

静安区 2023 学年第二学期期末教学质量调研

八年级数学试卷

2024.06

(完成时间: 100 分钟, 满分: 120 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 26 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
2. 除第一、二大题外, 其余各题无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 满分 18 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确项的代号并填涂在答题纸的相应位置上】

1. 下列事件中, 是必然事件的是 ()

- | | |
|----------------------|---------------------------------|
| A. 购买一张彩票, 中奖 | B. 射击运动员射击一次, 命中靶心 |
| C. 经过有交通信号灯的路口, 遇到红灯 | D. 任意画一个凸多边形, 其外角和是 360° |

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了必然事件, 事先能肯定它一定会发生的事件称为必然事件. 先能肯定它一定会发生的事件称为必然事件, 事先能肯定它一定不会发生的事件称为不可能事件, 必然事件和不可能事件都是确定的.

- 【详解】解: A. 购买一张彩票中奖, 属于随机事件, 不合题意;
- B. 射击运动员射击一次, 命中靶心, 属于随机事件, 不合题意;
- C. 经过有交通信号灯的路口, 遇到红灯, 属于随机事件, 不合题意;
- D. 任意画一个凸多边形, 其外角和是 360° , 属于必然事件, 符合题意.

故选: D.

2. 一次函数 $y = 2x - 1$ 的图象不经过 ()

- | | | | |
|---------|---------|---------|---------|
| A. 第一象限 | B. 第二象限 | C. 第三象限 | D. 第四象限 |
|---------|---------|---------|---------|

【答案】B

【解析】

【分析】先判断 k 、 b 的符号, 再判断直线经过的象限, 进而可得答案.

【详解】解： $\because k=2>0, b=-1<0$,

$\therefore$ 一次函数 $y=2x-1$ 的图象经过第一、三、四象限，不经过第二象限；

故选：B.

【点睛】 本题考查了一次函数的系数与其图象的关系，属于基础题型，熟练掌握一次函数的图象与其系数的关系是解题的关键.

3. 下列方程有实数根的是 ()

A. $x^2+2x-1=0$

B. $x^4+2=0$

C. $\sqrt{x^2-2}=-1$

D. $\frac{x}{x-1}=\frac{1}{x-1}$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题考查了一元二次方程根的判别式的应用，乘方的意义，算术平方根的意义，分式方程有意义的条件，熟练掌握各知识点是解答本题的关键. 根据一元二次方程根的判别式、偶次方的意义、算术平方根的意义、以及分式方程的解逐项分析即可.

【详解】解： A、 $x^2+2x-1=0$,

$$\therefore \Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8 > 0,$$

$\therefore$ 一元二次方程 $x^2+2x-1=0$ 有两边不相等的实数根，故 A 符合题意；

B、 $\because x^4+2=0$,

$$\therefore x^4 = -2,$$

$$\because x^4 \geq 0,$$

$\therefore x^4+2=0$ 无实数根，故 B 不符合题意；

C、 $\because \sqrt{x^2-2} \geq 0, -1 < 0$,

$\therefore$ 方程 $\sqrt{x^2-2}=-1$ 无实数根，故 C 不符合题意；

D、 $\frac{x}{x-1}=\frac{1}{x-1}$,

去分母得： $x=1$,

检验：把 $x=1$ 代入 $x-1$ 得： $1-1=0$,

$\therefore x=1$ 是原方程的增根，

$\therefore$ 原方程无解，故 D 不符合题意.

故选：A.

4. 下列说法中, 正确的是 ()

- A. 平行向量的方向相同
B. 方向相反的向量是相反向量
C. 平行向量的方向相反
D. 方向相反的向量是平行向量

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查向量的相关知识点, 向量是一个抽象的概念, 我们要仔细揣摩向量的含义及规律, 认真读懂题干所给的条件, 好好运用所给的已知条件, 即可求得答案. 根据平行向量可能同向或反向进行解答即可.

【详解】解: 平行向量的方向相同或相反, 方向相反的向量是平行向量, 方向相同的向量是平行向量; 相反向量的方向相反且长度相同, 因此方向相反的向量不一定是相反向量, 故 D 正确.

故选: D.

5. 已知四边形 $ABCD$ 中, $\angle A = \angle B = \angle C = 90^\circ$, 如果只添加一个条件, 即可判定该四边形是正方形, 那么所添加的这个条件可以是 ()

- A. $AB = CD$ B. $AC = BD$ C. $AB = AD$ D. AC 与 BD 互相平分

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查正方形的判定. 正方形的判定方法有: ①先判定四边形是矩形, 再判定这个矩形有一组邻边相等; ②先判定四边形是菱形, 再判定这个菱形有一个角为直角; ③先判定四边形是平行四边形, 再用①或②进行判定. 由已知可得该四边形为矩形, 再添加条件: 一组邻边相等, 即可判定为正方形.

【详解】解: $\because \angle A = \angle B = \angle C = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,

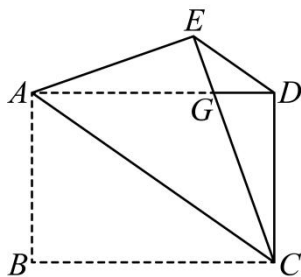
因此再添加条件: 一组邻边相等或对角线互相垂直, 即可判定四边形 $ABCD$ 为正方形,

$\therefore$ 当 $AB = AD$ 或 $AC \perp BD$ 时, 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$\therefore$ 四个选项中只有 C 选项符合题意.

故选: C.

