

2022-2023 年月浦实验

八下3月月考数学试卷

(本试卷共有 28 道试题, 满分 100 分, 考试时间 90 分钟)

一. 填空题 (本大题共有 15 题, 每题 2 分, 满分 30 分)

1. 在函数 $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ 中, 自变量 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq -1$ 且 $x \neq 0$

【解析】

【详解】 根据题意得: $x+1 \geq 0$ 且 $x \neq 0$,

解得: $x \geq -1$ 且 $x \neq 0$.

故答案为: $x \geq -1$ 且 $x \neq 0$.

【点睛】 考点: 函数自变量的取值范围.

2. 函数 $y = \frac{x-2}{3}$ 的图象在 y 轴的截距是_____.

【答案】 $-\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 代入 $x=0$ 求出 y 值, 此题得解.

【详解】 解: 当 $x=0$ 时, $y = \frac{0-2}{3} = -\frac{2}{3}$,

$\therefore$ 一次函数 $y = \frac{x-2}{3}$ 的图象在 y 轴上的截距是 $-\frac{2}{3}$.

故答案为: $-\frac{2}{3}$.

【点睛】 本题主要考查了一次函数图象上点的坐标特征, 牢记代入 $x=0$ 求出的 y 值即可求出该函数图象在 y 轴上的截距, 是解题的关键.

3. 方程 $\frac{1}{3}x^4 - 27 = 0$ 的根是_____.

【答案】 $x = \pm 3$

【解析】

【分析】 先把方程转化为 $\frac{1}{3}(x^2)^2 - 27 = 0$ 的形式, 然后再利用平方根的概念求解.

【详解】解：原方程化为： $\frac{1}{3}(x^2)^2 - 27 = 0$,

$$\frac{1}{3}(x^2)^2 = 27,$$

$$(x^2)^2 = 81,$$

$$\therefore x^2 = 9 \text{ 或 } x^2 = -9 \text{ (舍去),}$$

$$\therefore x = \pm 3.$$

故答案为： $x = \pm 3$

【点睛】本题考查了利用平方根解方程，理解掌握平方根的概念是解题的关键.

4. 方程 $\sqrt{x+12} = x$ 的解是_____.

【答案】 $x = 4$

【解析】

【分析】把方程两边平方去根号得一元二次方程，解得后将解代入方程检验.

【详解】解：两边同时平方可得： $x+12 = x^2$

可解得： $x = 4$ 或 $x = -3$;

经检验 $x = -3$ 不符，

故答案为： $x = 4$.

【点睛】本题考查解一元二次方程，需要注意对解进行检验.

5. 函数 $y = -3x + 6$ 的图象与 x 轴、 y 轴围成的三角形面积为_____.

【答案】6

【解析】

【分析】根据函数与 x 轴的交点的纵坐标为0，把 $y = 0$ 代入函数的表达式中，即可求出函数与 x 轴的交点坐标；根据函数与 y 轴交点的横坐标为0，把 $x = 0$ 代入表达式中，即可求出函数与 y 轴的交点坐标；根据一次函数的图象与两坐标轴围成的图形是直角三角形，并结合直角三角形面积公式，问题很容易就能解答了.

【详解】解： $\because$ 当 $y = 0$ 时， $-3x + 6 = 0$ ，解得 $x = 2$ ，

$\therefore$ 函数图象与 x 轴的交点坐标为 $(2, 0)$;

当 $x = 0$ 时， $y = -3 \times 0 + 6 = 6$,

$\therefore$ 函数图象与 y 轴的交点坐标为 $(0, 6)$;

$\therefore$ 函数图象与两坐标轴围成的图形的面积为 $\frac{1}{2} \times 2 \times 6 = 6$.

故答案为：6.

【点睛】本题考查的是一次函数图象上点的坐标特点，熟知坐标轴上点的坐标特点是解题的

关键.

6. 一次函数 $y = -5x + b$ 的图象不经过第一象限, 则 b 的取值范围是_____.

