【分析】 根据翻转变换的性质得到 $BF = DF$ ，根据三角形的周长公式计算即可.

【详解】 解：由翻转变换的性质可知， $BF = DF$ ，

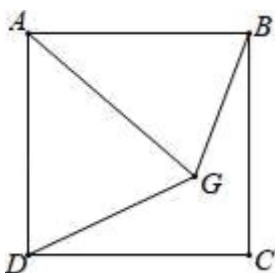
则 $\triangle DCF$ 的周长

$$= DF + CF + CD = BF + CF + CD = BC + CD = 8.5 + 6 = 14.5,$$

故答案为14.5.

【点睛】 本题考查的是翻转变换的性质，翻转变换是一种对称变换，折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等.

17. 如图，点 G 为正方形 $ABCD$ 内一点， $AB = AG$ ， $\angle AGB = 70^\circ$ ，联结 DG ，那么 $\angle BGD =$ _____度.



【答案】 135.

【解析】

【分析】 根据正方形的性质可得出 $AB = AD$ 、 $\angle BAD = 90^\circ$ ，由 $AB = AG$ 、 $\angle AGB = 70^\circ$ 利用等腰三角形的性质及三角形内角和定理可求出 $\angle BAG$ 的度数，由 $\angle DAG = 90^\circ - \angle BAG$ 可求出 $\angle DAG$ 的度数，由等腰三角形的性质结合三角形内角和定理可求出 $\angle AGD$ 的度数，再由 $\angle BGD = \angle AGB + \angle AGD$ 可求出 $\angle BGD$ 的度数.

【详解】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$$\therefore AB = AD, \quad \angle BAD = 90^\circ.$$

$$\because AB = AG, \quad \angle AGB = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle BAG = 180^\circ - 70^\circ - 70^\circ = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle DAG = 90^\circ - \angle BAG = 50^\circ,$$

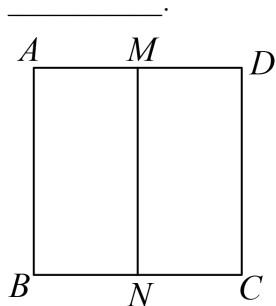
$$\therefore \angle AGD = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle DAG) = 65^\circ,$$

$$\therefore \angle BGD = \angle AGB + \angle AGD = 135^\circ.$$

故答案为 135.

【点睛】 本题考查了正方形的性质、等腰三角形的性质以及三角形内角和定理，根据等腰三角形的性质结合三角形内角和定理求出 $\angle AGD$ 的度数是解题的关键.

18. 如图，在边长为 6 的正方形 $ABCD$ 中，点 M 、 N 分别是边 AD 、 BC 的中点， Q 是边 CD 上的一点. 连接 MN 、 BQ ，将 $\triangle BCQ$ 沿着直线 BQ 翻折，若点 C 恰好与线段 MN 上的点 P 重合，则 PQ 的长等于

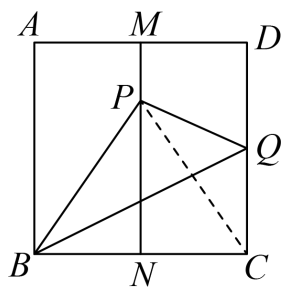


【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 先证明 $\triangle BCP$ 是等边三角形，得到 $\angle PBC = 60^\circ$ ，从而由折叠的性质得到 $\angle PBQ = \angle CBQ = \frac{1}{2} \angle PBC = 30^\circ$ ， $\angle BPQ = \angle BCD = 90^\circ$ ，设 $PQ = x (x > 0)$ ，则 $BQ = 2x$ ，在 $\text{Rt}\triangle BPQ$ 中，利用勾股定理列出方程求解即可.