6. 把一张矩形纸片 $ABCD$ 沿对角线 AC 折叠, 点 B 的对应点为点 E , 边 EC 交边 AD 于点 G , 连接 ED (如图所示), 当 $BC = \sqrt{2}AB$ 时, 下列结论中, 不正确的是 ()



- A. $\triangle AEG \cong \triangle CDG$ B. $ED \parallel AC$ C. $AG = 3GD$ D. $S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle AEG}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查矩形性质及翻折问题，全等三角形的判定与性质，勾股定理，解题的关键是根据折叠得到 $\triangle AEG \cong \triangle CDG$ ．先由折叠的性质及矩形的性质可得 $\triangle AEG \cong \triangle CDG$ (AAS)，从而判断出选项 A；由全等的性质可得 $AG = CG, EG = DG$ ，由等腰三角形的性质可得 $\angle GAC = \angle GCA, \angle GED = \angle GDE$ ，再由平行线的判定即可判断选项 B；设 $AB = CD = t, GD = x$ ，则 $AD = \sqrt{2}t, AG = CG = \sqrt{2}t - x$ ，Rt $\triangle CDG$ 中， $CD^2 + DG^2 = CG^2$ ，列出方程求解，即可判断出选项 C；由折叠性质可得 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AEC}$ ，再由 $AG = 3GD$ ，可得 $CG = 3GE$ ，再判断选项 D．

【详解】解：∵ 矩形纸片 $ABCD$ 沿对角线 AC 折叠，点 B 的对应点为 E ，
 $\therefore AB = CD = AE, \angle B = \angle AEC = \angle CDG = 90^\circ$ ，

在 $\triangle AEG$ 和 $\triangle CDG$ 中，

$$\begin{cases} \angle AEG = \angle CDG \\ \angle AGE = \angle CGD, \\ AE = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEG \cong \triangle CDG \text{ (AAS)},$$

故 A 正确，不符合题意；

$$\therefore \triangle AEG \cong \triangle CDG \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AG = CG, EG = DG,$$

$$\therefore \angle GAC = \angle GCA, \angle GED = \angle GDE,$$

$$\therefore \angle AGC = \angle EGD,$$

$$\therefore \angle GAC = \angle GCA = \angle GED = \angle GDE,$$

$$\therefore ED \parallel AC,$$

故 B 正确，不符合题意；

设 $AB = CD = t, GD = x$ ，则 $AD = \sqrt{2}t, AG = CG = \sqrt{2}t - x$ ，

$\because$ Rt $\triangle CDG$ 中， $CD^2 + DG^2 = CG^2$ ，

$$\therefore t^2 + x^2 = (\sqrt{2}t - x)^2,$$

$$\text{解得： } x = \frac{\sqrt{2}}{4}t,$$

$$\therefore GD = \frac{\sqrt{2}}{4}t,$$

$$\therefore AG = \sqrt{2}t - \frac{\sqrt{2}}{4}t = \frac{3\sqrt{2}}{4}t,$$

$$\therefore AG = 3GD,$$

故 C 正确，不符合题意；

$\because$ 矩形纸片 $ABCD$ 沿对角线 AC 折叠，点 B 的对应点为 E ，

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AEC},$$

$$\because AG = 3GD,$$

$$\therefore CG = 3GE,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 4S_{\triangle AEG}$$

故 D 不正确，符合题意，

故选：D

二、填空题：（本大题共 12 题，满分 36 分）【请将结果直接填入答题纸的相应位置上】

7. 函数 $y = \sqrt{x-1}$ 中，自变量 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq 1$

【解析】

【分析】 本题考查了二次根式有意义的条件，可得 $x-1 \geq 0$ ，解不等式即可，熟知根号下需要大于等于 0，是解题的关键.

【详解】 解：根据二次根式的意义，有 $x-1 \geq 0$ ，

解得 $x \geq 1$ ，

故自变量 x 的取值范围是 $x \geq 1$ ，

故答案为： $x \geq 1$.

8. 直线 $y = x - 1$ 的截距是_____.

【答案】 -1 或 1

【解析】

【分析】根据“直线 $y = x - 1$ 的截距就是该直线与 y 轴交点的纵坐标和该直线与 x 轴交点的横坐标的值”即可解答.

【详解】令 $x = 0$ 代入 $y = x - 1$ 得: $y = -1$,

即直线 $y = x - 1$ 在 y 轴上的截距是 -1.

令 $y = 0$ 代入 $y = x - 1$ 得: $x = 1$,

即直线 $y = x - 1$ 在 x 轴上的截距是 1.

故答案为: -1 或 1.

【点睛】本题主要考查了截距的定义, 即为与 y 轴交点的纵坐标的值和与 x 轴交点的横坐标的值, 比较简单, 需要熟练掌握.

9. 方程 $x^3 - 8 = 0$ 的根是_____.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】首先整理方程得出 $x^3 = 8$, 进而利用立方根的性质求出 x 的值.

【详解】解: $x^3 - 8 = 0$,

$$x^3 = 8,$$

解得: $x = 2$.

故答案为: $x = 2$.

【点睛】此题主要考查了立方根的性质, 正确由立方根定义求出是解题关键.

10. 如果关于 x 的方程 $ax = 3$ 有实数解, 那么常数 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a \neq 0$

【解析】

【分析】本题考查了一元一次方程的定义, 熟练掌握该知识点是解题的关键. 根据一元一次方程的定义解题即可.

【详解】解: 当 $a \neq 0$ 时, $x = \frac{3}{a}$

故答案为: $a \neq 0$.

11. 已知方程 $\frac{x^2 + 4}{x} - \frac{4x}{x^2 + 4} = 2$, 如果设 $\frac{x^2 + 4}{x} = y$, 那么原方程变形为关于 y 的整式方程是_____.

