

交中初级中学 2022 学年第二学期八年级期末考试

数学试卷

(试卷满分 150 分 考试时间 100 分钟)

考生注意：在答题纸上规定位置作答，在试卷上答题一律无效.

一、选择题 (本题共 6 题，每题 4 分，满分 24 分)

1. 下列函数中，是一次函数的是 ()

A. $y = \frac{1}{x} + 1$

B. $x + 3y = 1$

C. $y = x^2 - 1$

D. $y = 2$

【答案】B

【解析】

【分析】根据一次函数的定义逐一进行判断即可.

【详解】解：A、 $y = \frac{1}{x} + 1$ ，自变量 x 的指数为 -1，

不符合一次函数的定义，故此选项不符合题意；

B、 $x + 3y = 1$ 可整理为 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ ，

符合一次函数的定义，故此选项符合题意；

C、 $y = x^2 - 1$ ，自变量 x 的指数是 2，

不符合一次函数的定义，故此选项不符合题意；

D、 $y = 2$ 是常数函数，不符合一次函数的定义，

故此选项不符合题意；

故选：B.

【点睛】本题主要考查一次函数的定义，解题的关键是掌握一次函数的定义条件：一次函数 $y = kx + b$ 的定义条件是： k 、 b 为常数， $k \neq 0$ ，自变量次数为 1.

2. 下列命题中正确的是 ()

A. 两条对角线相等且有一个角是直角的四边形是矩形

B. 两条对角线互相垂直且相等的四边形是正方形

C. 一组对角相等，一组对边平行的四边形是平行四边形

D. 一组对边平行且一组邻角相等的四边形是等腰梯形

【答案】C

【解析】

【分析】分别利用矩形、平行四边形、正方形、梯形的判定进行判断即可.

- 【详解】解：A、两条对角线相等且有一个角是直角的四边形不一定是矩形，故错误；
 B、两条对角线互相垂直且相等的四边形不一定是正方形，故错误；
 C、一组对角相等，一组对边平行的四边形是平行四边形，故正确；
 D、一组对边平行且一组邻角相等的四边形不一定是等腰梯形，故正确；

故选：C.

【点睛】本题考查矩形、平行四边形、正方形、梯形的判定，掌握判定方法是解决问题的关键.

3. 气象台预报“本市明天降水概率是 80%”，对此信息，下面的几种说法正确的是（ ）

- A. 本市明天将有 80%的地区降水
 B. 本市明天将有 80%的时间降水
 C. 明天肯定下雨
 D. 明天降水的可能性比较大

【答案】D

【解析】

【详解】由概率的意义可知，气象台预报“本市明天降水概率是 80%”，是指明天下雨的可能性比较大.
 故选 D

4. 用换元法解方程 $\frac{x+1}{x^2} + \frac{x^2}{x+1} = 2$ 时，若设 $\frac{x+1}{x^2} = y$ ，则原方程可化为关于 y 的方程是()

- A. $y^2 - 2y + 1 = 0$ B. $y^2 + 2y + 1 = 0$ C. $y^2 + y + 2 = 0$ D. $y^2 + y - 2 = 0$

【答案】A

【解析】

【分析】方程的两个分式具备倒数关系，设 $\frac{x+1}{x^2} = y$ ，则原方程化为 $y + \frac{1}{y} = 2$ ，再转化为整式方程 $y^2 - 2y + 1 = 0$ 即可求解.

【详解】把 $\frac{x+1}{x^2} = y$ 代入原方程得： $y + \frac{1}{y} = 2$ ，转化为整式方程为 $y^2 - 2y + 1 = 0$.

故选：A.

【点睛】考查了换元法解分式方程，换元法解分式方程时常用方法之一，它能够把一些分式方程化繁为简，化难为易，对此应注意总结能用换元法解的分式方程的特点，寻找解题技巧.

5. 已知 P 是线段 AB 的黄金分割点，且 $AP > BP$ ，则下列比例式能成立的是()

A. $\frac{AB}{AP} = \frac{BP}{AB}$

B. $\frac{BP}{AP} = \frac{AB}{BP}$

C. $\frac{AP}{AB} = \frac{BP}{AP}$

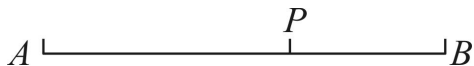
D. $\frac{AB}{AP} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据黄金分割的定义求解即可.

【详解】 解: 如图所示,



$\because P$ 是线段 AB 的黄金分割点, 且 $AP > BP$,

$$\therefore \frac{PB}{AP} = \frac{AP}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

A. $\frac{AB}{AP} \neq \frac{BP}{AB}$, 故该选项不正确, 不符合题意;

B. $\frac{BP}{AP} \neq \frac{AB}{BP}$, 故该选项不正确, 不符合题意;

C. $\frac{AP}{AB} = \frac{BP}{AP}$, 故该选项正确, 符合题意;

D. $\frac{AB}{AP} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, 故该选项不正确, 不符合题意;

故选: C.

【点睛】 本题考查了黄金分割的定义, 解决本题的关键是掌握黄金分割定义(把线段 AB 分成两条线段 AP 和 BP ($AP > BP$), 且使 AP 是 AB 和 BP 的比例中项, 叫做把线段 AB 黄金分割, 点 P 叫做线段 AB 的黄金分割点).

6. 已知梯形的四条边长分别是 4、5、7、8, 则中位线长可以为 ()

A. 4.5

B. 5.5

C. 6

D. 6.5

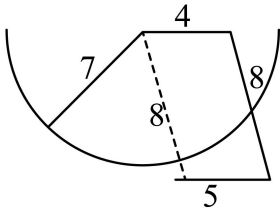
【答案】 C

【解析】

【分析】 把构成梯形的条件转换成构成三角形的条件, 通过从上底的一个顶点作一腰的平行线, 通过平行四边形的性质结合三角形三边的关系进行求解即可.

