

2023-2024 学年八年级第三次月考模拟卷

数 学

(考试时间: 90 分钟 试卷满分: 100 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答第 I 卷时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。
3. 回答第 II 卷时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
4. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷

一、选择题 (本大题共 6 个小题, 每小题 2 分, 共 12 分。在每个小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 请选出并在答题卡上将该项涂黑)

1. 在平面直角坐标系中, 将正比例函数 $y = -\frac{1}{2}x$ 的图象向左平移 4 个单位长度得到一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图象, 则该一次函数的解析式为 ()

A. $y = -\frac{1}{2}x + 4$ B. $y = -\frac{1}{2}x - 4$ C. $y = -\frac{1}{2}x - 2$ D. $y = -\frac{1}{2}x + 2$

【答案】C

【分析】本题考查了一次函数的图象与几何变换, 根据“上加下减, 左加右减”的规律进行解答即可, 熟知函数图象平移的规律是解题的关键。

【详解】解: $\because$ 正比例函数 $y = -\frac{1}{2}x$ 的图象向左平移 4 个单位长度,

$\therefore$ 根据“上加下减, 左加右减”规律可得一次函数是 $y = -\frac{1}{2}(x + 4) = -\frac{1}{2}x - 2$,

故选: C.

2. 下列方程或方程组中, 有实数解的是 ()

A. $x^2 + y = -1$;

B. $\frac{x}{x^2 - 4} = -\frac{2}{x^2 - 4}$;

C. $\sqrt{x-1} + \sqrt{1-x} = 2$;

D. $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ 3x + y = -6 \end{cases}$.

【答案】A

【分析】本题考了解分式方程、二次根式有意义的条件、一元二次方程根的判别式, 根据解分式方程、二次根式有意义的条件、一元二次方程根的判别式逐项判断即可得出答案。

【详解】解：A、当 $x=1$ ， $y=-2$ 时， $x^2+y=1^2+(-2)=-1$ ，故 $x^2+y=-1$ 有实数解，符合题意；

B、两边同时乘 x^2-4 得： $x=-2$ ，当 $x=-2$ 时， $x^2-4=0$ ，故 $\frac{x}{x^2-4}=-\frac{2}{x^2-4}$ 没有实数解，不符合题意；

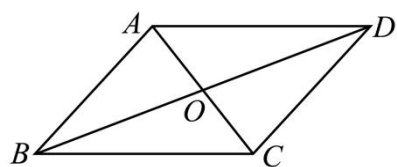
C、由二次根式有意义的条件可得： $x-1 \geq 0$ ， $1-x \geq 0$ ，解得 $x=1$ ，此时左边 $\neq$ 右边，故 $\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}=2$ 没有实数解，不符合题意；

D、由 $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 \\ 3x+y=-6 \end{cases}$ 得： $3x+\frac{1}{2}x^2=-6$ ，整理得： $x^2+6x+12=0$ ， $\Delta=6^2-4 \times 1 \times 12=-12 < 0$ ，方程 $x^2+6x+12=0$

无解，故 $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 \\ 3x+y=-6 \end{cases}$ 没有实数解，不符合题意；

故选：A.

3. 如图， $ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O 。如果添加一个条件，使得 $ABCD$ 是矩形，那么这个条件可以是（ ）



A. $AB=AD$

B. $AO=BO$

C. $AC \perp BD$

D. $AO=CO$

【答案】B

【分析】依据矩形的判定定理进行判断即可，

本题主要考查矩形的判定，熟悉掌握矩形判定条件是关键.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AO = \frac{1}{2}AC, \quad BO = \frac{1}{2}BD,$$

当 $AB=AD$ 时， $ABCD$ 是菱形，不是矩形，不符合题意，

当 $AO=BO$ 时， $AC=BD$ ， $ABCD$ 是矩形，符合题意，

当 $AC \perp BD$ 时， $ABCD$ 是菱形，不是矩形，不符合题意，

当 $AO=CO$ 时， $ABCD$ 是平行四边形，不是矩形，不符合题意，

故选：B.

4. 下列判断中，不正确的是（ ）

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{c} + \vec{b} + \vec{a}$

C. 如果 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ ，那么 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

D. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

【答案】C

【分析】根据向量是既有方向又有大小的量，向量的加法满足所有的加法运算定律，逐项进行分析判断即可.

【详解】解：A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ ，故 A 正确，不符合题意；

B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{c} + \vec{b} + \vec{a}$ ，故 B 正确，不符合题意；

C. 如果 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ ，那么 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ 或 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ，故 C 错误，符合题意；

D. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ ，故 D 正确，不符合题意。

故选：C。

【点睛】本题主要考查了向量的计算，解题的关键是要考虑向量是既有大小又有方向的量，向量的运算满足所有加法运算定律。

5. 某施工队要铺设一条长为 1500 米的管道，为了减少施工对交通造成的影响，施工队实际的工作效率比原计划提高了 20%，结果比原计划提前 2 天完成任务。若设施工队原计划每天铺设管道 x 米，则根据题意所列方程正确的是（ ）

A. $\frac{1500}{(1-20\%)x} - \frac{1500}{x} = 2$

B. $\frac{1500}{x} = 2 + \frac{1500}{(1-20\%)x}$

C. $\frac{1500}{(1+20\%)x} - \frac{1500}{x} = 2$

D. $\frac{1500}{x} = 2 + \frac{1500}{(1+20\%)x}$

【答案】D

【分析】设施工队原计划每天铺设管道 x 米，实际的工作效率为每天 $(1+20\%)x$ ，根据题意可知，实际比计划提前 2 天完成任务，列方程即可。

【详解】设施工队原计划每天铺设管道 x 米，实际的工作效率为每天 $(1+20\%)x$ ，

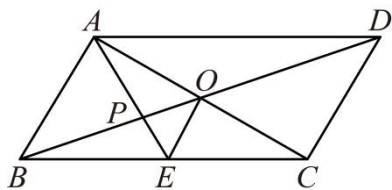
由题意得 $\frac{1500}{x} = 2 + \frac{1500}{(1+20\%)x}$ 。

故选 D。

【点睛】本题考查了由实际问题抽象出分式方程，解答本题的关键是读懂题意，设出未知数，找出合适的等量关系，列方程。

6. 如图，平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC ， BD 相交于点 O ， AE 平分 $\angle BAD$ ，分别交 BC ， BD 于点 E ， P ，连接 OE ， $\angle ADC = 60^\circ$ ， $AB = \frac{1}{2}BC = 1$ ，则下列结论：

① $\angle CAD = 30^\circ$ ；② $BD = \sqrt{7}$ ；③ $S_{\square ABCD} = AB \cdot AC$ ；④ $OE = \frac{1}{4}AD$ ；⑤ $S_{\triangle APO} = \frac{\sqrt{3}}{8}$ ，正确的个数是（ ）



A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】C

【分析】①先根据角平分线和平行线的性质得： $\angle BAE = \angle BEA$ ，则 $AB = BE = 1$ ，由有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形得： $\triangle ABE$ 是等边三角形，由外角的性质和等腰三角形的性质得： $\angle ACE = 30^\circ$ ，最后由平行线的性质可作判断；②先根据三角形中位线定理得： $OE = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}$ ， $OE \parallel AB$ ，根据勾股定理计算 OC ， OD 的长，即可求 BD 的长；③因为 $\angle BAC = 90^\circ$ ，根据平行四边形的面积公式可作判断；④根据平行四边形的性质和三角形中位线定理可作判断；⑤由 $OA = OC$ 求解 $S_{\triangle AOE} = S_{\triangle EOC} = \frac{\sqrt{3}}{8}$ ，再进一步可得答案.