【答案】 $y^2 - 2y - 4 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查了用换元法解分式方程，能正确换元是解此题的关键. 设 $\frac{x^2+4}{x} = y$ ，则 $\frac{x}{x^2+4} = \frac{1}{y}$ ，原方程可变为 $y - \frac{4}{y} = 2$ ，再去分母化成整式方程即可.

【详解】 解： 设 $\frac{x^2+4}{x} = y$ ，则 $\frac{x}{x^2+4} = \frac{1}{y}$ ，原方程可变为 $y - \frac{4}{y} = 2$ ，

即 $y^2 - 2y - 4 = 0$ ，

故答案为： $y^2 - 2y - 4 = 0$.

12. 化简： $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\vec{0}$

【解析】

【分析】 本题考查了向量的线性运算，根据向量的运算法则计算即可.

【详解】 解： $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

故答案为： $\vec{0}$.

13. 一个多边形的每一个外角都等于 36° ，那么这个多边形的内角和是 $\underline{\hspace{2cm}}$ $^\circ$.

【答案】 1440

【解析】

【分析】 本题主要考查多边形的内角与外角，求解多边形的边数是解题的关键.
由多边形外角的性质可求解多边形的边数，再利用多边形的内角和定理可求解.

【详解】 解： $360^\circ \div 36^\circ = 10$ ，
 $(10 - 2) \times 180^\circ = 1440^\circ$.

即这个多边形的内角和是 1440° ，

故答案为 1440.

14. 从 1, 2, 3 这三个数字中任意抽取两个，其和是偶数的概率是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

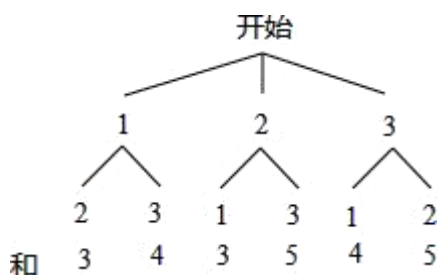
【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 首先根据题意画出树状图，然后由树状图求得所有等可能的结果与其和是偶数的情况，再利用概

率公式即可求得答案.

【详解】解：画树状图得：



$\therefore$ 共有 6 种等可能的结果，其和是偶数的 2 种情况，

$\therefore$ 其和是偶数的概率是： $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

故答案为 $\frac{1}{3}$.

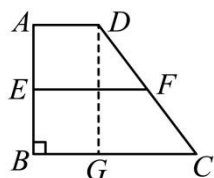
15. 梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$, $\angle B = 90^\circ$, $AB = 4$, $AD = 2$, $CD = 5$ ，这个梯形的中位线的长度为_____.

【答案】 $\frac{7}{2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了勾股定理，矩形的判定和性质，梯形中位线的性质，解题的关键是作出辅助线，过点 D 作 $DG \perp BC$ 于点 G ，证明四边形 $ABGD$ 为矩形，得出 $BG = AD = 2$ ， $DG = AB = 4$ ，根据勾股定理求出 $CG = \sqrt{CD^2 - DG^2} = 3$ ，根据中位线性质的求出 $EF = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(2 + 5) = \frac{7}{2}$.

【详解】解：过点 D 作 $DG \perp BC$ 于点 G ，如图所示：



则 $\angle DGB = 90^\circ$,

$\therefore AD \parallel BC$, $\angle B = 90^\circ$,

$\therefore \angle A = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$,

$\therefore \angle A = \angle B = \angle BGD = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ABGD$ 为矩形,

$\therefore BG = AD = 2$, $DG = AB = 4$,

$\therefore CG = \sqrt{CD^2 - DG^2} = 3$,

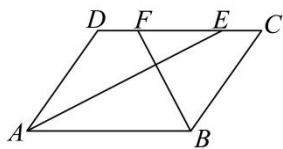
$\therefore BC = 2 + 3 = 5$,

$\therefore EF$ 为梯形的中位线,

$$\therefore EF = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(2 + 5) = \frac{7}{2}.$$

故答案为: $\frac{7}{2}$.

16. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, AE 平分 $\angle DAB$, 交边 DC 于点 E , BF 平分 $\angle ABC$, 交边 DC 于点 F , 如果 $BC = 3, EF = 2$, 那么 $DC =$ _____.



【答案】4

【解析】

【分析】本题考查平行四边形的性质, 等腰三角形的判定. 根据平行线的性质和角平分线的定义证明 $AD = DE$, $BC = CF$, 再根据 $EF = 2$, 求出 $CE = 1$, 最后求出结果即可.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$$\therefore AD = BC = 3, \quad AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle AED = \angle BAE, \quad \angle BFC = \angle ABF,$$

$$\because AE \text{ 平分 } \angle DAB, \quad BF \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle BAE, \quad \angle CBF = \angle ABF,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle BAE, \quad \angle BFC = \angle CBF,$$

$$\therefore AD = DE = 3, \quad CF = BC = 3,$$

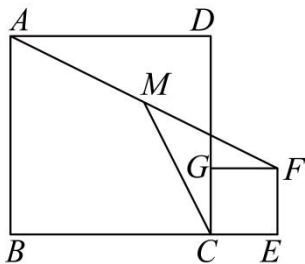
$$\because EF = 2,$$

$$\therefore CE = CF - EF = 1,$$

$$\therefore CD = DE + CE = 3 + 1 = 4,$$

故答案为: 4.

17. 如图, 正方形 $ABCD$ 和正方形 $CEFG$ 中, B 、 C 、 E 三点共线, 点 G 在 CD 上, $BC = 3$, $CE = 1$, M 是 AF 的中点, 那么 CM 的长是_____.