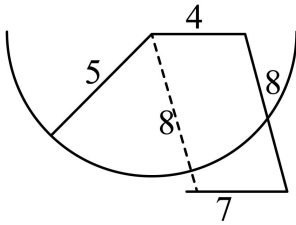
【详解】 解: $\because$ 梯形的四条边长分别是 4、5、7、8, 故梯形不是等腰梯形,
分情况:

第一种: 上底为 4, 下底为 5, 腰分别是 7 和 8, 如图,



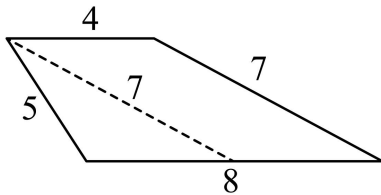
显然，1、7、8不能构成三角形，此情况不存在；

第二种：上底为4，下底为7，腰分别是5和8，如图，



显然，3、5、8不能构成三角形，此情况不存在；

第三种：上底为4，下底为8，腰分别是5和7，如图，

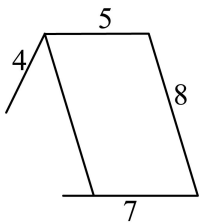


显然，4、5、7能构成三角形，

此时，中位线长为 $\frac{4+8}{2} = 6$ ；

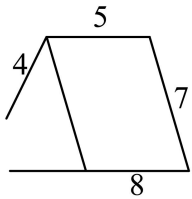
第四种：上底为5，下底为7，腰分别是4和8，如图，

显然，2、4、8不能构成三角形，此情况不存在；



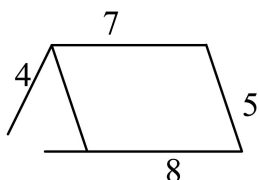
第五种：上底为5，下底为8，腰分别是7和4，如图，

显然，3、4、7不能构成三角形，此情况不存在；



第六种：上底为7，下底为8，腰分别是4和5，如图，

显然，1、4、5不能构成三角形，此情况不存在；



故选：C.

【点睛】此题考查梯形的中位线，三角形三边的关系，注意分情况讨论.

二、填空题（本题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分）

7. 已知一次函数 $y = kx + 1$ 的图像经过点 $A(2, 5)$ ，那么 $k =$ _____；

【答案】 2

【解析】

【分析】将点 $A(2, 5)$ ，代入 $y = kx + 1$ ，待定系数法求解析式即可求解.

【详解】解：∵一次函数 $y = kx + 1$ 的图像经过点 $A(2, 5)$ ，

$$\therefore 5 = 2k + 1,$$

解得： $k = 2$ ，

故答案为： 2 .

【点睛】本题考查了待定系数法求解析式，熟练掌握待定系数法求解析式是解题的关键.

8. 一次函数 $y = 3x + m - 1$ 的图象不经过第二象限，则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \leq 1$.

【解析】

【分析】根据一次函数的图象不经过第二象限列出关于 m 的不等式组，求出 m 的取值范围即可.

【详解】解：∵一次函数 $y = 3x + m - 1$ 的图象不经过第二象限，

$$\therefore m - 1 \leq 0,$$

解得 $m \leq 1$.

故答案是： $m \leq 1$.

【点睛】本题考查的是一次函数的图象与系数的关系，熟知一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 中，当 $k > 0$ ， $b < 0$ 时，函数的图象经过一、三、四象限是解答此题的关键.

9. $x = 2$ _____ $(x - 2)\sqrt{x - 3} = 0$ 的解（填“是”或“不是”）.

【答案】 不是

【解析】

【分析】方程的解代入方程则满足等式关系；方程的解要使等式中的每项有意义；

【详解】解：方程 $(x-2)\sqrt{x-3}=0$ ，

$$\therefore x-2=0 \text{ 或 } \sqrt{x-3}=0,$$

$$\therefore x_1=2, \quad x_2=3,$$

当 $x=2$ 时， $\sqrt{x-3}$ 无意义，舍去，

$\therefore x=3$ 是原方程的解.

故答案为：不是.

【点睛】此题考查方程解的性质，二次根式有意义的条件：被开方数不能为负；掌握二次根式的性质是解题关键.

10. 一枚材质均匀的骰子，六个面的点数分别是 1, 2, 3, 4, 5, 6，投这个骰子，掷的的点数大于 4 的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】先求出点数大于 4 的数，再根据概率公式求解即可.

【详解】 $\because$ 在这 6 种情况中，掷的点数大于 4 的有 2 种结果，

$$\therefore \text{掷的点数大于 4 的概率为 } \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

故答案为 $\frac{1}{3}$.

【点睛】本题考查的是概率公式，熟记随机事件 A 的概率 $P(A) = \frac{\text{事件 A 可能出现的结果数}}{\text{所有可能出现的结果数}}$ 是解答此题的关键.

11. 如果一个多边形的每一个内角都是 140° ，那么这个多边形是_____边形

【答案】 九

【解析】

【分析】先求出每一个外角的度数，再用 360° 除即可求出边数.

【详解】解： $\because$ 多边形的每一个内角都等于 140° ，

$$\therefore \text{多边形的每一个外角都等于 } 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ,$$

$$\therefore \text{边数 } n = 360^\circ \div 40^\circ = 9.$$

故答案是：九.

【点睛】本题主要考查了多边形的内角与外角的关系，求出每一个外角的度数是关键.

12. 已知平行四边形的面积是 144cm^2 ，相邻两边上的高分别为 8cm 和 9cm ，则这个平行四边形的周长为_____.