【详解】 解：根据题意，画图如下：



在边长为 6 的正方形 $ABCD$ 中，点 M 、 N 分别是边 AD 、 BC 的中点，

$\therefore BC = PB = 6$ ， MN 垂直平分 BC ， $\angle BCD = 90^\circ$ ，

$\therefore BC = PB = CP$ ，

$\therefore \triangle BCP$ 是等边三角形，

$\therefore \angle PBC = 60^\circ$ ，

由折叠的性质可得： $\angle PBQ = \angle CBQ = \frac{1}{2} \angle PBC = 30^\circ$ ， $\angle BPQ = \angle BCD = 90^\circ$

设 $PQ = x (x > 0)$ ，则 $BQ = 2x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BPQ$ 中， $PB^2 + PQ^2 = BQ^2$ ，即 $6^2 + x^2 = (2x)^2$ ，

解得： $x = 2\sqrt{3}$ ，

即： $PQ = 2\sqrt{3}$ 。

【点睛】 本题主要考查了折叠的性质，等边三角形的判定与性质，含 30° 角的直角三角形的性质，垂直平分线的性质，勾股定理等知识，根据题意画出图形是解题的关键。折叠是一种对称变换，它属于轴对称，根据轴对称的性质，折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等。

三、简答题：（本大题共 4 题，每题 6 分，满分 24 分）

19. 解方程：
$$\frac{x-2}{x+2} - \frac{4}{4-x^2} = \frac{1}{x-2}$$

【答案】 $x = 3$

【解析】

【分析】 运用乘法公式，分式的性质解分式方程即可。

【详解】 解：
$$\frac{x-2}{x+2} + \frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x-2}$$

$$\frac{x-2}{x+2} + \frac{4}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$$

方程两边同时乘以： $(x+2)(x-2)$ ，得： $(x-2)^2 + 4 = x+2$ ，整理得： $x^2 - 5x + 6 = 0$ ，

$$\therefore (x-2)(x-3) = 0, \text{ 解得: } x_1 = 2, x_2 = 3$$

经检验： $x_1 = 2$ 是增根，故舍去，

$\therefore$ 原方程的根是 $x = 3$ 。

【点睛】 本题主要考查解分式方程，掌握乘法公式，解分式方程的方法是解题的关键。

20. 解方程组：
$$\begin{cases} y - 2x = 6 & \text{①} \\ 4x^2 + 4xy + y^2 = 4 & \text{②} \end{cases}$$

【答案】 $\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = 2 \end{cases}$

【解析】

【分析】 由②得 $2x + y = \pm 2$ 从而将原方程组化成两个二元一次方程组，分别求二元一次方程组的解即可。

【详解】 解：由②得： $(2x + y)^2 = 4$ ，

$\therefore 2x + y = \pm 2$, 即 $2x + y = 2$ 或 $2x + y = -2$,

$\therefore$ 原方程组可化为两个二元一次方程组

$$(I) \begin{cases} y - 2x = 6 \\ 2x + y = 2 \end{cases}, \quad (II) \begin{cases} y - 2x = 6 \\ 2x + y = -2 \end{cases},$$

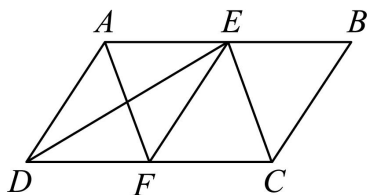
解(I)得: $\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 4 \end{cases}$

解(II)得: $\begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = 2 \end{cases}$

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 4 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = 2 \end{cases}$.

【点睛】 本题考查二元二次方程的解法, 掌握二元二次方程的解法是解题的关键.

21. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 、 F 分别在边 AB 和 CD 上, $EF \parallel AD$ 且点 E 是 AB 的中点, 联结 AF , DE , EC .