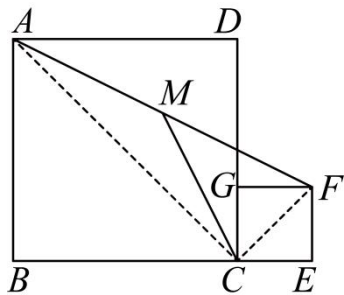


【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 本题考查了正方形的性质，勾股定理，二次根式的化简，直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，熟练掌握以上知识点并能作出辅助线是解题的关键. 连接 AC 和 CF ，先证明 $\triangle ACF$ 是直角三角形，利用勾股定理分别求出 AC ， CF 和 AF 的长度，最后利用直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，推导出 $CM = \frac{1}{2}AF$ ，求得答案.

【详解】 连接 AC 和 CF ，如图所示：



$\because$ 四边形 $ABCD$ 和 $CEFG$ 是正方形， $BC = 3$ ， $CE = 1$

$\therefore \angle ACD = \angle ACB = \angle GCF = \angle FCE = 45^\circ$ ， $AB = BC = 3$ ， $CE = EF = 1$ ， $\angle ABC = \angle FEC = 90^\circ$

$\therefore \angle ACF = \angle ACD + \angle GCF = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ ， $AC = \sqrt{AB^2 + CB^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$

$CF = \sqrt{CE^2 + EF^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\therefore AF = \sqrt{AC^2 + CF^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{5}$

$\because \angle ACF = 90^\circ$ ， M 是 AF 的中点

$\therefore CM = \frac{1}{2}AF = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$

故答案为： $\sqrt{5}$.

18. 如果一个函数图像上存在横、纵坐标相等的点，那么称这个点为这个函数图像的“等值点”，比如：点 $(-1, -1)$ 是函数 $y = 2x + 1$ 图像上的“等值点”. 已知点 $A(1, 0)$ ，点 B 是函数 $y = -x + 2$ 图像上的“等值点”，点 C 是函数 $y = 2x - 10$ 图像上的“等值点”，如果四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，那么点 D 的坐标是_____.

【答案】 $(10, -9)$ 或 $(11, 10)$

【解析】

【分析】 本题在新定义下考查了两个函数图像交点，根据等值点定义得等值点在直线 $y = x$ 图象上，联立方

程组 $\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x \end{cases}$ ， $\begin{cases} y = 2x - 10 \\ y = x \end{cases}$ ，求解方程组可求出点 B ， C 的坐标，再根据等腰梯形的定义可得点 D 的

坐标.

【详解】解：根据等值点定义得等值点在直线 $y = x$ 图象上，

$$\therefore \text{联立方程组} \begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x \end{cases},$$

$$\text{解得, } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases},$$

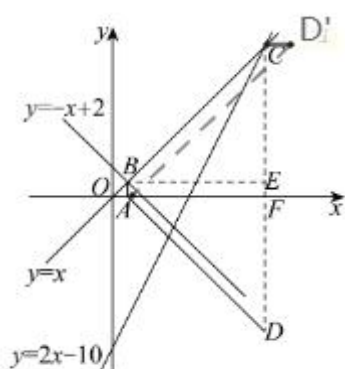
$$\therefore B(1,1),$$

$$\text{联立} \begin{cases} y = 2x - 10 \\ y = x \end{cases},$$

$$\text{解得, } \begin{cases} x = 10 \\ y = 10 \end{cases},$$

$$\therefore C(10,10);$$

如图,



$$\therefore E(10,1), F(10,0),$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形,

$$\therefore FD = CE = 9, \quad CD' = AB$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 的坐标为 } (10, -9), \text{ 或 } (11, 10)$$

故答案为: $(10, -9)$ 或 $(11, 10)$.

三、解答题: (本大题共 8 题, 满分 66 分) 【如无特别说明, 本大题作答在答题纸上, 须写出证明或计算的主要步骤】

19. 解方程: $3 - \sqrt{2x - 3} = x$

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】先移项，两边平方，然后整理求得 x 的值，最后进行检验即可.

【详解】解：原方程化为： $3-x=\sqrt{2x-3}$

两边平方，得 $(3-x)^2=2x-3$,

整理，得 $x^2-8x+12=0$,

解得 $x_1=2, x_2=6$,

经检验： $x_1=2$ 是原方程的根， $x_2=6$ 是原方程的增根，

$\therefore$ 原方程的根为 $x=2$.

【点睛】本题主要考查解一元二次方程，二次根式的性质，解此题的关键在于熟练掌握其知识点.

20. 解方程组：
$$\begin{cases} x+y=6, \\ x^2-3xy+2y^2=0. \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x_1=4, \\ y_1=2; \end{cases} \begin{cases} x_2=3, \\ y_2=3. \end{cases}$$

【解析】

【分析】先对 $x^2-3xy+2y^2=0$ 分解因式转化为两个一元一次方程，然后联立①，组成两个二元一次方程组，解之即可.

【详解】将方程 $x^2-3xy+2y^2=0$ 的左边因式分解，得 $x-2y=0$ 或 $x-y=0$.

原方程组可以化为
$$\begin{cases} x+y=6, \\ x-2y=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+y=6, \\ x-y=0. \end{cases}$$

解这两个方程组得
$$\begin{cases} x_1=4, \\ y_1=2; \end{cases} \begin{cases} x_2=3, \\ y_2=3. \end{cases}$$

所以原方程组的解是
$$\begin{cases} x_1=4, \\ y_1=2; \end{cases} \begin{cases} x_2=3, \\ y_2=3. \end{cases}$$

【点睛】本题考查了高次方程组，将高次方程化为一次方程是解题的关键.