【答案】 $b \leq 0$

【解析】

【分析】 根据一次函数的图象与性质即可得.

【详解】 当 $x = 0$ 时, $y = b$

即此函数在 y 轴上的截距为 b

$\because -5 < 0$

$\therefore$ 要使一次函数 $y = -5x + b$ 的图象不经过第一象限, 则此函数在 y 轴上的截距小于等于 0

即 $b \leq 0$

故答案为: $b \leq 0$.

【点睛】 本题考查了一次函数的图象与性质, 掌握一次函数的图象与性质是解题关键.

7. 已知点 $A(-2, a)$ 和点 $B(3, b)$ 在函数 $y = -6x + m$ 的图象上, 那 a _____ b (填 “ $>$ ”、“ $=$ ” 或 “ $<$ ”).

【答案】 $>$

【解析】

【分析】 分别将 $A(-2, a)$ 和 $B(3, b)$ 代入 $y = -6x + m$, 表示出 a 、 b , 作差即可比较其大小.

【详解】 解: $\because$ 点 $A(-2, a)$ 和点 $B(3, b)$ 在函数 $y = -6x + m$ 的图象上,

$\therefore a = 12 + m$, $b = -18 + m$,

$\therefore a - b = (12 + m) - (-18 + m) = 30 > 0$,

$\therefore a > b$,

故答案为: $>$.

【点睛】 本题考查一次函数图象上点的坐标特征及一次函数的性质, 熟知一次函数图象上各点的坐标一定适合一次函数解析式是解题的关键.

8. 如果直线 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 经过第一、二、四象限, 且与 x 轴的交点为 $(6, 0)$, 那么当 $kx + b > 0$ 时 x 的取值范围是_____.

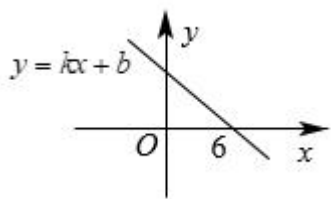
【答案】 $x < 6$

【解析】

【分析】 先根据一次函数的性质画出函数的大致图象, 然后结合图象, 写出一函数图象在 x 轴上方所对应的自变量的范围即可.

【详解】 解: 如图, 当 $x < 6$ 时, $y > 0$,

即当 $kx + b > 0$ 时 x 的取值范围是 $x < 6$.



故答案为: $x < 6$.

【点睛】本题考查了一次函数与一元一次不等式: 理解一次函数与一元一次不等式(组)之间的内在联系及数形结合思想. 运用一次函数的性质是解决本题的关键.

9. 把一次函数 $y = 2 - x$ 的图像向下平移_____个单位, 平移后的图像经过点 $(1, -2)$.

【答案】3

【解析】

【分析】设一次函数 $y = 2 - x$ 的图像向下平移 k 个单位, 则 $y = 2 - x - k$, 然后再将点 $(1, -2)$ 代入求得 k 即可.

【详解】解: 设一次函数 $y = 2 - x$ 的图像向下平移 k 个单位

$$\therefore y = 2 - x - k$$

$\because$ 平移后的图像经过点 $(1, -2)$

$$\therefore -2 = 2 - 1 - k, \text{ 解得 } k = 3.$$

故答案为 3.

【点睛】本题主要考查了一次函数图像的平移, 掌握一次函数图像的平移规律“左加右减、上加下减”是解答本题的关键.

10. 用换元法解方程 $\frac{3x}{x^2-1} + \frac{x^2-1}{x} = \frac{1}{2}$, 设 $y = \frac{x^2-1}{x}$, 那么原方程可化为关于 y 的一元二次方程为_____.

【答案】 $2y^2 - y + 6 = 0$

【解析】

【分析】设 $y = \frac{x^2-1}{x}$, 则可由原方程得 $\frac{3}{y} + y = \frac{1}{2}$, 据此即可求得.