(1) 写出图中与 $\overrightarrow{AF}$ 相等的向量: _____;

(2) 如果 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 请用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 分别表示: $\overrightarrow{EC} =$ _____; $\overrightarrow{DE} =$ _____;

(3) 求作: $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BC}$. (请在原图上求作, 不要求写作法, 但要写出结论)

【答案】 (1) $\overrightarrow{EC}$

(2) $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$; $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$

(3) 作图见解析

【解析】

【分析】 (1) 通过平行四边形的性质及中点的意义证明四边形 $AFCE$ 是平行四边形, 即可求解;

(2) 直接根据向量的三角形法则和平行四边形法则进行求解即可;

(3) 根据向量的加减法运算法则先将 $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BC}$ 进行化简, 再作图即可.

【小问 1 详解】

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB \parallel CD, AB = CD,$$

$$\because EF \parallel AD,$$

$\therefore$ 四边形 $ADFE$ 是平行四边形,

$$\therefore AE = DF,$$

$\because$ 点 E 是 AB 的中点,

$$\therefore AE = BE = \frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore AE = DF = \frac{1}{2}CD = CF,$$

$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 是平行四边形,

$$\therefore AF = EC,$$

$$\therefore \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EC},$$

故答案为: $\overrightarrow{EC}$;

【小问 2 详解】

$\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}$, 点 E 是 AB 的中点,

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{a},$$

$\because \overrightarrow{AD} = \vec{b}$, 四边形 $ADFE$ 是平行四边形,

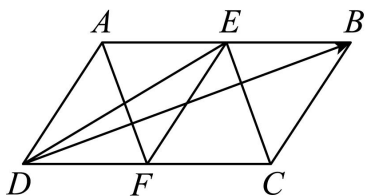
$$\therefore \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}, \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b},$$

故答案为: $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$, $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$;

【小问 3 详解】

$$\because \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EC},$$

$$\therefore \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$$



$\therefore$ 图中 $\overrightarrow{DB}$ 为所求向量.

【点睛】 本题考查了向量的加减法运算法则, 涉及平行四边形的判定和性质, 熟练掌握三角形法则和平行四边形法则是解题的关键.

22. 某学校图书馆两次从书店购进某种图书，每次都用 3000 元. 已知第二次购进这种书每本的价格比第一次每本的价格少了 2 元，且比第一次购进的书多了 75 本，求第一次购书时每本的价格.

【答案】10 元

【解析】

【分析】设第一次购书时每本的价格是 x 元，则第二次购书时每本的价格是 $(x-2)$ 元，再根据第一次购进的本数与第二次购进的本数的关系列分式方程求解即可.

【详解】解：设第一次购书时每本的价格是 x 元，则第二次购书时每本的价格是 $(x-2)$ 元，

根据题意，得：
$$\frac{3000}{x-2} - \frac{3000}{x} = 75,$$

去分母，整理，得： $x^2 - 2x - 80 = 0$ ，解得 $x_1 = 10$ ， $x_2 = -8$ ，

经检验， $x_1 = 10$ ， $x_2 = -8$ 都是原方程的根，因为购书的价格不能为负的，

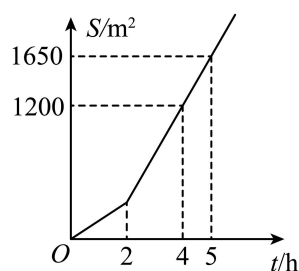
$\therefore x = 10$ ，

$\therefore$ 第一次购书时每本的价格是 10 元.

【点睛】本题主要考查分式方程的运用，理解题意中的数量关系列方程，掌握解分式方程的方法是解题的关键.

四、解答题：（本大题共 4 题，23-25 题每题 8 分，26 题 10 分，满分 34 分）

23. 庆华社区有一块空地需要绿化，某绿化组承担了此项任务，绿化组工作一段时间后，提高了工作效率. 该绿化组完成的绿化面积 S （单位： m^2 ）与工作时间 t （单位： h ）之间的函数关系如图所示.