21. 已知一次函数 $y=\frac{2}{3}x+6$ ，完成下列问题：

(1) 求在这个函数图象上且位于 x 轴上方的所有点的横坐标的取值范围；

(2) 求经过点 $(-2, -4)$ ，且平行于直线 $y=\frac{2}{3}x+6$ 的一次函数的解析式.

【答案】 (1) $x > -9$;

(2) 该一次函数的解析式为 $y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$;

【解析】

【分析】此题主要考查了两条直线平行问题，关键是掌握若两条直线是平行的关系，那么他们的自变量系数相同，即 k 值相同.

(1) 根据题意得到 $\frac{2}{3}x + 6 > 0$ ，解得即可；

(2) 设一次函数的表达式为 $y = \frac{2}{3}x + b$ ，再由图象过点 $(-2, -4)$ ，可求出 b ，从而可求表达式.

【小问 1 详解】

解：∵ 所求的点在这个一次函数的图象上且位于 x 轴上方，

$$\therefore \frac{2}{3}x + 6 > 0,$$

解得 $x > -9$ ，

即所有点的横坐标的取值范围是 $x > -9$ ；

【小问 2 详解】

解：∵ 一次函数的图象与直线 $y = \frac{2}{3}x + 6$ 平行，

$$\therefore k = \frac{2}{3},$$

∴ 一次函数解析式为 $y = \frac{2}{3}x + b$ ，

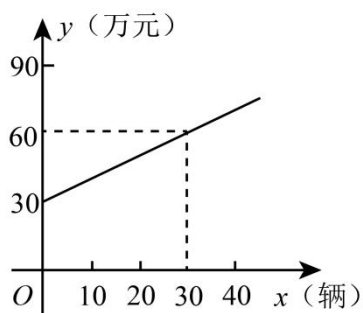
∵ 图象经过点 $(-2, -4)$ ，

$$\therefore \frac{2}{3} \times (-2) + b = -4,$$

解得： $b = -\frac{8}{3}$ ，

∴ 该一次函数的解析式为 $y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$ ；

22. 某汽车销售店根据过去几个月的销售记录，得到了每月的销售成本 y （万元）与销售车辆 x （辆）之间的关系如图所示.



(1) 求 y 关于 x 的函数解析式；（不写定义域）

(2) 如果该店每月的销售收入 w (万元) 与销售车辆 x (辆) 之间恰好成正比例关系, 且当月销售 10 辆汽车时, 销售收入与销售成本相等.

①求 w 关于 x 的函数解析式; (不写定义域)

②如果汽车销售店想要每月的净利润不少于 13 万元, 那么该店每月应至少销售多少辆车? (净利润=销售收入-销售成本)

【答案】 (1) $y = x + 30$

(2) ① $w = 4x$; ②每月应至少销售 15 辆车.

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数解析式和正比例函数的应用. 首先要学会根据用代入系数法求出解析式; 再结合正比例函数解决问题.

(1) 用待定系数法求 y 关于 x 的函数解析式;

(2) ①用待定系数法求 w 关于 x 的函数解析式; ②由每月的净利润不少于 13 万元, 可得出 $w - y \geq 13$, 再转化为关于 x 的不等式求解即可.

【小问 1 详解】

由图可知: y 与 x 成一次函数关系,

设 $y = kx + b (k \neq 0)$,

$\because x = 30$ 时, $y = 60$, $x = 0$ 时, $y = 30$,

$$\therefore \begin{cases} 30k + b = 60 \\ b = 30 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = 1 \\ b = 30 \end{cases},$$

$\therefore y = x + 30$;

【小问 2 详解】

①设每月的销售收入 w (万元) 与销售车辆 x (辆) 之间函数关系式为 $w = mx$,

当月销售 10 辆汽车时, 销售收入与销售成本相等, 此时销售成本为 $y = 10 + 30 = 40$ (万元).

$\therefore 40 = 10m$, 解得: $m = 4$,

$\therefore w$ 关于 x 的函数解析式为: $w = 4x$;

②由题意得: $4x - (x + 30) \geq 13$,

解得： $x \geq \frac{43}{3}$ ，

$\because x$ 为整数，

$\therefore x$ 的最小值为 15，

$\therefore$ 每月应至少销售 15 辆车.

23. 某工厂接到制作 2000 件物理实验模型的加工订单，为了尽快完成任务，工厂对原加工计划进行了调整，经测算，如果平均每天比原计划多加工 20 件，那么能提早 5 天完成任务.

- (1) 求工厂原计划每天加工物理实验模型的件数；
- (2) 在生产模型的过程中，检验员会在一段时间内先后对多个批次的模型合格情况进行抽查，目的是估计产品的报废率，及时调整生产数量与进度，满足客户需求.

下表是检验员对该物理实验模型产品抽查过程中的数据统计：

抽取模型数累计 m (件)	50	100	150	200	250	300	400
报废模型数累计 n (件)	0	3	4	5	5	6	8
模型报废的频率 $\frac{n}{m}$ (精确到 0.001)	0	0.03	0.027	0.025	0.02	0.02	0.02

请估计这批物理实验模型成品的报废率约为_____ (精确到 0.01)；结合你的估计帮助工厂计算，至少还需生产_____件产品才能完成订单的需求.

【答案】 (1) 工厂原计划每天加工物理实验模型的件数为 80 件

(2) 0.02；41

【解析】

【分析】 本题主要考查了分式方程的应用，一元一次不等式的应用，用频率估计概率，解题的关键是理解题意，根据等量关系列出方程.