【答案】 68cm

【解析】

【分析】 根据平行四边形的面积以及相邻两边的高，计算出相邻两边的长是 18 和 16 ，再根据平行四边形的对边相等，即可求得其周长.

【详解】 解： $\because$ 平行四边形的面积 = 边长 $\times$ 高，

$\therefore$ 当边上的高为 8cm 时，边长 $= 144 \div 8 = 18$ ；

当边上的高为 9cm 时，边长 $= 144 \div 9 = 16$.

平行四边形的周长为 $2(18 + 16) = 68\text{cm}$.

故填空答案： 68cm .

【点睛】 平行四边形的面积等于平行四边形的边长与该边上的高的积，即 $S = a \cdot h$. 其中 a 可以是平行四边形的任何一边， h 必须是 a 边与其对边的距离，即对应的高.

13. 已知 O 是平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 的交点. $AC = 24$, $BD = 38$, $AD = 28$, 那么 $\triangle OBC$ 的周长等于_____.

【答案】 59

【解析】

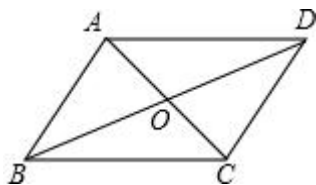
【分析】 由平行四边形的性质可求得 OB 、 OC ，则可求得答案.

【详解】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore BO = \frac{1}{2}BD = 19$, $CO = \frac{1}{2}AC = 12$, $BC = AD = 28$,

$\therefore BO + CO + BC = 19 + 12 + 28 = 59$ ，即 $\triangle OBC$ 的周长为 59 ，

故答案为： 59 .



【点睛】 本题主要考查平行四边形的性质，掌握平行四边形的对角线互相平分是解题的关键.

14. 顺次连接等腰梯形各边中点所得的四边形的两条对角线为 a 、 b ，则等腰梯形的面积为_____.

【答案】 ab

【解析】

【分析】 根据题意得到一条对角线是梯形的中位线，另一条是梯形的高，然后利用梯形的面积公式求解即

可.

【详解】根据题意可得,

一条对角线是梯形得中位线, 另一条是梯形的高,

$$\therefore \text{等腰梯形的面积} = \frac{1}{2} (\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高} = ab.$$

故答案为: ab .

【点睛】此题考查了梯形的中位线和梯形的面积, 解题的关键是熟练掌握以上知识点.

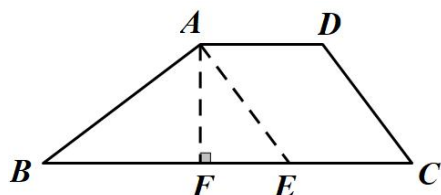
15. 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle B + \angle C = 90^\circ$, $AB = 4\text{cm}$, $CD = 3\text{cm}$, 则梯形高 = _____.

【答案】 $\frac{12}{5}\text{cm}$

【解析】

【分析】先画出这个梯形, 过点 A 作 $AE \parallel CD$ 交 BC 于点 E , 过点 A 作 $AF \perp BC$ 于点 F , 证明四边形 $AECD$ 是平行四边形, 从而得到 $AE = CD = 3\text{cm}$, 利用平行的性质和 $\angle B + \angle C = 90^\circ$ 推出 $\angle B + \angle AEB = 90^\circ$, $\angle BAE = 90^\circ$, 利用勾股定理求出 BE , 再用等面积法求出梯形的高 AF 即可.

【详解】画出这个梯形如下, 过点 A 作 $AE \parallel CD$ 交 BC 于点 E , 过点 A 作 $AF \perp BC$ 于点 F ,



$$\because AD \parallel BC, AE \parallel CD,$$

$$\therefore \text{四边形 } AECD \text{ 是平行四边形, } \angle AEB = \angle C$$

$$\therefore AE = CD = 3\text{cm},$$

$$\because \angle B + \angle C = 90^\circ, \angle AEB = \angle C$$

$$\therefore \angle B + \angle AEB = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BAE = 180^\circ - (\angle B + \angle AEB) = 90^\circ$$

$$\text{又} \because AB = 4\text{cm}, AE = 3\text{cm},$$

$$\therefore BE = \sqrt{AB^2 + AE^2} = 5\text{cm}$$

$$\because \angle BAE = 90^\circ, AF \perp BC$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot AE = \frac{1}{2} BE \cdot AF, \text{ 即 } \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = \frac{1}{2} \times 5 \times AF$$

$$\therefore AF = \frac{12}{5}\text{cm}, \text{ 即梯形高} = \frac{12}{5}\text{cm},$$

$$\text{故答案为: } \frac{12}{5}\text{cm}$$

【点睛】 本题考查梯形的性质，平行四边形的判定与性质，勾股定理等知识，正确作出辅助线和使用等面积法求高是解题的关键.

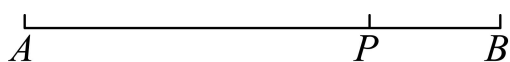
16. 已知 P 点为线段 AB 的黄金分割点， $AP = 4\text{cm}$ ，且 $AP > BP$ ，则 $AB =$ _____ cm

【答案】 $2\sqrt{5} + 2$

【解析】

【分析】 如图，点 P 是线段 AB 上的黄金分割点， $AP > BP$ ，则 $\frac{BP}{AP} = \frac{AP}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，再代入数据计算即可.

【详解】 解：如图，点 P 是线段 AB 上的黄金分割点，且 $AP = 4\text{cm}$ ， $AP > BP$ ，



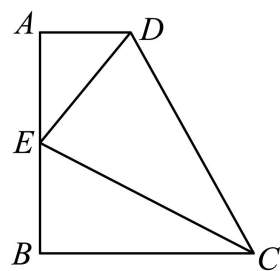
$$\therefore \frac{BP}{AP} = \frac{AP}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

解得 $AB = 2\sqrt{5} + 2$.