【详解】解: 设 $y = \frac{x^2-1}{x}$,

则可由原方程得 $\frac{3}{y} + y = \frac{1}{2}$,

$$\text{得 } 2y^2 - y + 6 = 0,$$

故答案为: $2y^2 - y + 6 = 0$.

【点睛】 本题考查了换元法的应用，根据方程的组成，巧妙设元是解决本题的关键.

11. 直线 $y = 2x - 6$ 关于 y 轴对称的直线的解析式为_____.

【答案】 $y = -2x - 6$

【解析】

【分析】 找到原直线解析式上的关于相应的坐标轴对称的点.

【详解】 解： 可从直线 $y = 2x - 6$ 上找两点： $(0, -6), (3, 0)$ 这两个点关于 y 轴的对称点是 $(0, -6), (-3, 0)$ ，那么这两个点在直线 $y = 2x - 6$ 关于 y 轴对称的直线 $y = kx + b$ 上，

则 $b = -6, -3k + b = 0$

解得： $k = -2$.

$\therefore y = -2x - 6$.

故答案为： $y = -2x - 6$.

【点睛】 本题考查了一次函数图象的几何变换，要注意轴对称的性质.

12. 已知一次函数 $y = (m + 2)x + (1 - m)$ ，若 y 随 x 的增大而减小，且此函数图象与 y 轴的交点在 x 轴的上方，则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m < -2$

【解析】

【分析】 一次函数中， y 随 x 增大而减小，说明自变量系数小于 0，即 $m + 2 < 0$ ，图象过二、四象限；且此函数图象与 y 轴的交点在 x 轴的上方，则 $1 - m > 0$. 据此解答 m 的取值范围即可.

【详解】 解： $\because y$ 随 x 的增大而减小，

$\therefore m + 2 < 0$ ，即 $m < -2$ ，

直线与 y 轴的交点在 x 轴的上方，故 $1 - m > 0$ ，

解得 $m < 1$ ，

$\therefore m$ 的取值范围是 $m < -2$.

故答案为： $m < -2$.

【点睛】 本题主要考查了一次函数图象在坐标平面内的位置与 k 、 b 的关系. 解答本题注意理解：直线 $y = kx + b$ 所在的位置与 k 、 b 的符号有直接的关系. $k > 0$ 时，直线必经过一、三象限； $k < 0$ 时，直线必经过二、四象限； $b > 0$ 时，直线与 y 轴正半轴相交； $b = 0$ 时，直线过原点； $b < 0$ 时，直线与 y 轴负半轴相交.

13. 若方程： $4 - \sqrt{2x + 1} + k = 0$ 有解，则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k \geq -4$

【解析】

【分析】 根据二次根式有意义的条件列出关于 k 的不等式求解即可.

【详解】解： $\because 4 - \sqrt{2x+1} + k = 0$ ，即： $\sqrt{2x+1} = 4 + k$ ，

$\because \sqrt{2x+1} \geq 0$ ，

$\therefore 4 + k \geq 0$ ，

解得： $k \geq -4$ ，

故答案为： $k \geq -4$ 。

【点睛】本题考查了无理方程，根据二次根式有意义的条件列出关于 k 的不等式是解答本题的关键。

14. 我们知道：当 $x=2$ 时，不论 k 取何实数，函数 $y=k(x-2)+3$ 的值为 3，所以直线 $y=k(x-2)+3$ 一定经过定点 $(2,3)$ ；同样，直线 $y=(k-2)x+3k$ 一定经过的定点为 _____。

【答案】 $(-3,6)$

【解析】

【分析】先将 $y=(k-2)x+3k$ 化为： $y=(x+3)k-2x$ ，可得当 $x=-3$ 时，不论 k 取何实数，函数 $y=(x+3)k-2x$ 的值为 6，即可得到直线 $y=(k-2)x+3k$ 一定经过的定点为 $(-3,6)$ 。