(1) 设工厂原计划每天加工物理实验模型的件数为 x 件，根据平均每天比原计划多加工 20 件，那么能提早 5 天完成任务，列出方程，解方程即可；

(2) 根据频率估计概率即可，设还需生产 y 件产品才能完成订单的需求，根据题意列出不等式，求出至少还要生产的件数即可.

【小问 1 详解】

解：设工厂原计划每天加工物理实验模型的件数为 x 件，根据题意得：

$$\frac{2000}{x} - \frac{2000}{x + 20} = 5,$$

解得： $x_1 = 80$ ， $x_2 = -100$ ，

经检验 $x = 80$ 是原方程的解,

答: 工厂原计划每天加工物理实验模型的件数为 80 件;

【小问 2 详解】

解: 根据表格中的数据可知: 模型报废的频率稳定在 0.02,

$\therefore$ 这批物理实验模型成品的报废率约为 0.02,

设还需生产 y 件产品才能完成订单的需求, 根据题意得:

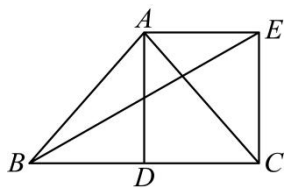
$$(1 - 0.02)y \geq 2000 \times 0.02,$$

解得: $y \geq \frac{2000}{49},$

$\therefore y$ 必须取整数,

$\therefore$ 至少还需生产 41 件产品才能完成订单的需求.

24. 如图, 在等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, AD 为 BC 边上的中线, 过点 A 作 $AE \parallel BC$, 且 $AE = \frac{1}{2}BC$, 连接 EC .



(1) 求证: 四边形 $ADCE$ 是矩形;

(2) 连接 BE , 如果 $\angle CBE = 30^\circ$, $EC = \sqrt{3}$, 求点 A 到直线 BE 的距离.

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{3}{4}$

【解析】

【分析】(1) 根据“有一个角是直角的平行四边形是矩形”即可求证;

(2) 过点 A 作 $AF \perp BE$ 于点 F , 根据含 30° 度角的直角三角形的性质求出 $BE = 2CE = 2\sqrt{3}$, 根据勾股定理求出 $BC = \sqrt{BE^2 - CE^2} = 3$, 根据三角形面积公式得出 $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}AE \cdot CE = \frac{1}{2}BE \cdot AF$, 求出 AF 的值, 即可得出答案.

【小问 1 详解】

证明: $\because AB = AC$, AD 为 BC 的中线,

$$\therefore AD \perp BC, \quad BD = CD = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ$$

$$\therefore AE = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore AE = CD,$$

$$\therefore AE \parallel BC,$$

$$\therefore AE \parallel CD,$$

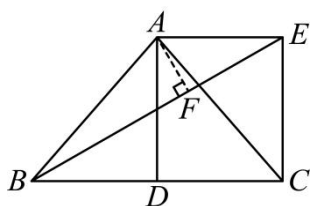
$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是平行四边形,

$$\because \angle ADC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 是矩形.

【小问 2 详解】

解: 过点 A 作 $AF \perp BE$ 于点 F , 如图所示:



$\therefore$ 四边形 $ADCE$ 为矩形,

$$\therefore \angle BCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBE = 30^\circ,$$

$$\therefore BE = 2CE = 2\sqrt{3},$$

根据勾股定理得: $BC = \sqrt{BE^2 - CE^2} = 3,$

$$\therefore AE = \frac{1}{2}BC = \frac{3}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}AE \cdot CE = \frac{1}{2}BE \cdot AF,$$

$$\therefore AF = \frac{AE \cdot CE}{BE} = \frac{\frac{3}{2} \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore A \text{ 到 } BE \text{ 的距离为 } \frac{3}{4}.$$

【点睛】 本题考查了矩形的判定定理、勾股定理的应用, 直角三角形的性质, 等腰三角形的性质, 三角形面积的计算. 掌握相关结论进行几何推导是解题关键.

25. 问题: 已知矩形的长和宽分别为 12 和 2, 是否存在一个新矩形, 使其周长和面积都为原矩形的一半?

在学习函数的知识后, 小丽发现可利用函数知识, 借助图像, 成功解决这一问题. 过程如下:

第一步: 建立函数模型

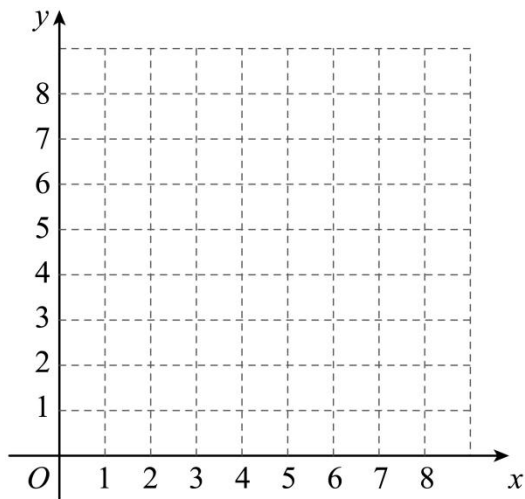
设新矩形的长和宽分别为 x 和 y ,

(1) 假如只考虑新矩形周长为原矩形周长的一半, 不考虑面积, 那么 y 关于 x 的函数解析式是_____①, 它的定义域是_____;

(2) 假如只考虑新矩形面积为原矩形面积的一半, 不考虑周长, 那么 y 关于 x 的函数解析式是_____②, 它的定义域是_____;

第二步: 画出函数图像

(3) 在所给的直角坐标平面内画出符合题意的函数①和函数②的大致图像.