故答案为： $2\sqrt{5} + 2$.

【点睛】 本题考查的是线段的黄金分割点，掌握“线段的黄金分割点的定义”是解题的关键.

17. 如图，在直角梯形 $ABCD$ 中 $AD \parallel BC$ ， E 是腰 AB 的中点， $CE \perp DE$ ， $AD = 5$ ， $BC = 11$ ，则 $DC =$ _____

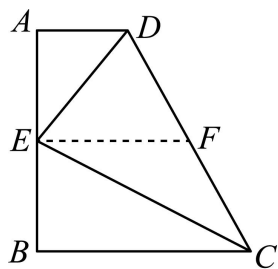


【答案】 16

【解析】

【分析】 取 CD 的中点 F ，连接 EF ，得出 EF 是梯形 $ABCD$ 的中位线，进而根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，即可求解.

【详解】 如图所示，取 CD 的中点 F ，连接 EF ，



则 EF 是梯形 $ABCD$ 的中位线,

$$\because AD=5, \quad BC=11,$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}(AD+BC) = 8,$$

又 $CE \perp DE$,

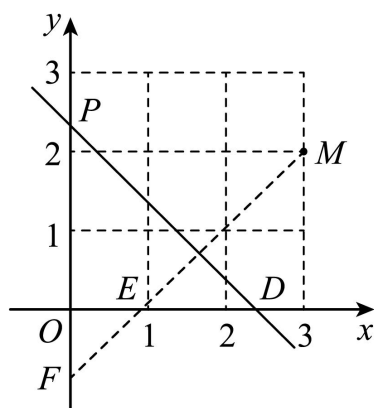
$$\therefore EF = \frac{1}{2}CD,$$

$$\therefore CD=16.$$

故答案为: 16.

【点睛】 本题考查了梯形的中位线, 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半, 熟练掌握以上知识是解题的关键.

18. 如图, 点 M 的坐标为 $(3,2)$, 点 P 从原点 O 出发, 以每秒1个单位的速度沿 y 轴向上移动, 同时过点 P 的直线 l 也随之上下平移, 且直线 l 与直线 $y=-x$ 平行, 如果点 M 关于直线 l 的对称点落在坐标轴上, 如果点 P 的移动时间为 t 秒, 那么 t 的值为_____



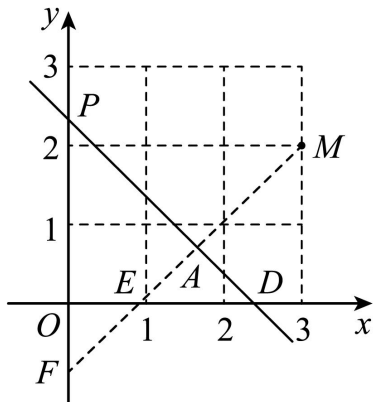
【答案】 2 或 3 或 3 或 2

【解析】

【分析】 过点 M 作 $MF \perp$ 直线 l , 交 y 轴于点 F , 交 x 轴于点 E , 与直线 l 相交于点 A , 则点 E 、 F 为点 M 在坐标轴上的对称点, 过点 M 作 $MD \perp x$ 轴于点 D , 设直线 l 的解析式为 $y=-x+b$, 由直线 l 与直线 $y=-x$ 平行可得 $\angle OPA=45^\circ$, 即可证明 $\triangle MDE$ 与 $\triangle OEF$ 均为等腰直角三角形, 进而可求出点 E 、 F 的

坐标，根据中点坐标公式可求出 MF 和 ME 的中点坐标，代入 $y = -x + b$ 可求出 b 值，即可得点 P 坐标，即可求解。

【详解】如图，过点 M 作 $MF \perp$ 直线 l ，交 y 轴于点 F ，交 x 轴于点 E ，与直线 l 相交于点 A ，则点 E 、 F 为点 M 在坐标轴上的对称点。



$\because$ 直线 l 与直线 $y = -x$ 平行，

$\therefore$ 设直线 l 解析式为 $y = -x + b$ ，

过点 M 作 $MD \perp x$ 轴于点 D ，则 $OD = 3$ ， $MD = 2$ ，

$\because$ 直线 l 的解析式为 $y = -x + b$ ，

$\therefore \angle OPD = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle OFE = \angle OEF = 45^\circ$ ，

$\therefore \triangle MDE$ 与 $\triangle OEF$ 均为等腰直角三角形，

$\therefore DE = MD = 2$ ， $OE = OF = 1$ ，

$\therefore E(1, 0)$ ， $F(0, -1)$ 。

$\because M(3, 2)$ ， $F(0, -1)$ ，

$\therefore$ 线段 MF 中点坐标为 $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ 。

$\because$ 直线 $y = -x + b$ 过点 $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ ，

$\therefore \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} + b$ ，

解得： $b = 2$ ，

$\therefore$ 点 P 坐标为 $(0, 2)$ ，

$\therefore t = 2$ 。

$\because M(3, 2)$ ， $E(1, 0)$ ，

$\therefore$ 线段 ME 中点坐标为 $(2, 1)$.

直线 $y = -x + b$ 过点 $(2, 1)$,

$$\therefore 1 = -2 + b,$$

解得: $b = 3$,

$\therefore$ 点 P 坐标为 $(0, 3)$,

$$\therefore t = 3.$$

$\therefore$ 点 M 关于 l 的对称点, 当 $t = 2$ 时, 落在 y 轴上, 当 $t = 3$ 时, 落在 x 轴上.

故答案为: 2 或 3.

【点睛】 本题考查了一次函数的图象与几何变换. 注意在 x 轴、 y 轴上均有点 M 的对称点, 不要漏解; 其次注意点 E 、 F 坐标以及线段中点坐标的求法.