(1) 求提高效率后， S 关于 t 的函数关系式；

(2) 该绿化组提高工作效率后每小时完成的绿化面积比提高工作效率前每小时完成的绿化面积多多少？

【答案】(1) $y = 450x - 600$

(2) 该绿化组提高工作效率后每小时完成的绿化面积比提高工作效率前每小时完成的绿化面积多 $300m^2$

【解析】

【分析】(1) 根据待定系数法可求直线 AB 的解析式，

(2) 根据函数上点的坐标特征得出当 $x = 2$ 时， y 的值，再根据工作效率 = 工作总量 ÷ 工作时间，列出算式

求出该绿化组提高工作效率前每小时完成的绿化面积.

【小问 1 详解】

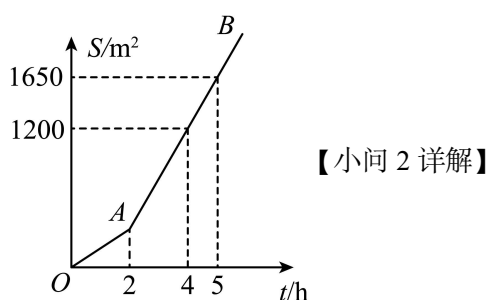
解: 如图, 设直线 AB 的解析式为 $y = kx + b$, 则有:

$$\begin{cases} 4k + b = 1200 \\ 5k + b = 1650 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 450 \\ b = -600 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AB 的解析式为 $y = 450x - 600$,

$\therefore$ 提高效率后, S 关于 t 的函数关系式为: $y = 450x - 600$.



$\therefore$ 直线 AB 的解析式为 $y = 450x - 600$,

当 $x = 2$ 时, $y = 450 \times 2 - 600 = 300$,

$\therefore 300 \div 2 = 150$,

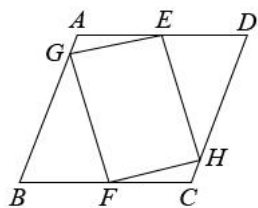
$\therefore (1650 - 1200) \div (5 - 4) = 450$

$\therefore 450 - 150 = 300(m^2)$.

答: 该绿化组提高工作效率后每小时完成的绿化面积比提高工作效率前每小时完成的绿化面积多 $300m^2$.

【点睛】考查了一次函数的应用和函数的图像, 关键是根据待定系数法求出该绿化组提高工作效率后的函数解析式, 同时考查了工作效率 = 工作总量 $\div$ 工作时间的知识点.

24. 已知: 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 、 F 分别是 AD 、 BC 的中点, 点 G 、 H 分别在边 AB 、 CD 上, 且 $AG = CH$.



(1) 求证: $\triangle AGE \cong \triangle CHF$;

(2) 若 $\angle AEG + \angle BFG = 90^\circ$, 求证: 四边形 $EGFH$ 是矩形.

【答案】(1) 证明见详解

(2) 证明见详解

【解析】

【分析】(1) 根据平行四边形的性质得到 $\angle A = \angle C$, $AD = BC$, 根据线段中点的定义得到 $AE = \frac{1}{2}AD$, $CF = \frac{1}{2}BC$, 根据全等三角形的判定定理即可得到结论;

(2) 根据平行四边形的性质 $\angle B = \angle D$, $AD = BC$, $AB = CD$, 求得 $DE = \frac{1}{2}AD$, $BF = \frac{1}{2}BC$, 得到 $DE = BF$, 求得 $BG = DH$, 根据全等三角形的性质得到 $FG = EH$, $EG = FH$, $\angle AEG = \angle CFH$, 根据矩形的判定定理即可得到结论.