【详解】解：① $\because AE$ 平分 $\angle BAD$ ，

$$\therefore \angle BAE = \angle DAE,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD \parallel BC, \angle ABC = \angle ADC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle BEA,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle BEA,$$

$$\therefore AB = BE = 1,$$

$\therefore \triangle ABE$ 是等边三角形，

$$\therefore AE = BE = 1,$$

$$\because BC = 2,$$

$$\therefore EC = 1,$$

$$\therefore AE = EC,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle ACE,$$

$$\because \angle AEB = \angle EAC + \angle ACE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACE = 30^\circ,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle ACE = 30^\circ, \text{ 故①正确;}$$

$$\text{②} \because BE = EC, OA = OC,$$

$$\therefore OE = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}, OE \parallel AB,$$

$$\therefore \angle EOC = \angle BAC = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore OC = \sqrt{CE^2 - OE^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore \angle BCD = \angle BAD = 120^\circ,$$

$$\because \angle ACB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = 90^\circ,$$

$$\therefore OD = \sqrt{OC^2 + DC^2} = \frac{\sqrt{7}}{2},$$

$$\therefore BD = 2OD = \sqrt{7}, \text{ 故②正确;}$$

$$\text{③由②知: } \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore S_{\square ABCD} = AB \cdot AC, \text{ 故③正确;}$$

$$\text{④由②知: } OE \text{ 是 } \triangle ABC \text{ 的中位线,}$$

$$\therefore OE = \frac{1}{2} AB,$$

$$\therefore AB = \frac{1}{2} BC,$$

$$\therefore OE = \frac{1}{4} BC = \frac{1}{4} AD, \text{ 故④正确;}$$

$$\text{⑤} \because \text{四边形 } ABCD \text{ 是平行四边形,}$$

$$\therefore OA = OC = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle AOE} = S_{\triangle EOC} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8},$$

$$\therefore S_{\triangle AOP} < S_{\triangle AOE},$$

$$\therefore S_{\triangle AOP} \neq \frac{\sqrt{3}}{8}, \text{ 故⑤错误;}$$

本题正确的有: ①②③④, 共 4 个,

故选: C.

【点睛】 本题考查了平行四边形的性质、等腰三角形的性质、等边三角形的性质、三角形的外角性质、含 30° 的直角三角形性质、三角形的中位线性质、三角形面积和平行四边形面积的计算; 熟练掌握平行四边形的性质, 证明 $\triangle ABE$ 是等边三角形是解决问题的关键, 并熟练掌握同高三角形面积的关系.

第 II 卷

二、填空题 (本大题共 12 个小题, 每小题 3 分, 共 36 分)

7. 直线 $y = 2(x - 3)$ 在 y 轴上的截距_____.

【答案】 -6

【分析】 本题考查了一次函数图像与 x 轴、 y 轴交点, 解题的关键是掌握一次函数的性质.

当 $x = 0$ 时, 求出 y 的值, 即可.

【详解】 解: 当 $x = 0$ 时, $y = -6$,

则直线 $y = 2(x - 3)$ 在 y 轴上的截距为 -6 ,

故答案为: -6 .

8. 已知关于 x 的方程 $2x^2 + mx + 3 = 0$ 是二项方程, 那么 $m =$ _____.

【答案】 0

【分析】 本题主要考查了二项方程的定义, 根据关于 x 的方程 $2x^2 + mx + 3 = 0$ 是二项方程, 即不含 mx 这一项, 可得 $m = 0$.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的方程 $2x^2 + mx + 3 = 0$ 是二项方程,

$\therefore m = 0$.

故答案为: 0.

9. 已知 $\sqrt{x^2 - 2003} + \sqrt{x^2 - 2023} = 10$, 则 x 的值为 _____.

【答案】 $\pm\sqrt{2039}$

【分析】 本题考查解无理方程, 利用平方法解方程即可.

【详解】 解: $\because \sqrt{x^2 - 2003} + \sqrt{x^2 - 2023} = 10$,

$\therefore \sqrt{x^2 - 2003} = 10 - \sqrt{x^2 - 2023}$,

$\therefore x^2 - 2003 = 100 - 20\sqrt{x^2 - 2023} + x^2 - 2023$,

$\therefore \sqrt{x^2 - 2023} = 4$,

$\therefore x^2 - 2023 = 16$,

$\therefore x^2 = 2039$,

$\therefore x = \pm\sqrt{2039}$;

故答案为: $\pm\sqrt{2039}$.

10. 已知 x, y 为实数, 满足 $\begin{cases} xy + x + y = 10 \\ x^2y + xy^2 = 24 \end{cases}$, 则 $x^2 + y^2$ 的值为 _____.

【答案】 28

【分析】 对所给条件进行因式分解, 分别求出 $x + y$ 与 xy 的值, 再利用完全平方公式进行计算即可解答.

【详解】 解: 由题意得:

$$\begin{cases} xy + (x + y) = 10 \\ xy(x + y) = 24 \end{cases},$$

解得: $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 4 \end{cases}$,

当 $\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 4 \end{cases}$ 时,

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 6^2 - 2 \times 4 = 28,$$

当 $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 6 \end{cases}$ 时, $y = 4 - x$,

$$\therefore x(4 - x) = 6,$$

整理得: $x^2 - 4x + 6 = 0$,

$$\therefore \Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 6 = -8 < 0,$$

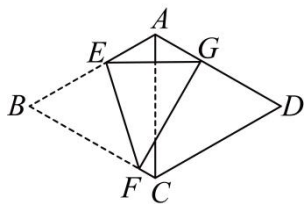
$\therefore$ 此方程无解;

综上所述, $x^2 + y^2$ 的值为 28,

故答案为: 28.

【点睛】 本题考查了因式分解的应用, 熟练掌握因式分解是解题的关键.