三、解答题 (共 7 题, 第 19~22 题各 10 分, 第 23 题 12 分, 第 24 题 12 分, 第 25 题 14 分)

19. 解方程: $\sqrt{x+1} - 1 = x$.

【答案】 $x_1 = 0, x_2 = -1$

【解析】

【分析】 先对方程进行移项变为: $\sqrt{x+1} = x+1$, 两边平方变为: $x+1 = (x+1)^2$, 之后化简, 解方程即可, 注意最后求得的解需符合根式有意义.

【详解】 解: $\because \sqrt{x+1} - 1 = x$,

$$\therefore \sqrt{x+1} = x+1,$$

$$\therefore x+1 = (x+1)^2,$$

$$\therefore (x+1)^2 - (x+1) = 0, (x+1)(x+1-1) = 0,$$

$$\therefore x(x+1) = 0,$$

解得: $x_1 = 0, x_2 = -1$.

又 $\because x+1 \geq 0$,

$$\therefore x \geq -1,$$

$$\therefore x_1 = 0, x_2 = -1.$$

【点睛】 本题主要考查的是一元二次方程的解法, 同时也考查了根式有意义, 利用合适的方法进行解方程

是解题的关键.

20. 解方程组:
$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x + 2y - 12 = 0 \end{cases}.$$

【答案】
$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 4 \end{cases}; \begin{cases} x_2 = 6 \\ y_2 = 3 \end{cases}$$

【解析】

【分析】先利用因式分解, 由①得到 $x - y = 0$, $x - 2y = 0$, 再与②组成两个二元一次方程组, 解这两个二元一次方程组, 即可求得原方程组的解.

【详解】
$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \text{ ①} \\ x + 2y - 12 = 0 \text{ ②} \end{cases}$$

由①得, $x - y = 0$, $x - 2y = 0$,

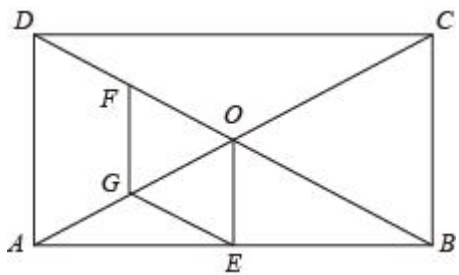
把这两个方程与②组成方程组得,
$$\begin{cases} x + 2y = 12 \\ x - y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x + 2y = 12 \\ x - 2y = 0 \end{cases},$$

解得:
$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 4 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 6 \\ y_2 = 3 \end{cases},$$

故方程组的解为:
$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 4 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 6 \\ y_2 = 3 \end{cases}.$$

【点睛】本题考查了解二元二次方程组, 解此题的关键是能把高次方程组转化成二元一次方程组.

21. 如图, 已知矩形 $ABCD$ 的对角线交于点 O , 点 E 、 F 和 G 分别平分线段 AB 、 OD 和 OA .



(1) 求证: 四边形 $OFGE$ 是平行四边形.

(2) 猜想: 当 $\angle ABD = \underline{\quad\quad}$ ° 时四边形 $OFGE$ 是菱形, 并证明.

【答案】(1) 见解析 (2) 30, 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 通过“点 E 、 F 和 G 分别平分线段 AB 、 OD 和 OA ”得到 OE 、 FG 分别为 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ADO$ 的中位线, 再由中位线的性质可以证明 $OE \parallel FG$ 且 $OE = FG$, 即可证明四边形 $OFGE$ 是平行四边形.

(2) 根据“邻边相等的平行四边形是菱形”得到 $OF = FG$ 时四边形 $OFGE$ 是菱形，从而得到 $\triangle OAD$ 为等边三角形，推出 $\angle ABD = 30^\circ$ 。

【小问 1 详解】

证明： $\because$ 矩形 $ABCD$ 的对角线交于点 O ,

$$\therefore OD = OB = OA,$$

又 $\because$ 点 E 、 F 和 G 分别平分线段 AB 、 OD 和 OA ,

$\therefore OE$ 为 $\triangle ABD$ 的中位线, FG 为 $\triangle AOD$ 的中位线,

$$\therefore OE = \frac{1}{2}AD, \quad OE \parallel AD, \quad FG \parallel AD, \quad FG = \frac{1}{2}AD,$$

$$\therefore OE \parallel FG, \quad OE = FG,$$

$\therefore$ 四边形 $OFGE$ 是平行四边形.

【小问 2 详解】

解：由 (1) 知，四边形 $OFGE$ 是平行四边形

当四边形 $OFGE$ 是菱形时，则 $OF = FG$

$$\therefore OD = AD,$$

$\therefore \triangle AOD$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle ADB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = 30^\circ,$$

$\therefore$ 当 $\angle ABD = 30^\circ$ 时，四边形 $OFGE$ 是菱形.

故答案为：30

【点睛】 本题考查了三角形的中位线、矩形的性质、平行四边形的判定、菱形的判定与性质，掌握矩形的性质、平行四边形的判定、菱形的性质与判定是解题关键.

22. 某文具厂加工一种学习用具 2500 套，在加工了 1000 套后，采用了新技术，使每天比原来多加工 25 套，结果提前了 3 天完成任务. 求该文具厂原来每天加工多少套这样的学习用具.

【答案】 该文具厂原来每天加工 100 套这样的学习用具

【解析】

【分析】 设该文具厂采用新技术前平均每天加工 x 套学习工具，根据等量关系：采用了新技术前生产 1000 套学生画图工具所用的时间 - 采用了新技术后生产 1500 套学生画图工具所用的时间 = 3，列出方程求解即可.