【小问 1 详解】

证明: 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore \angle A = \angle C, \quad AD = BC, \quad AB = CD,$$

$\therefore$ 点 E 、 F 分别是 AD 、 BC 的中点,

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AD, \quad CF = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore AE = DE = BF = CF,$$

在 $\triangle AGE$ 与 $\triangle CHF$ 中,

$$\begin{cases} AG = CH \\ \angle A = \angle C \\ AE = CF \end{cases}$$

$$\triangle AGE \cong \triangle CHF (SAS);$$

【小问 2 详解】

证明: $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore \angle B = \angle D, \quad AD = BC, \quad AB = CD,$$

$\therefore$ 点 E 、 F 分别是 AD 、 BC 的中点,

$$\therefore DE = \frac{1}{2}AD, \quad BF = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore DE = BF,$$

$$\therefore AG = CH,$$

$$\therefore AB - AG = CD - CH,$$

即 $BG = DH$,

$$\therefore \triangle BFG \cong \triangle DEH (SAS),$$

$$\therefore FG = EH$$

由(1)知 $\triangle AGE \cong \triangle CHF$,

$$EG = FH, \angle AEG = \angle CFH,$$

$\therefore$ 四边形 $EGFH$ 是平行四边形,

$$\therefore \angle AEG + \angle BFG = 90^\circ,$$

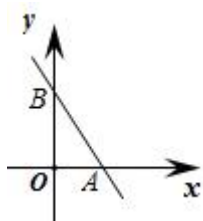
$$\therefore \angle CFH + \angle BFG = 90^\circ$$

$$\therefore \angle GFH = 90^\circ$$

$\therefore$ 四边形 $EGFH$ 是矩形.

【点睛】本题考查了菱形的判定，全等三角形的判定和性质，平行四边形的判定和性质，熟练掌握全等三角形的判定和性质定理是解题的关键.

25. 如图，平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A ， B .



(1) 求 $\triangle AOB$ 的面积.

(2) 点 P 是 y 轴上的点，在坐标平面内是否存在点 Q ，使以 A 、 B 、 P 、 Q 为顶点的四边形是菱形？若存在，请直接写出 Q 点的坐标；若不存在，请说明理由.

【答案】(1) $S_{\triangle OAB} = 2\sqrt{3}$;

(2) 满足条件的 Q 点的坐标为： $(-2, 0)$ 或 $(2, 4)$ 或 $(2, -4)$ 或 $\left(2, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法求出 A 、 B 两点坐标即可解决问题；

(2) ①当 AB 是菱形的边时，分三种情形讨论求解；②当 AB 为菱形的对角线时，如图所示的菱形 AP_4BQ_4 ，构建方程即可解决问题；

【小问 1 详解】

解：对于直线 $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$,

令 $x = 0$ 得到 $y = 2\sqrt{3}$ ，令 $y = 0$ ，得到 $x = 2$,

$$\therefore A(2,0), B(0,2\sqrt{3}),$$

$$\therefore OA=2, OB=2\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}OB \cdot OA = 2\sqrt{3}.$$

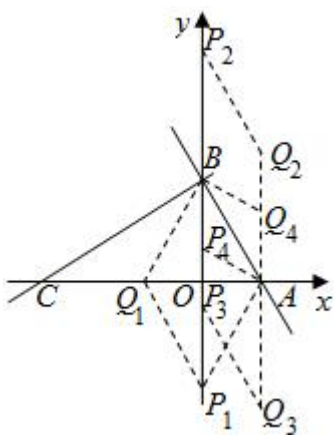
【小问2详解】

存在. 理由如下:

$$\because OA=2, OB=2\sqrt{3},$$

$$\therefore AB = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4,$$

①当 AB 是菱形的边时, 如图所示,



在菱形 AP_1Q_1B 中,

$$Q_1O = AO = 2, \text{ 所以 } Q_1 \text{ 的坐标为 } (-2,0),$$

在菱形 ABP_2Q_2 中,

$$AQ_2 \parallel BP_2, AQ_2 = AB = 4, \text{ 所以 } Q_2 \text{ 的坐标为 } (2,4),$$

在菱形 ABP_3Q_3 中,

$$AQ_3 \parallel BP_3, AQ_3 = AB = 4, \text{ 所以 } Q_3 \text{ 的坐标为 } (2,-4),$$

②当 AB 为菱形的对角线时, 如图所示的菱形 AP_4BQ_4 ,

设菱形的边长为 x , 则 $AP_4 = BP_4 = x$, $OP_4 = 2\sqrt{3} - x$,

则在 $\text{Rt}\triangle AP_4O$ 中, $P_4A^2 = AO^2 + P_4O^2$,

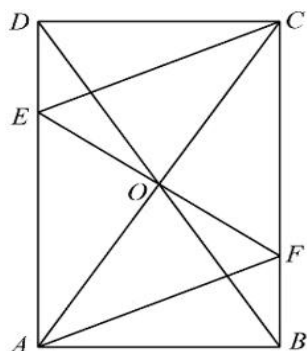
$$\text{即 } x^2 = 2^2 + (2\sqrt{3} - x)^2, \text{ 解得 } x = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore Q_4\left(2, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right).$$

综上可得，平面内满足条件的 Q 点的坐标为： $(-2, 0)$ 或 $(2, 4)$ 或 $(2, -4)$ 或 $\left(2, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.

【点睛】 本题考查了一次函数综合题，涉及的知识点有：勾股定理的应用，二次根式的乘除运算，三角形面积的计算，菱形的性质，清晰的分类讨论是解本题的关键.

26. 在矩形 $ABCD$ 中， $AB = \sqrt{3}$ ，对角线 AC 、 BD 相交于点 O ，过点 O 作 $EF \perp AC$ 分别交射线 AD 与射线 CB 于点 E 和点 F ，连结 CE 、 AF .



- (1) 如图，求证：四边形 $AFCE$ 是菱形；
- (2) 当点 E 、 F 分别在边 AD 和 BC 上时，如果设 $AD = x$ ，菱形 $AFCE$ 的面积是 y ，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出 x 的取值范围；
- (3) 如果 $\triangle ODE$ 是等腰三角形，直接写出 AD 的长度.

【答案】 (1) 证明见解析

$$(2) y = \frac{\sqrt{3}x^2 + 3\sqrt{3}}{2x} \quad (x \geq \sqrt{3})$$

(3) 3 或 1

【解析】

【分析】 (1) 根据矩形的性质，可证 $\triangle AEO \cong \triangle CFO$ (ASA)，四边形 $AFCE$ 是平行四边形，再根据 $EF \perp AC$ ，菱形的判定方法即可求解；

(2) 设 $AE = t$ ，则 $DE = x - t$ ，根据勾股定理可求出 AE 的值，再根据菱形的面积计算方法即可求解；

(3) 分类讨论：①如图所示，点 E 在 AD 上， $ED = EO$ ；②如图所示，点 E 在线段 AD 的延长线上时；根据矩形的性质，等边三角形的性质，图形结合分析即可求解.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 矩形 $ABCD$,

$\therefore AC$ 与 BD 互相平分, 且 $AD \parallel BC$, $AO = CO$,

$\therefore \angle EAO = \angle FCO$,

在 $\triangle AEO, \triangle CFO$ 中,

$$\begin{cases} \angle EAO = \angle FCO \\ AO = CO \\ \angle AOE = \angle COF \end{cases}$$

$\therefore \triangle AEO \cong \triangle CFO(ASA)$,

$\therefore AE = CF$, 又 $AD \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 是平行四边形,

$\because EF \perp AC$,

$\therefore$ 平行四边形 $AFCE$ 是菱形.

【小问 2 详解】

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AD = BC = x$, $AB = CD = \sqrt{3}$,

$\because$ 菱形 $AFCE$,

$\therefore AE = EC$, 设 $AE = t$, 则 $DE = x - t$,

在 $Rt\triangle DEC$ 中, $DE^2 + DC^2 = EC^2$,

$\therefore (x - t)^2 + 3 = t^2$, 得 $t = \frac{x^2 + 3}{2x}$, 即 $AE = \frac{x^2 + 3}{2x}$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle BAE = 90^\circ$, $AB \perp AE$,