11. 如图, 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 6, 且 $\angle BAD = 120^\circ$, 点 E, F 分别在 AB, BC 边上, 将菱形沿 EF 折叠, 使点 B 正好落在 AD 边上的点 G 处. 若 $EG \perp AC$, 则 FG 的长为_____.

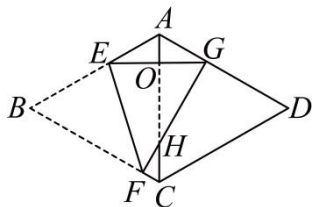


【答案】 $3\sqrt{3}$

【分析】 由菱形的性质可知 $\triangle ABC, \triangle ACD$ 是等边三角形, 再通过折叠的性质和等边三角形的性质得出 $FG \perp AD$, 即 FG 是菱形 $ABCD$ 的高, 最后用勾股定理求高即可,

本题主要考查菱形的性质, 等边三角形的性质及勾股定理, 掌握菱形的性质并能将 FG 转化成菱形的高是解题的关键.

【详解】 解: 如图, 设 AC 与 EG 交于点 O , FG 交 AC 于点 H .



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle BAD = 120^\circ$,

$\therefore \angle B = \angle D = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ABC, \triangle ACD$ 是等边三角形.

$\therefore \angle CAD = \angle B = 60^\circ$.

$\therefore EG \perp AC$,

$\therefore \angle GOH = 90^\circ$.

$\therefore \angle EGF = \angle B = 60^\circ$,

$\therefore \angle OHG = 30^\circ$,

$\therefore \angle AGH = 180^\circ - \angle CAD - \angle OHG = 90^\circ$,

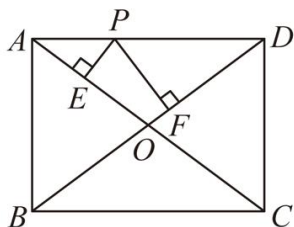
$\therefore FG \perp AD$,

$\therefore FG$ 是菱形 $ABCD$ 的高,

即为等边三角形 ABC 的高,

$$\therefore FG = \sqrt{6^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2} = 3\sqrt{3}.$$

12. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB=6, BC=8$, 对角线 AC, BD 相交于点 O , 点 P 是线段 AD 上任意一点 (点 P 不与 A, D 重合), 过 P 作 $PE \perp AC$ 于点 E , $PF \perp BD$ 于点 F , 则 $PE+PF$ 等于_____.

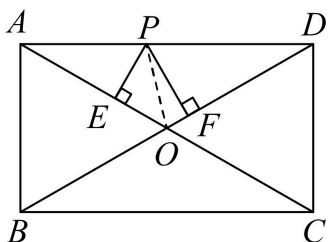


【答案】 $\frac{24}{5}$

【分析】连接 PO , 根据矩形的性质以及勾股定理可得 $S_{\triangle AOD} = \frac{1}{4}S_{\text{矩形}ABCD} = 12$, $OA=OD=\frac{1}{2}AC=5$, 再由

$S_{\triangle AOD} = S_{\triangle AOP} + S_{\triangle DOP}$, 即可求解.

【详解】解: 连接 PO , 如图,



在矩形 $ABCD$ 中, $AB=6, BC=8$,

$$\therefore S_{\text{矩形}ABCD} = AB \cdot BC = 48, OA=OC, OB=OD, AC=BD, \quad AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

$$\therefore S_{\triangle AOD} = \frac{1}{4}S_{\text{矩形}ABCD} = 12, \quad OA=OD=\frac{1}{2}AC=5,$$

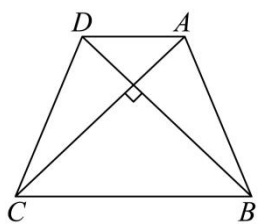
$$S_{\triangle AOD} = S_{\triangle AOP} + S_{\triangle DOP} = \frac{1}{2}OA \cdot PE + \frac{1}{2}OD \cdot PF = \frac{1}{2}OA(PE+PF) = \frac{1}{2} \times 5 \times (PE+PF) = 12,$$

$$\therefore PE+PF = \frac{24}{5}.$$

故答案为: $\frac{24}{5}$.

【点睛】本题主要考查了矩形的性质, 勾股定理, 熟练掌握矩形的性质, 勾股定理是解题的关键.

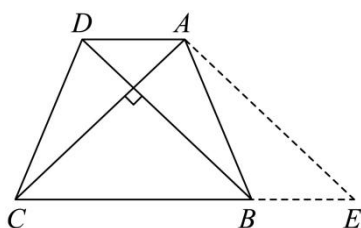
13. 如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 对角线 AC 与 BD 互相垂直, $AC=2\sqrt{2}$, 那么梯形 $ABCD$ 的中位线长为_____.



【答案】2

【分析】本题主要考查了梯形的中位线定理、等腰直角三角形的判定与性质、平行四边形的判定与性质等知识，正确作出辅助线是解题关键. 过A作 $AE \parallel BD$ 交CB的延长线于E，证明四边形ADBE是平行四边形，易得 $AE = BD = AC$ ，进而可得 $\triangle ACE$ 是等腰直角三角形，然后根据等腰直角三角形的直角边的长求得斜边的长，从而利用中位线定义求得答案.

【详解】解：过A作 $AE \parallel BD$ 交CB的延长线于E，



$\because AD \parallel BC, AE \parallel BD,$

$\therefore$ 四边形ADBE是平行四边形,

$\therefore AD = BE, AE = BD,$

$\because$ 等腰梯形ABCD中, $AC = BD,$

$\therefore AE = AC,$

$\because AC \perp BD, AE \parallel BD,$

$\therefore AE \perp AC,$

$\therefore \triangle ACE$ 是等腰直角三角形,

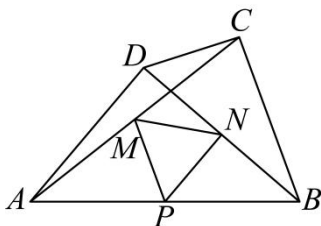
$\because AC = 5,$

$\therefore CE = BC + BE = BC + AD = \sqrt{2}AC = 4,$

$\therefore$ 梯形的中位线 $= \frac{1}{2}CE = 2.$

故答案为：2.

14. 如图，在四边形ABCD中， $AD = BC$ ， $\angle DAB = 50^\circ$ ， $\angle CBA = 70^\circ$ ，P、M、N分别是AB、AC、BD的中点，若 $BC = 6$ ，则 $\triangle PMN$ 的周长是_____.



【答案】9

【分析】根据三角形中位线定理，证明 $\triangle PMN$ 是等边三角形计算即可.

本题考查了三角形中位线定理，等边三角形的判定和性质，熟练掌握中位线定理是解题的关键.