【详解】解：设该文具厂采用新技术前平均每天加工 x 套学习工具，则采用了新技术后平均每天加工 $(x + 25)$ 套学习工具，根据题意得：

$$\frac{2500-1000}{x} + \frac{2500-1000}{x+25} = 3,$$

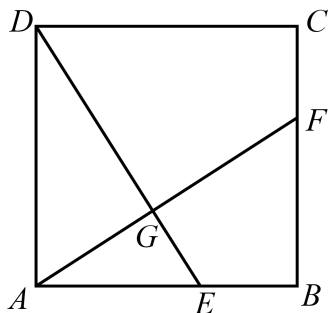
解这个方程，得 $x=100$ ，

经检验， $x=100$ 是原方程的根.

答：该文具厂采用新技术前平均每天加工 100 套学习工具.

【点睛】本题主要考查了分式方程的应用，正确找出等量关系是解决问题的关键.

23. 如图，正方形 $ABCD$ 边长为 4，点 E 在边 AB 上一点（点 E 与点 A 、 B 不重合），过点 A 作 $AF \perp DE$ ，垂足为 G ， AF 与边 BC 相交于点 F .



(1) 求证： $AF = DE$ ；

(2) 连接 DF 、 EF ，如果 $\triangle DEF$ 的面积为 $\frac{13}{2}$ ，求 AE 的长.

【答案】(1) 详见解析

(2) $AE=3$ 或 1，详见解析

【解析】

【分析】(1) 先证得 $\angle AED = \angle AFB$ ，很容易证明 $\triangle ABF$ 与 $\triangle DAE$ 全等，由此得出 $AF = DE$ ，进而可得结论；

(2) 根据三角形的面积求得 AE ，再根据勾股定理求得 DE ，根据 (1) 中 $AF = DE$ 即可得出结论；

【小问 1 详解】

$$\because AF \perp DE, \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AED = \angle AFB,$$

在 $\triangle ABF$ 与 $\triangle DAE$ 中，

$$\begin{cases} \angle AED = \angle AFB \\ \angle DAE = \angle B \\ AD = AB \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle DAE (\text{AAS}),$$

$$\therefore AF = DE,$$

【小问 2 详解】

$$\because \triangle ABF \cong \triangle DAE,$$

$$\therefore \text{设 } AE = BF = x,$$

$$\therefore BE = CF = 4 - x,$$

$$\therefore \triangle DEF \text{ 的面积} = S_{\text{正方形}} - S_{\triangle ADE} - S_{\triangle EBF} - S_{\triangle DCF}$$

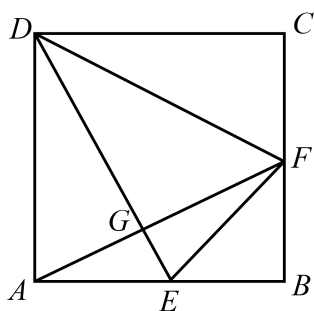
$$= 4 \times 4 - \frac{1}{2} \times 4 \times x - \frac{1}{2} (4 - x) \times x - \frac{1}{2} \times 4 (4 - x)$$

$$= 8 - 2x + \frac{1}{2}x^2,$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 8 = \frac{13}{2},$$

$$\text{解得, } x_1 = 3, \quad x_2 = 1,$$

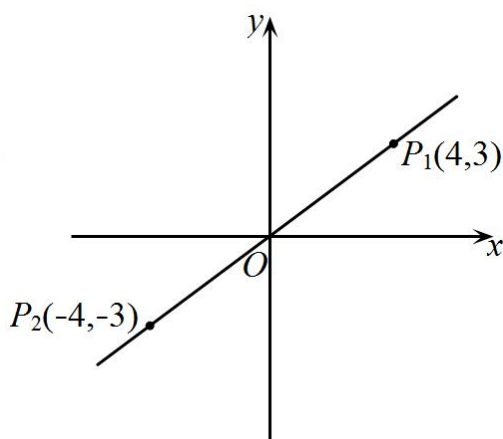
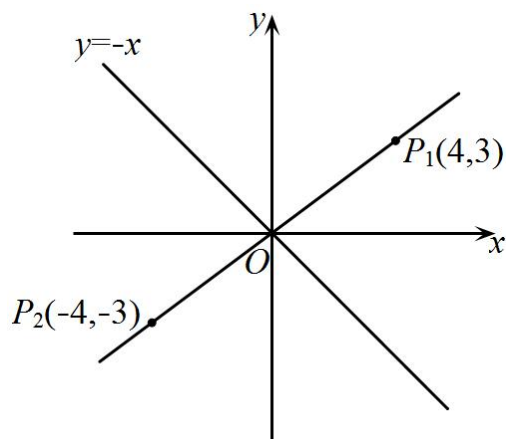
$$\therefore AE = 3 \text{ 或 } AE = 1,$$



【点睛】 本题考查正方形的性质、全等三角形的判定和性质的应用，本题的

关键是知道两线段之间的垂直关系.

24. 如图，在直线 $y = \frac{3}{4}x$ 上有两点， $P_1(4, 3)$ 、 $P_2(-4, -3)$



(1) 在直线 $y = -x$ 上找两点 M_1 、 M_2 (只需写出一组坐标) 与 P_1 、 P_2 构成平行四边形

(2) 在直线 $y = -x$ 上找两点 Q_1 、 Q_2 ，使四边形 $P_1Q_1P_2Q_2$ 是以 P_1P_2 为一条对角线的矩形.

(3) 在直角坐标系平面内找两点 R_1, R_2 (直接写出坐标), 使四边形 $P_1R_1P_2R_2$ 是以 P_1P_2 为一条对角线的正方形.

【答案】 (1) $(2, -2); (-2, 2)$. 答案不唯一, 只要满足 $(a, -a)$ 或 $(-a, a) (a \neq 0)$ 即可, 且无序.