$\therefore S_{\text{菱形}AFCE} = AE \cdot AB$, 即 $y = \frac{x^2 + 3}{2x} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}x^2 + 3\sqrt{3}}{2x}$,

$\because AE \leq AB$, 且 $x > 0$,

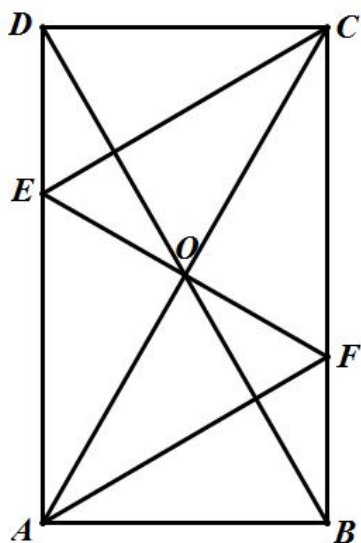
$\therefore \frac{x^2 + 3}{2x} \leq x$,

$\therefore x \geq \sqrt{3}$,

$\therefore y$ 关于 x 的函数关系式为: $y = \frac{\sqrt{3}x^2 + 3\sqrt{3}}{2x} (x \geq \sqrt{3})$.

【小问 3 详解】

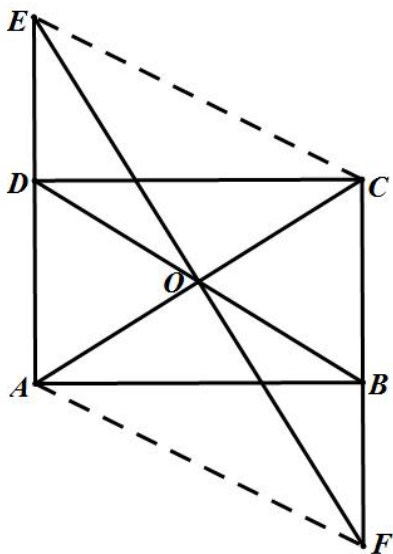
解：①如图所示，点 E 在 AD 上， $ED = EO$ ，则 $\text{Rt}\triangle CED \cong \text{Rt}\triangle CEO$ ，



$$\therefore CD = CO = AO = \sqrt{3},$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADC \text{ 中, } AD = \sqrt{AC^2 - DC^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = 3;$$

②如图所示，点 E 在线段 AD 的延长线上时， $DE = DO$ ，



$$\therefore DE = DO = OC, \quad EC = CE,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ECD \cong \text{Rt}\triangle CEO,$$

$$\therefore CD = EO,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle EAO, \quad \angle ADC = \angle AOE = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle AOE,$$

$$\therefore AE = AC,$$

$\therefore EO$ 垂直平分线段 AC ,

$\therefore EA = EC$,

$\therefore EA = EC = AC$,

$\therefore \triangle ACE$ 是等边三角形,

$\therefore CD$ 是 AE 的垂直平分线, $\angle ACD = \angle ECD = \frac{1}{2}\angle ACE = 30^\circ$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $AD = \frac{\sqrt{3}}{3}CD = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 1$;

综上所述, AD 的长为 3 或 1.

【点睛】 本题主要考查四边形的综合, 掌握矩形的性质, 等边三角形的判定和性质, 勾股定理, 图形结合分析是解题的关键.

免费增值服务介绍



- ✓ 学科网 (<https://www.zxxk.com/>) 致力于提供K12教育资源方服务。
- ✓ 网校通合作校还提供学科网高端社群出品的《老师请开讲》私享直播课等增值服务。



扫码关注学科网

每日领取免费资源

回复“ppt”免费领180套PPT模板

回复“天天领券”来抢免费下载券



- ✓ 组卷网 (<https://zujuan.xkw.com>) 是学科网旗下智能题库，拥有小初高全学科超千万精品试题，提供智能组卷、拍照选题、作业、考试测评等服务。



扫码关注组卷网

解锁更多功能