【详解】 $\because P、M、N$ 分别是 $AB、AC、BD$ 的中点，

$$\therefore PM \parallel BC, PM = \frac{1}{2}BC, \quad PN \parallel AD, PN = \frac{1}{2}AD,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle NPB = 50^\circ, \quad \angle CBA = \angle MPA = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle MPN = 60^\circ,$$

$$\because AD = BC, \quad BC = 6,$$

$$\therefore PM = PN = \frac{1}{2}BC = 3,$$

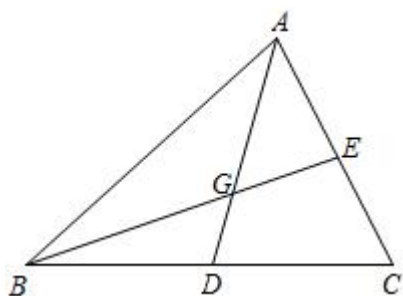
$\therefore \triangle PMN$ 是等边三角形，

$$\therefore PM = PN = MN = 3,$$

$$\therefore \triangle PMN \text{的周长为 } PM + PN + MN = 9,$$

故答案为：9.

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 G 是两条中线 $AD、BE$ 的交点，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AE} = \vec{b}$ ，如果用 $\vec{a}、\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{AG}$ ，那么 $\overrightarrow{AG} =$ _____.



【答案】 $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

【分析】根据重心的意义可得出 $\overrightarrow{BG}$ ，然后根据 $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$ 解答即可.

【详解】解： $\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AE} = \vec{b}$ ，

$$\therefore \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -\vec{a} + \vec{b},$$

$\because$ 点 G 是两条中线 $AD、BE$ 的交点，

$$\therefore \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b},$$

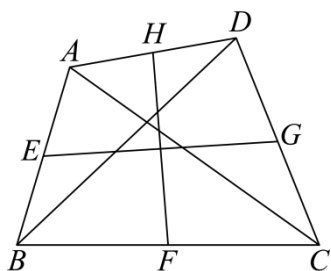
$$\therefore \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b},$$

故答案为： $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$.

【点睛】本题考查了三角形的重心，平面向量等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题

型.

16. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AC = BD = a$, E 、 F 、 G 、 H 分别是 AB 、 BC 、 CD 、 DA 的中点, 若 $EG^2 + FH^2 = 36$, 则 $a =$ _____.

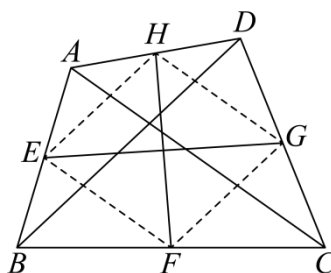


【答案】6

【分析】连接 EF , FG , GH , EH , 可得 EH 是 $\triangle ABD$ 的中位线, EF , FG , GH 分别是 $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle ACD$ 的中位线, $EH = EF = GH = FG = \frac{a}{2}$, 即四边形 $EFGH$ 为菱形, 可知对角线互相垂直, 即可证得:

$OE^2 + OH^2 = EH^2 = \frac{a^2}{4}$, 由此即可求得 $(2OE)^2 + (2OH)^2 = a^2$, 即 $a^2 = 36$, 由此即可求出 $a = 6$.

【详解】解: 如图, 连接 EF , FG , GH , EH ,



$\because E$ 、 H 分别是 AB 、 DA 的中点,

$\therefore EH$ 是 $\triangle ABD$ 的中位线,

$\therefore EH = \frac{1}{2}BD = \frac{a}{2}$,

同理可得 EF , FG , GH 分别是 $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle ACD$ 的中位线,

$\therefore EF = GH = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}$, $FG = \frac{1}{2}BD = \frac{a}{2}$,

$\therefore EH = EF = GH = FG = \frac{a}{2}$,

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 为菱形,

$\therefore EG \perp HF$, 且垂足为 O ,

$\therefore EG = 2OE$, $FH = 2OH$,

在 $Rt\triangle OEH$ 中, 根据勾股定理得: $OE^2 + OH^2 = EH^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$,

等式两边同时乘以 4 得: $4OE^2 + 4OH^2 = a^2$,

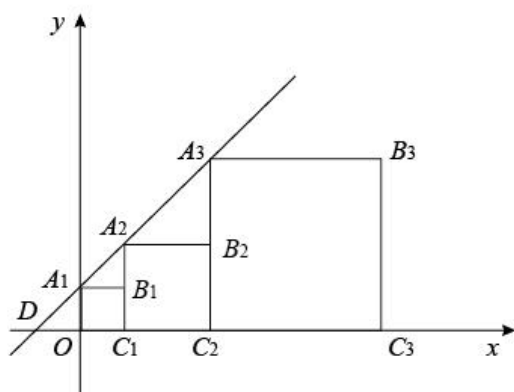
$$\therefore (2OE)^2 + (2OH)^2 = a, \text{ 即 } EG^2 + FH^2 = a^2 = 36.$$

故 $a = 6$, ($a = -6$, 负值不合题意舍去)

故答案为: 6.

【点睛】本题主要考查的是菱形的性质, 三角形中位线、勾股定理应用, 重点在于根据中点做出对应的中位线.

17. 如图, 直线 $y = x + 1$ 与 x 轴交于点 D , 与 y 轴交于点 A_1 , 把正方形 $A_1B_1C_1O_1$ 、 $A_2B_2C_2C_1$ 和 $A_3B_3C_3C_2$ 按如图所示方式放置, 点 A_2 、 A_3 在直线 $y = x + 1$ 上, 点 C_1 、 C_2 、 C_3 在 x 轴上, 按照这样的规律, 则点 A_1 的坐标是_____, 正方形 $A_{2022}B_{2022}C_{2022}C_{2021}$ 中的点 B_{2022} 的坐标为_____.



【答案】 $(0, 1)$ $(2^{2022} - 1, 2^{2021})$

【分析】求出直线 $y = x + 1$ 与 x 轴、 y 轴的交点坐标, 进而确定第 1 个正方形的边长, 再根据等腰直角三角形的性质, 得出第 2 个、第 3 个.....正方形的边长, 进而得出 B_1 、 B_2 、 B_3的坐标, 根据规律得到答案.

【详解】解: $\because$ 令直线 $y = x + 1$ 中 $y = 0$, 则 $x = -1$,

$\therefore y$ 轴交点坐标为: $A_1 (0, 1)$,

$\therefore$ 正方形 $OA_1B_1C_1$ 的边长为 1,

$\because \triangle A_1B_1A_2$ 、 $\triangle A_2B_2A_3$,都是等腰直角三角形, 边长依次为 1, 2, 4, 8, 16.....