(2) $\left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}, \frac{5}{2}\sqrt{2}\right); \left(\frac{5}{2}\sqrt{2}, -\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$.

(3) $(-3, 4); (3, -4)$

【解析】

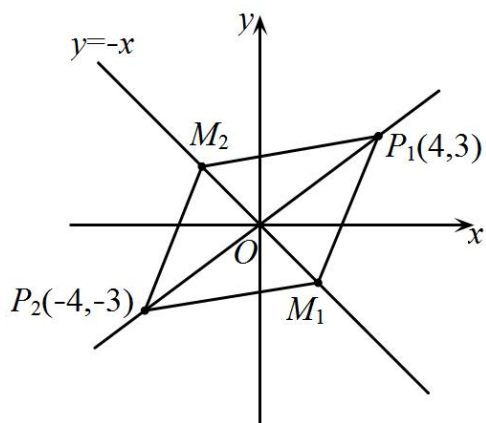
【分析】 (1) 根据平行四边形对角线互相平分可知点 M_1 与点 M_2 关于原点 O 对称, 结合 M_1, M_2 都在直线 $y = -x$ 上进行求解即可;

(2) 根据矩形对角线相等且平分可知 $OQ_1 = OP_1$, 由此利用勾股定理求解即可;

(3) 如图, 设 R_1 的坐标为 $(-a, b) (a > 0, b > 0)$, 自 R_1 作 y 轴的垂线, 垂足为 F , 自 P_1 作 x 轴的垂线, 垂足为 E . 证明 $\triangle OEP_1 \cong \triangle OFR_1$, 求出 $a = 3, b = 4$. 则 R_1 的坐标为 $(-3, 4)$. 因 R_2 与 R_1 关于原点 O 成中心对称, 则 R_2 的坐标为 $(3, -4)$.

【小问 1 详解】

若四边形 $P_1M_1P_2M_2$ 为平行四边形, 则对角线互相垂直平分, 因此点 M_1 与点 M_2 关于原点 O 对称, 因函数 $y = -x$ 上的点的横纵坐标符号相反, 若取点 M_1 的坐标为 $(2, -2)$, 则点 M_2 的坐标为 $(-2, 2)$.



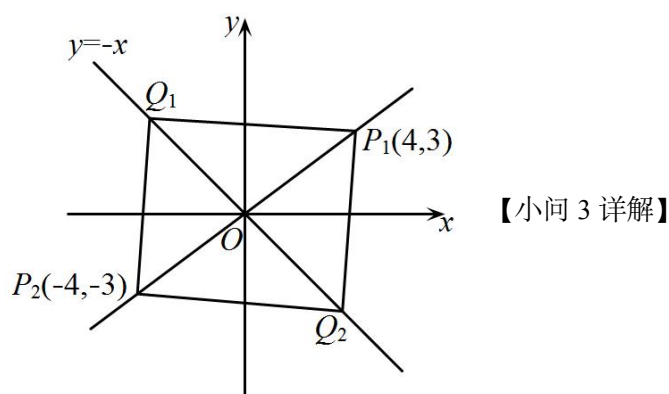
【小问 2 详解】

若四边形 $P_1Q_1P_2Q_2$ 是以 P_1P_2 为一条对角线的矩形, 因矩形的对角线相等且互相平分, 则 $OQ_1 = OP_1$. 设 Q_1 的坐标为 $(-a, a) (a > 0)$, 由勾股定理得,

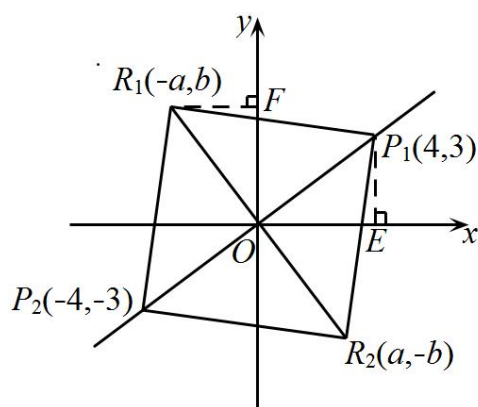
$$OQ_1 = \sqrt{a^2 + (-a)^2} = \sqrt{2}a, OP_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

$$\therefore \sqrt{2}a = 5. \text{ 即: } a = \frac{5}{2}\sqrt{2}.$$

所以 Q_1 的坐标是 $\left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}, \frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$, Q_2 的坐标是 $\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}, -\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$.



如图, 设 R_1 的坐标为 $(-a, b)$ ($a > 0, b > 0$), 自 R_1 作 y 轴的垂线, 垂足为 F , 自 P_1 作 x 轴的垂线, 垂足为 E .



因正方形的对角线相等且互相垂直平分,

$$\therefore OP_1 = OR_1, \angle EOP_1 = \angle R_1OF = 90^\circ - \angle FOP_1,$$

$$\therefore \angle OEP_1 = \angle OFR_1 = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle OEP_1 \cong \triangle OFR_1,$$

$$\therefore R_1F = P_1E = 3, OF = OE = 4.$$

$$\text{即: } a = 3, b = 4.$$

R_1 的坐标为 $(-3, 4)$.

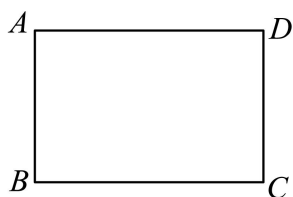
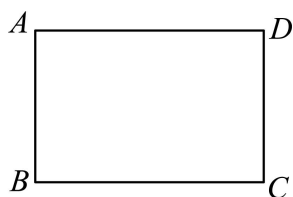
因 R_2 与 R_1 关于原点 O 成中心对称,

$$\therefore R_2 \text{ 的坐标为 } (3, -4).$$

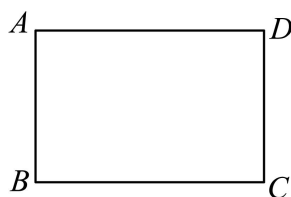
【点睛】 本题考查了一次函数、特殊四边形（平行四边形、矩形、正方形）的性质，解题的关键是理解坐

标的含义和善于利用勾股定理、全等三角形等知识来解题.

25. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2$, $AD = 3$, 点 P 在边 AD 上, 连接 BP , 点 A 关于直线 BP 为对称点为 A_1 ,



(备用图)



(备用图)

- (1) 点 A_1 落在 BC 边上, 求 AP 的长
- (2) 点 A_1 落在线段 PC 上, 求 AP 的长;
- (3) 点 A_1 到直线 CD 的距离等于 A_1B 的长, 求 AP 的长.

【答案】 (1) 2 (2) $3 - \sqrt{5}$

(3) $4 - 2\sqrt{3}$

【解析】

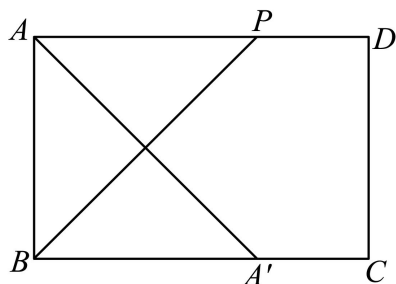
【分析】 (1) 依据轴对称的性质及矩形的性质即可求得 AP 的长.

(2) 由勾股定理先求得 $A'C$ 的长, 再在 $\triangle CDP$ 中利用勾股定理列出方程, 求解 x 即可 (见图).

(3) 过 A' 作 BC 的垂线, 构造多个矩形与直角三角形, 然后将所求的量与已知的量集中在同一个直角三角形 $A'MP$ 即可求解. (见图)

【小问 1 详解】

点 A_1 落在 BC 边上, 如下图所示.



$\because$ 点 A 与点 A' 关于 BP 对称,

$\therefore \angle ABP = \angle A'BP$.

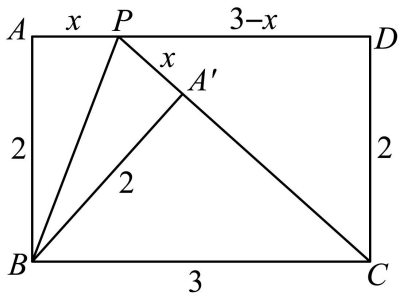
由 $AD \parallel BC$ 得, $\angle A'BP = \angle APB$,

$\therefore \angle ABP = \angle APB$.

$\therefore AP = AB = 2$.

【小问 2 详解】

点 A_1 落在线段 PC 上，如下图.



根据矩形的对边相等可得: $AD = BC = 3$, $CD = AB = 2$.

设 $AP = x$. 则 $DP = AD - AP = 3 - x$.

$\because$ 点 A 与点 A' 关于 BP 对称,

$\angle BA'P = \angle BAP = 90^\circ$, 则 $\angle BA'C = 90^\circ$.

在直角 $\triangle BA'C$ 中, $A'C = \sqrt{BC^2 - A'B^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$.

在直角 $\triangle PCD$ 中, 由勾股定理得:

$$PC^2 = PD^2 + CD^2, \text{ 即 } (PA' + A'C)^2 = PD^2 + CD^2$$

$$\therefore (x + \sqrt{5})^2 = (3 - x)^2 + 2^2,$$

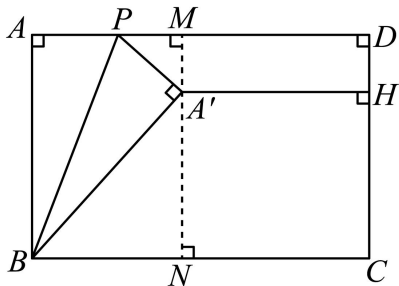
解得: $x = 3 - \sqrt{5}$.

【小问 3 详解】

点 A_1 到直线 CD 的距离等于 A_1B 的长, 自点 A' 作 $A'H \perp CD$, 垂足为 H , 则依题意知, $A'H = A'B$. 自

点 A' 作 BC 的垂线交 AD 于点 M 、交 BC 于点 N , 垂足为点 N . 则因 $AD \parallel BC$,

$\therefore MN \perp BC$, 垂足为点 N .



$\because$ 点 A 与点 A' 关于 BP 对称,

$\therefore AB = A'B = A'H = 2$, 并设 $AP = A'P = x$.

又四边形 $A'HDM$ 、四边形 $A'NCH$ 、四边形 $CDMN$ 均有三个角为直角, 故均是矩形.

$\therefore MD = A'H = NC = 2$, $DH = MA'$, $A'N = HC$, $MN = CD$.

在直角 $\triangle A'BN$ 中, $BN = BC - NC = BC - A'H = BC - AB = 3 - 2 = 1$,

$$\therefore A'N = \sqrt{A'B^2 - BN^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$$

$$\text{则 } A'M = MN - A'N = AB - A'N = 2 - \sqrt{3}.$$

$$PM = AD - AP - MD = 3 - x - 2 = 1 - x.$$

在直角 $\triangle A'MP$ 中, $A'M = 2 - \sqrt{3}$, $PM = 1 - x$, $A'P = x$,

$$\text{由勾股定理得: } x^2 = (2 - \sqrt{3})^2 + (1 - x)^2.$$

$$\text{解得: } x = 4 - 2\sqrt{3}.$$

【点睛】 本题考查了轴对称的性质应用、矩形的性质应用、勾股定理的应用等知识点, 解题的关键将已知条件与待求结果集中在同一个直角三角形内即可求解.