第三步: 同时考虑新矩形的面积和周长都为原矩形的一半, 观察图像, 解决问题

(4) 这两个函数图像在第一象限内有_____个公共点; 请解释公共点的意义.

(5) 如果存在这样的新矩形, 直接写出新矩形的长和宽; 如果不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $y = 7 - x$; $0 < x < 7$

(2) $y = \frac{12}{x}$; $x > 0$

(3) 图象见解析; 当新矩形的长为 4, 宽为 3 或矩形的长为 3, 宽为 4 时, 新矩形的周长是原来的一半, 面积是原来的一半

(4) 两; 见解析 (5) 存在; 新矩形的长为 4, 宽为 3 或矩形的长为 3, 宽为 4

【解析】

【分析】 (1) 根据矩形的周长公式写出函数解析式, 然后写出定义域即可;

(2) 根据矩形的面积公式写出函数解析式, 然后写出定义域即可;

(3) 根据反比例函数图象和一次函数图象的画法画出函数图象, 得出结果即可;

(4) 根据图象得出答案即可;

(5) 根据函数图象得出答案即可.

【小问 1 详解】

解：先长方形的周长为： $2 \times (2+12) = 28$ ，

只考虑新矩形周长为原矩形周长的一半，不考虑面积，那么 y 关于 x 的函数解析式是： $y = 7 - x$ ，定义域为 $0 < x < 7$ ；

【小问 2 详解】

解：新长方形的面积为： $\frac{1}{2} \times 2 \times 12 = 12$

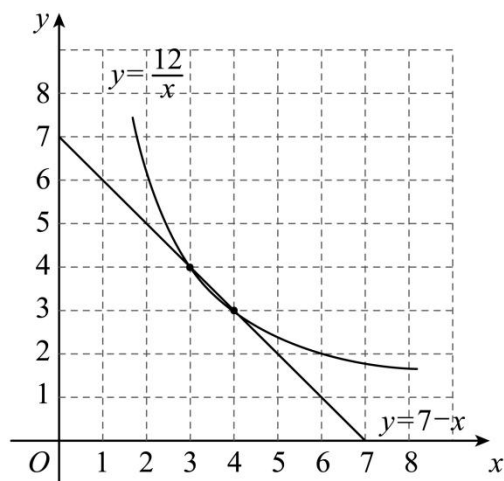
只考虑新矩形面积为原矩形面积的一半，不考虑周长，那么 y 关于 x 的函数解析式是 $y = \frac{12}{x}$ ，它的定义域是 $x > 0$ ；

【小问 3 详解】

解：列表：

x	...	2	3	4	6	...
$y = 7 - x$	...	5	4	3	1	...
$y = \frac{12}{x}$	...	6	4	3	2	...

描点，连线，如图所示：



观察图象可知：当新矩形的长为 4，宽为 3 或矩形的长为 3，宽为 4 时，新矩形的周长是原来的一半，面积是原来的一半。

【小问 4 详解】

解：这两个函数图象在第一象限内有两个公共点，这两个公共点的横纵坐标正好是既符合矩形的周长为原来的一半，又符合矩形的面积是原来一半时，矩形的长和宽；

【小问 5 详解】

解：存在；新矩形的长为 4，宽为 3 或矩形的长为 3，宽为 4。

【点睛】本题主要考查了求一次函数解析，反比例函数解析，画一次函数和反比例函数图象，一次函数和反比例函数的交点问题，解题的关键是数形结合.

26. 在等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 2\sqrt{5}$, $BC = 4$, 直线 l 垂直平分 AB , 交 AB 于点 O , 点 D 、 E 在直线 l 上, 且点 D 与点 E 关于点 O 对称, 连接 AD 、 DB 、 BE 、 EA .

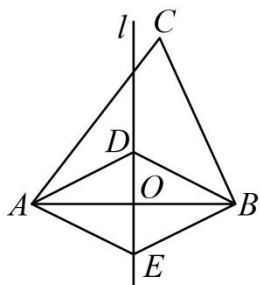


图 1

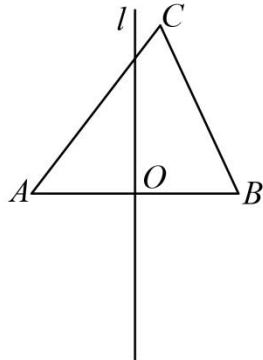
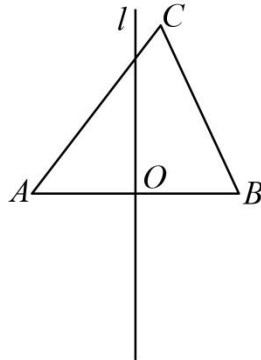


图 2



备用图

- (1) 如图 1, 求证: 四边形 $ADBE$ 是菱形;
- (2) 如图 1, 当 AD 平分 $\angle BAC$ 时, 求菱形 $ADBE$ 的周长;
- (3) 当四边形 $ADBE$ 为正方形时, 请在图 2 中画出符合题意的正方形 $ADBE$, 再连接 CD , 求 CD 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) 10

(3) $CD = \sqrt{2}$ 或 $\sqrt{34}$

【解析】

【分析】本题考查了正方形的性质, 菱形的性质与判定, 勾股定理;

(1) 根据垂直平分线的性质可得 $DA = DB, EA = EB$, 根据轴对称的性质可得 $OD = OE$ 进而得出 $AD = AE$, 即可得证;