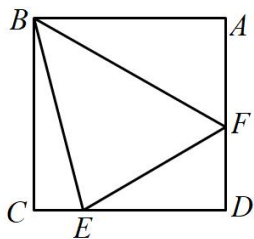
$\therefore B_1 (1, 1)$, $B_2 (3, 2)$, $B_3 (7, 4)$, $B_4 (15, 8)$

即: $B_1 (2^1 - 1, 2^0)$, $B_2 (2^2 - 1, 2^1)$, $B_3 (2^3 - 1, 2^2)$, $B_4 (2^4 - 1, 2^3)$ $B_{2022} (2^{2022} - 1, 2^{2021})$

故答案为: $B_{2022} (2^{2022} - 1, 2^{2021})$

【点睛】考查一次函数的图像和性质, 正方形的性质、等腰直角三角形的性质以及找规律等知识, 探索 and 发现点 B 的坐标的规律是得出答案的关键.

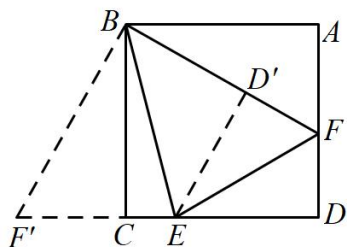
18. 如图, 边长为 4 的正方形 $ABCD$ 中, 点 E 、 F 分别在边 CD 、 AD 上, 连接 BE 、 BF 、 EF , 且有 $\angle EBF = 45^\circ$. 将 $\triangle EDF$ 沿 EF 翻折, 若点 D 的对应点恰好落在 BF 上, 则 EF 的长为_____.



【答案】 $8 - \frac{8\sqrt{3}}{3}$

【分析】将 $\triangle ABF$ 绕点 B 顺时针转 90° 得到 $\triangle BCF'$ ，证明 $\triangle BEF \cong \triangle BEF'$ (SAS)，推出 $\angle BFA = \angle EFD = \angle EFD' = 60^\circ$ ，进而得到 $\angle FED = 30^\circ$ ，设 $DF = x$ ，则： $EF = 2DF = 2x$ ， $ED = \sqrt{3}x$ ，再根据 $ED = CD - CE = 4 - 3x + 4 = 8 - 3x$ ，得到 $8 - 3x = \sqrt{3}x$ ，求出 x 的值，即可得解。

【详解】解：如图，将 $\triangle ABF$ 绕点 B 顺时针转 90° 得到 $\triangle BCF'$ ， 则： $\angle BCF' = \angle BAF = 90^\circ$



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，
 $\therefore \angle BCE = \angle BCF' = 90^\circ$ ，即 F', C, E 三点共线，
 由旋转可知， $BF' = BF, CF' = AF, \angle CBF' = \angle ABF$ ，
 $\therefore \angle EBF = 45^\circ$ ，
 $\therefore \angle CBE + \angle ABF = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ ，
 $\therefore \angle EBF' = \angle CBE + \angle CBF' = \angle CBE + \angle ABF = 45^\circ$ ，
 $\therefore \angle EBF' = \angle EBF$ ，
 又 $\because BE = BE$ ，
 $\therefore \triangle BEF \cong \triangle BEF'$ (SAS)，
 $\therefore \angle BF'E = \angle BFE$ ， $EF = EF'$ ，
 $\therefore \angle BFA = \angle BFE$ ，
 $\because \triangle EDF$ 沿 EF 翻折，点 D 的对应点恰好落在 BF 上即点 D' ，
 $\therefore \angle EFD = \angle EFD'$ ，
 $\therefore \angle BFA = \angle EFD = \angle EFD'$ ，
 即 $\angle BFA = \angle EFD = \angle EFD' = 180^\circ \div 3 = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle FED = 90^\circ - \angle EFD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ，
 设 $DF = x$ ，则： $EF = 2DF = 2x$ ， $ED = \sqrt{3}x$ ，

$$\because AD = CD = 4,$$

$$\therefore AF = AD - DF = 4 - x, \quad CE = EF' - CF' = EF - AF = 2x - (4 - x) = 3x - 4,$$

$$\therefore ED = CD - CE = 4 - 3x + 4 = 8 - 3x,$$

$$\therefore 8 - 3x = \sqrt{3}x,$$

$$\text{解得: } x = 4 - \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore EF = 2x = 8 - \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{故答案为 } 8 - \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

【点睛】本题考查正方形与折叠，旋转，全等三角形的判定和性质，含 30 度角的直角三角形，二次根式的除法运算，本题蕴含半角模型，解题的关键是构造旋转全等三角形.

三、解答题（本大题共 8 小题，第 19、20 题每题 5 分，第 21 至 24 题每题 6 分，第 25 题 8 分，第 26 题 10 分，共 52 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

19. (5 分) 解方程: $4m^2 - x = 2mx + 1$.

【答案】当 $m \neq -\frac{1}{2}$ 时，原方程的根为 $x = 2m - 1$; 当 $m = -\frac{1}{2}$ 时，原方程无解.

【分析】根据一元整式方程解方程步骤即可解题.

【详解】解：移项，得 $2mx + x = 4m^2 - 1$.

合并同类项，得 $(2m + 1)x = 4m^2 - 1$.

当 $m \neq -\frac{1}{2}$ 时，解得 $x = \frac{4m^2 - 1}{2m + 1} = 2m - 1$;

当 $m = -\frac{1}{2}$ 时，原方程无解.

所以，当 $m \neq -\frac{1}{2}$ 时，原方程的根为 $x = 2m - 1$;

当 $m = -\frac{1}{2}$ 时，原方程无解.

【点睛】本题考查了一元整式方程的求解，属于简单题，熟悉参数的分类讨论是解题关键.

20. (5 分) 解方程: $x - \sqrt{2x - 5} = 4$.

【答案】 $x = 7$

【分析】本题主要考查了解无理方程，掌握解无理方程的技巧和解一元二次方程是解题的关键.

先将无理方程转化为一元二次方程，然后解一元二次方程即可，最后根据无理方程的特点要进行检验即可.

【详解】解： $\sqrt{2x - 5} = x - 4$,

$$2x-5=(x-4)^2,$$

$$x^2-10x+21=0,$$

$$\therefore x_1=7, \quad x_2=3,$$

经检验 $x=3$ 时, 不符合题意, 舍去.

$\therefore$ 原方程的解为 $x=7$.

21. (6分) 解方程组
$$\begin{cases} x^2-9y^2=0 \\ x^2-2xy+y^2=4 \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$$

【分析】 本题主要考查解高次方程, 关键在于对原方程组的两个方程进行化简, 重新组合.

首先对原方程组进行化简, 然后分别重新组合, 成为 4 个方程组, 最后解这两个方程组即可.

【详解】 解:
$$\begin{cases} x^2-9y^2=0 \textcircled{1} \\ x^2-2xy+y^2=4 \textcircled{2} \end{cases}$$

方程①可变形为 $(x+3y)(x-3y)=0$.

得 $x+3y=0$ 或 $x-3y=0$.

方程②可变形为 $(x-y)^2=4$.

得 $x-y=2$ 或 $x-y=-2$.

因此, 原方程组可组成以下四个二元一次方程组:

$$\begin{cases} x+3y=0 \\ x-y=2 \end{cases}, \begin{cases} x+3y=0 \\ x-y=-2 \end{cases}, \begin{cases} x-3y=0 \\ x-y=2 \end{cases}, \begin{cases} x-3y=0 \\ x-y=-2 \end{cases}.$$

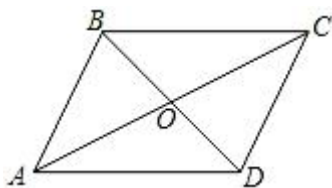
分别解这四个方程组,

得原方程组的解是
$$\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}.$$

22. (6分) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , 设 $\overrightarrow{AO}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DO}=\vec{b}$.

(1) 试用向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 表示下列向量: $\overrightarrow{BC}$ = ____; $\overrightarrow{CD}$ = ____;

(2) 求作: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$. (保留作图痕迹, 写出结果, 不要求写作法).



【答案】 (1) $\vec{a}-\vec{b}$, $-\vec{a}-\vec{b}$; (2) 见解析

【分析】(1) 利用平行四边形的性质以及三角形法则求解即可.

(2) 如图, 延长 BC 到 E , 使得 $CE = BC$, 则 $\overrightarrow{AE}$ 即为所求.

【详解】解: (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

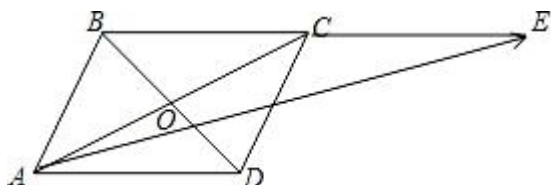
$$\therefore BC \parallel AD, BC = AD, OA = OC,$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \vec{a} - \vec{b},$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} = -\vec{a} - \vec{b}.$$

故答案为: $\vec{a} - \vec{b}$, $-\vec{a} - \vec{b}$.

(2) 如图, 延长 BC 到 E , 使得 $CE = BC$, 则 $\overrightarrow{AE}$ 即为所求.



【点睛】本题考查作图-复杂作图, 平行四边形的性质, 平面向量等知识, 解题的关键是熟练掌握基本知识, 属于中考常考题型.

23. (6分) 定义: 我们把对角线相等的四边形叫作伪矩形, 对角线的交点称作伪矩形的中心.

(1)①写出一种你学过的伪矩形: .

②顺次连接伪矩形各边中点所得的四边形是 .

A. 正方形 B. 矩形 C. 菱形 D. 无法确定

(2)如图 1, 在伪矩形 $ABCD$ 中, $\angle BCD = 90^\circ$, $AC = 3$, $CD = 2$, 求 BC 的长.

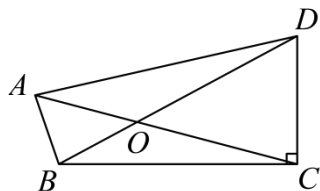


图1

(3)如图 2, 在伪矩形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$, $AB = 2$, $AC = CD$, 求这个伪矩形的面积.

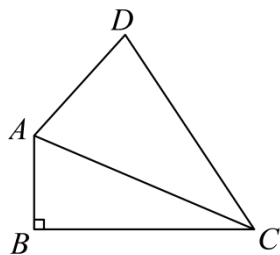


图2

【答案】(1)①等腰梯形; ②C

(2) $\sqrt{5}$

(3) $\sqrt{39} + \sqrt{3}$

【分析】(1) ①根据题意，写出对角线相等的四边形，例如等腰梯形，即可求解；

②根据中位线的性质可得 $EF = GH = \frac{1}{2}BD$, $EH = FG = \frac{1}{2}AC$ ，进而根据伪矩形的定义，可得 $BD = AC$ ，进而即可得出结论；

(2) 根据伪矩形的定义，可得 $BD = AC$ ，进而勾股定理，即可求解．

(3) 作 $DF \perp BC$ ，根据梯形的面积公式，三角形面积公式即可得出答案．

【详解】(1) ①写出一种你学过的伪矩形：等腰梯形；

故答案为：等腰梯形．

②如图所示，伪矩形 $ABCD$ 中， $AC = BD$ ，

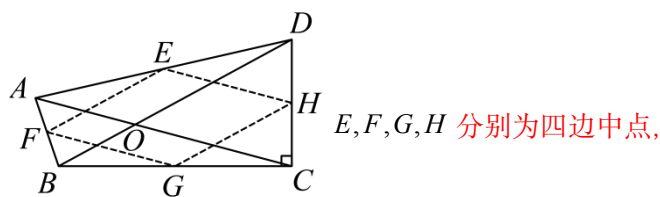


图1

$$\therefore EF = GH = \frac{1}{2}BD, EH = FG = \frac{1}{2}AC$$

$$\therefore EF = FG = GH = HE$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是菱形；

$\therefore$ 顺次连接伪矩形各边中点所得的四边形是菱形，

故选：C．

(2) $\because$ 在伪矩形 $ABCD$ 中， $AC = 3$

$$\therefore BD = AC = 3$$

$$\because \angle BCD = 90^\circ, BD = 3, CD = 2,$$

$$\therefore BC = \sqrt{BD^2 - CD^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5};$$

(3) 解：作 $DF \perp BC$ ，垂足为 F ，

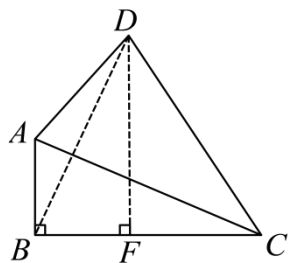


图2

$\because$ 伪矩形 $ABCD$ 中， $AC = BD$ ， $AC = DC$ ，

$$\therefore BD = CD,$$

$$\because \angle ABC = 90^\circ, \angle BAC = 60^\circ, AB = 2,$$

$$\therefore AB = \frac{1}{2}AC, BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{3}AB = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AC = CD = BD = 4$$

$$\because BD = CD, DF \perp BC$$

$$\therefore BF = CF = \frac{1}{2}BC = \sqrt{3}$$

$$\therefore DF = \sqrt{CD^2 - CF^2} = \sqrt{16 - 3} = \sqrt{13}$$

$$\therefore \text{这个伪矩形的面积为} = \frac{1}{2}FC \times DF + \frac{1}{2}(AB + DF) \times BF$$

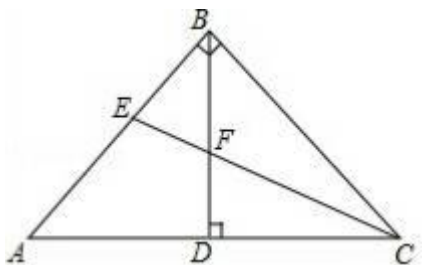
$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{13} + \frac{1}{2}(2 + \sqrt{13}) \times \sqrt{3}$$

$$= \sqrt{39} + \sqrt{3}$$

24. (6分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC$, $BD \perp AC$ 于点D; CE 平分 $\angle ACB$, 交 AB 于点E, 交 BD 于点F.