(2) 延长 AD 交 BC 于点 M , 当 AD 平分 $\angle BAC$ 时, $AM \perp BC$, 进而勾股定理求得 AM , 设 $AD = x$, 则 $BD = x$, $DM = 4 - x$, 在 $\text{Rt}\triangle DMB$ 中, 勾股定理求得 $AD = \frac{5}{2}$, 进而根据菱形的性质, 即可求解;

(3) 过点 C 分别作 l 和 AB 的垂线, 垂足分别为 G, F , 过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M , 则四边形 $GOFC$ 是矩形, 根据等面积法求得 CF , 进而求得 DG , 勾股定理求得 FB , 进而求得 OF , 即 CG 的长, $\text{Rt}\triangle CDG$ 中, 勾股定理, 即可求解; 当 D 在 AB 的下方时, 同理可求.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 直线 l 垂直平分 AB , 点 D 、 E 在直线 l 上,

$\therefore DA = DB, EA = EB$,

$\because$ 点 D 与点 E 关于点 O 对称,

$$\therefore OD = OE,$$

又 $AB \perp DE$ ，即 AB 垂直平分 DE ，

$$\therefore AD = AE,$$

$$\therefore DA = DB = EA = EB,$$

$\therefore$ 四边形 $ADBE$ 是菱形；

【小问 2 详解】

解：如图所示，延长 AD 交 BC 于点 M ，

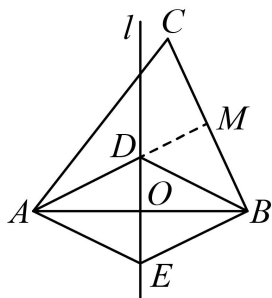


图 1

$$\because AB = AC = 2\sqrt{5}, BC = 4,$$

当 AD 平分 $\angle BAC$ 时，

$$\therefore AM \perp BC, \quad CM = MB = \frac{1}{2}BC = 2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABM \text{ 中, } AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{20 - 4} = 4,$$

$$\text{设 } AD = x, \text{ 则 } BD = x, \quad DM = 4 - x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle DMB \text{ 中, } DB^2 = DM^2 + MB^2,$$

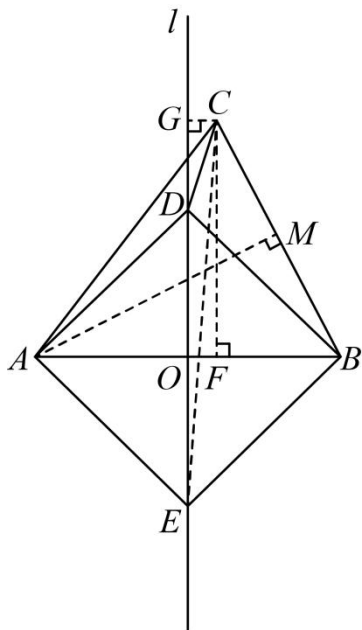
$$\therefore (4 - x)^2 + 2^2 = x^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{5}{2}, \text{ 即 } AD = \frac{5}{2},$$

$$\therefore \text{菱形 } ADBE \text{ 的周长为 } \frac{5}{2} \times 4 = 10,$$

【小问 3 详解】

解：如图所示，过点 C 分别作 l 和 AB 的垂线，垂足分别为 G, F ，过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M ，



又 $\because DE \perp AB$,

$\therefore$ 四边形 $GOFC$ 是矩形,

$\therefore GO = CF$, $CG = OF$,

$\because$ 四边形 $ADBE$ 为正方形

$\therefore DE = AB = 2\sqrt{5}$,

由 (2) 可得 $AM = 4$,

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \times AM = \frac{1}{2}AB \times CF,$$

$$\therefore CF = \frac{BC \times AM}{AB} = \frac{4 \times 4}{2\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5},$$

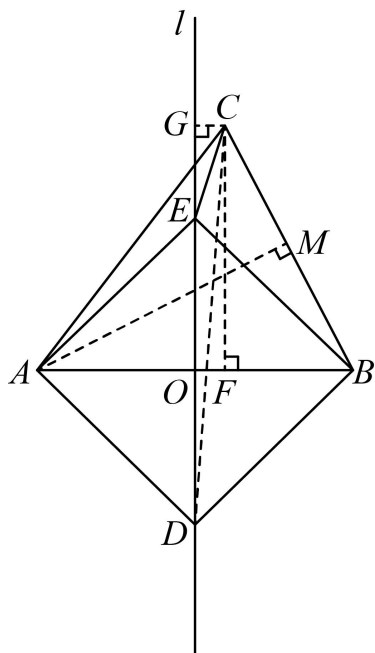
$$\therefore DG = OG - OD = \frac{8}{5}\sqrt{5} - \sqrt{5} = \frac{3}{5}\sqrt{5},$$

$$\text{在 Rt}\triangle CFB \text{ 中, } FB = \sqrt{CB^2 - CF^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{8\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore CG = OF = OB - FB = \sqrt{5} - \frac{4}{5}\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{在 Rt}\triangle CDG \text{ 中, } CD = \sqrt{CG^2 + DG^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \sqrt{2},$$

如图所示, 当 D 在 AB 的下方时,



同理可得: $GD = DE + GE = 2\sqrt{5} + \frac{3}{5}\sqrt{5} = \frac{13}{5}\sqrt{5}$,

$$CG = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

在 $\text{Rt}\triangle CGD$ 中, $CD = \sqrt{CG^2 + DG^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(\frac{13\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \sqrt{34}$,

综上所述, $CD = \sqrt{2}$ 或 $\sqrt{34}$.