(1)求证: $\triangle BEF$ 是等腰三角形;

(2)求证: $BD = \frac{1}{2}(BC + BF)$.



【答案】(1) 证明见解析 (2) 证明见解析

【分析】(1)由 $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC$, 可得 $\angle A = \angle ACB = 45^\circ$, 由 CE 平分 $\angle ACB$ 可得 $\angle ECA$ 的度数, 根据外角性质求出 $\angle BEF$ 的度数, 由直角三角形两锐角互余求出 $\angle CFD$ 的度数即可得结论;

(2) 延长 AB 至 M , 使得 $BM = AB$, 连接 CM , 根据中位线定理可知 $BD = \frac{1}{2}CM$, 由 $BD \parallel CM$, 可求出 $\angle MCE$ 的度数, 即可证明 $MC = ME$, 根据等量关系证明, 即可得结论.

【详解】(1) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = BC$, $BD \perp AC$ 于点D,

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD, AD = CD,$$

$$\because \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\because CE \text{ 平分 } \angle ACB,$$

$$\therefore \angle ECB = \angle ACE = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle BEF = \angle A + \angle ACF = 67.5^\circ, \angle BFE = \angle CFD = 90^\circ - 22.5^\circ = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle BEF = \angle BFE,$$

$$\therefore BE = BF,$$

$$\therefore \triangle BEF \text{ 是等腰三角形};$$

(2) 如图，延长 AB 至 M，使得 BM=AB，连接 CM，

$\because AB=BM$ ， $AD=CD$ ，

$\therefore BD \parallel CM$ ， $BD=\frac{1}{2}CM$ ，

$\therefore \angle BCM=\angle DBC=\angle ABD=\angle BMC=45^\circ$ ，

$\therefore \angle MCE=45^\circ+22.5^\circ=67.5^\circ$ ，

$\therefore \angle BEF=\angle MCE$ ，

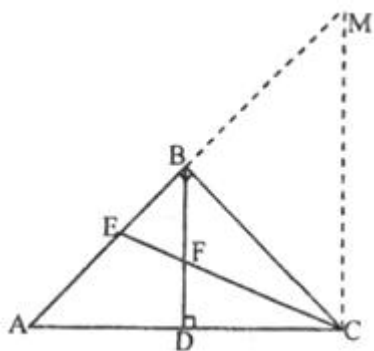
$\therefore MC=EM$ ，

$\because AB=BM$ ， $AB=BC$

$\therefore BC=BM$ ，

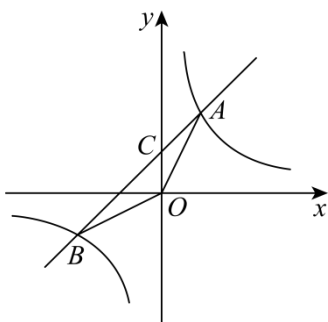
由 (1) 得， $BE=BF$ ，

$\therefore BD=\frac{1}{2}EM=\frac{1}{2}(BM+BE)=\frac{1}{2}(BC+BF)$ 。



【点睛】本题考查等腰三角形的判定及性质，三角形中位线定理，熟练掌握中位线定理并正确作出辅助线是解题关键。

25. (8 分) 如图，一次函数 $y=x+1$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象相交于 $A(m,2)$ ， B 两点，分别连接 OA ， OB 。



(1) 求这个反比例函数的表达式；

(2) 求不等式 $x+1 > \frac{k}{x}$ 的解集；

(3) 在平面内是否存在一点 P ，使得以点 O ， B ， A ， P 为顶点的四边形为平行四边形？若存在，请直接写出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由。

【答案】(1) $y = \frac{2}{x}$

(2) $-2 < x < 0$ 或 $x > 1$

(3) 存在, P 点坐标为 $(-1, 1)$ 或 $(-3, -3)$ 或 $(3, 3)$

【分析】 本题考查了一次函数和反比例函数综合、求反比例函数解析式、根据图象写出不等式的解集、平行四边形的性质、点坐标的平移等, 解题的关键在于对知识的熟练掌握与灵活运用.

(1) 把 $A(m, 2)$ 代入一次函数求解, 得到点 A 坐标, 把点 A 坐标代入 $y = \frac{k}{x}$ 求出反比例函数表达式即可

(2) 联立一次函数和反比例函数表达式, 求出点 B 坐标, 结合点 A 坐标, 观察图象, 得出不等式 $x+1 > \frac{k}{x}$ 的解集即可;

(3) 由题意知, 分 OA 与 OB 为邻边, AB 与 AO 为邻边, BA 与 BO 为邻边, 三种情况讨论, 根据点坐标的平移方式求解即可.

【详解】(1) 解: 把 $A(m, 2)$ 代入一次函数得 $2 = m + 1$, 解得 $m = 1$,

$\therefore A(1, 2)$,

把 $A(1, 2)$ 代入反比例函数得 $2 = \frac{k}{1}$, 解得 $k = 2$,

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y = \frac{2}{x}$;

(2) 解: $\because$ 一次函数的表达式为 $y = x + 1$, 反比例函数的表达式为 $y = \frac{2}{x}$,

$\therefore$ 联立表达式, 得: $x + 1 = \frac{2}{x}$,

整理得: $x^2 + x - 2 = 0$,

$(x + 2)(x - 1) = 0$,

$\therefore x + 2 = 0$ 或 $x - 1 = 0$,

$\therefore x_1 = -2$, $x_2 = 1$,

$\therefore A(1, 2)$,

$\therefore$ 点 B 横坐标 $= -2$,

$\therefore$ 结合图象观察, 得不等式 $x + 1 > \frac{k}{x}$ 的解集为 $-2 < x < 0$ 或 $x > 1$;

(3) 解: ①当 OA 与 OB 为邻边, 时, 点 $O(0, 0)$ 先向左平移 2 个单位再向下平移 1 个单位到点 $B(-2, -1)$,

$\therefore$ 点 $A(1, 2)$ 也先向左平移 2 个单位再向下平移 1 个单位到点 P , 即 $P(-1, 1)$;

②当 AB 与 AO 为邻边时, 点 $A(1, 2)$ 先向左平移 1 个单位再向下平移 2 个单位到点 $O(0, 0)$,

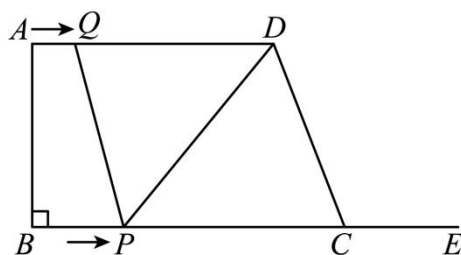
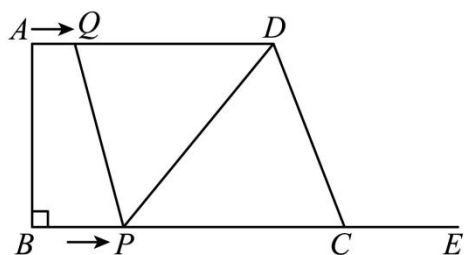
$\therefore$ 点 $B(-2, -1)$ 也先向左平移 1 个单位再向下平移 2 个单位到点 P ，即 $P(-3, -3)$ ；

③ 当 BA 与 BO 为邻边时，点 $B(-2, -1)$ 先向右平移 3 个单位再向上平移 3 个单位到点 $A(1, 2)$ ，

$\therefore$ 点 $O(0, 0)$ 也先向右平移 3 个单位再向上平移 3 个单位到点 P ，即 $P(3, 3)$ 。

综上，存在， P 点坐标为 $(-1, 1)$ 或 $(-3, -3)$ 或 $(3, 3)$ 。

26. (10 分) 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle B = 90^\circ$ ， $AD = 16\text{cm}$ ， $AB = 12\text{cm}$ ， $BC = 21\text{cm}$ 。动点 P 从点 B 出发，沿射线 BC 的方向以每秒 2cm 的速度运动到 C 点返回，动点 Q 从点 A 出发，在线段 AD 上以每秒 1cm 的速度向点 D 运动，点 P ， Q 分别从点 B ， A 同时出发，当点 Q 运动到点 D 时，点 P 随之停止运动，设运动时间为 t (秒)。



备用图

(1) 当 $0 < t < 10.5$ 时，是否存在点 P ，使四边形 $PQDC$ 是平行四边形？若存在，请求出所有满足要求的 t 的值；若不存在，请说明理由；

(2) 当 t 为何值时，以 C ， D ， Q ， P 为顶点的四边形面积等于 60cm^2 ？

(3) 当 $0 < t < 10.5$ 时，是否存在点 P ，使 $\triangle PQD$ 是等腰三角形 (不考虑 $QD = PD$)？若存在，请直接写出 t 的值。

【答案】 (1) 存在，当 $t = 5$ 秒时，四边形 $PQDC$ 是平行四边形，理由见解析；(2) $t = 9$ 或 15 秒，理由见解析；(3) 当 $t = \frac{16}{3}$ 秒或 $\frac{7}{2}$ 秒时， $\triangle PQD$ 是等腰三角形，理由见解析

【分析】 (1) 由题意已知， $AD \parallel BC$ ，要使四边形 $PQDC$ 是平行四边形，则只需要让 $QD = PC$ 即可，列出等式可求解。

(2) 要使以 C ， D ， Q ， P 为顶点的梯形面积等于 60cm^2 ，可以分为两种情况，点 P 、 Q 分别沿 AD 、 BC 运动或点 P 返回时，再利用梯形面积公式，即 $(QD + PC) \times AB \div 2 = 60$ ，因为 Q 、 P 点的速度已知， AD 、 AB 、 BC 的长度已知，用 t 可分别表示 QD 、 BC 的长，即可求得时间 t ；

(3) 使 $\triangle PQD$ 是等腰三角形，可分三种情况，即 $PQ = PD$ 、 $PQ = QD$ ，可利用等腰三角形及直角梯形的性质，分别用 t 表达等腰三角形的两腰长，再利用两腰相等即可求得时间 t 。

【详解】 解：(1) $\because$ 四边形 $PQDC$ 是平行四边形，

$$\therefore DQ = CP,$$

当 P 从 B 运动到 C 时，

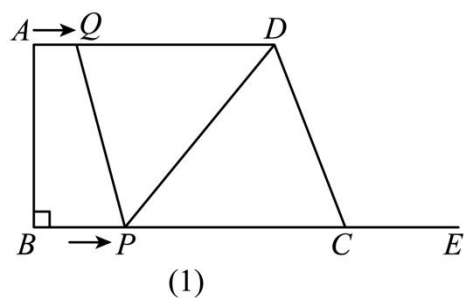
$$\therefore DQ = AD - AQ = 16 - t,$$

$$CP = 21 - 2t$$

$$\therefore 16 - t = 21 - 2t$$

解得 $t = 5$

$\therefore$ 当 $t = 5$ 秒时, 四边形 $PQDC$ 是平行四边形;



(2) 若点 P 、 Q 分别沿 AD 、 BC 运动时,

$$\frac{DQ + CP}{2} \cdot AB = 60,$$

$$\text{即 } \frac{16 - t + 21 - 2t}{2} \times 12 = 60,$$

解得 $t = 9$ (秒)

若点 P 返回时, $CP = 2t - 21$,

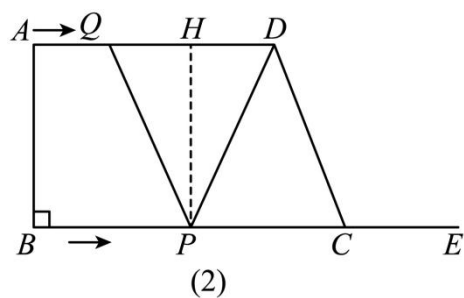
$$\text{则 } \frac{16 - t + 2t - 21}{2} \times 12 = 60$$

解得 $t = 15$ (秒).

故当 $t = 9$ 或 15 秒时, 以 C 、 D 、 Q 、 P 为顶点的梯形面积等 60cm^2 ;

(3) 当 $PQ = PD$ 时

作 $PH \perp AD$ 于 H , 则 $HQ = HD$,



$$\therefore QH = HD = \frac{1}{2} QD = \frac{1}{2} (16 - t),$$

$$\therefore AH = BP$$

$$\therefore 2t = \frac{1}{2} (16 - t) + t$$

$$\therefore t = \frac{16}{3} \text{ 秒};$$

当 $PQ = QD$ 时, $QH = AH - AQ = BP - AQ = 2t - t = t$, $QD = 16 - t$,

$$\therefore QD^2 = PQ^2 = t^2 + 12^2$$

$$\therefore (16-t)^2 = 12^2 + t^2$$

解得 $t = \frac{7}{2}$ (秒),

综上所述, 当 $t = \frac{16}{3}$ 秒或 $\frac{7}{2}$ 秒时, $\triangle PQD$ 是等腰三角形.

【点睛】本题是四边形综合题, 主要考查了直角梯形的性质, 平行四边形的性质, 梯形的面积, 等腰三角形的性质, 解题的关键是注意要全面考虑各种情况, 不要遗漏.