【详解】根据题意， $y=(k-2)x+3k$ 可化为： $y=(x+3)k-2x$ ，

$\therefore$ 当 $x=-3$ 时，不论 k 取何实数，函数 $y=(x+3)k-2x$ 的值为 6，

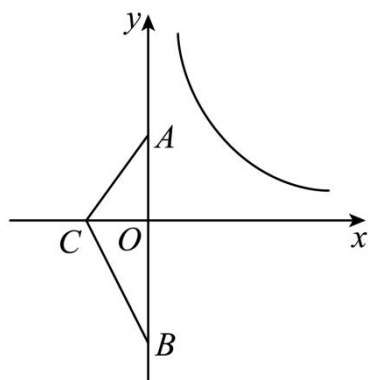
$\therefore$ 直线 $y=(k-2)x+3k$ 一定经过的定点为 $(-3,6)$ ，

故答案为 $(-3,6)$ 。

【点睛】本题主要考查了一次函数图象上点的坐标特征，直线上任意一点的坐标都满足函数关系式 $y=kx+b$ 。

15. 如图，在平面直角坐标系中， $\triangle ABC$ 的顶点 A 、 B 均在 y 轴上，点 C 在 x 轴上，将 $\triangle ABC$ 绕着顶点 B 旋转后，点 C 的对应点 C' 落在 y 轴上，点 A 的对应点 A' 落在反比例函数 $y = \frac{15}{2x}$

在第一象限的图象上。如果点 B 、 C 的坐标分别是 $\left(0, -\frac{9}{2}\right)$ 、 $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ ，那么点 A' 的坐标是 _____。



【答案】 $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$ ##(2.5, 3)

【解析】

【分析】 设 $A'B$ 与 x 轴的交点为 D ，根据题意由旋转的性质易求得点 D 的坐标，然后根据待定系数法即可求得直线 $A'B$ 的解析式，再与反比例函数解析式联立，解方程组即可求得 A' 的坐标.

【详解】 由题意可知 $OC = \frac{3}{2}$.

如图，设 $A'B$ 与 x 轴的交点为 D ，

由旋转的性质可知 $\angle CBO = \angle DBO$ ，

又 $\because BO = BO$ ， $\angle COB = \angle DOB = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle COB \cong \triangle DOB(ASA)$ ，

$$\therefore OD = CO = \frac{3}{2},$$

$$\therefore D\left(\frac{3}{2}, 0\right).$$

$$\therefore B\left(0, -\frac{9}{2}\right),$$

$\therefore$ 可设直线 $A'B$ 的解析式为 $y = kx - \frac{9}{2} (k \neq 0)$ ，

把 $D\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 代入得： $0 = \frac{3}{2}k - \frac{9}{2}$ ，

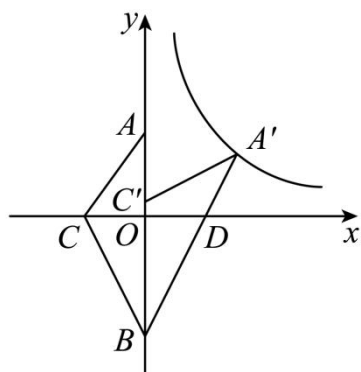
解得 $k = 3$ ，

$\therefore$ 直线 $A'B$ 的解析式为 $y = 3x - \frac{9}{2}$ ，

$$\text{联立} \begin{cases} y = 3x - \frac{9}{2} \\ y = \frac{15}{2x} \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{15}{2} \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = 3 \end{cases},$$

$\therefore$ 点 A' 的坐标是 $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$.

故答案为： $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$.



【点睛】本题考查了旋转的性质，三角形全等的判定和性质，利用待定系数法求一次函数的解析式，反比例函数与一次函数的交点问题，利用旋转的性质证明出 $\triangle COB \cong \triangle DOB$ ，进而求出直线 $A'B$ 的解析式是解题关键。

二. 选择题 (本大题共 5 题, 每题 3 分, 满分 15 分)

16. 下列说法正确的是 ()

A. $x^3 - 3x = 0$ 是二项方程

B. $x^2 + \sqrt{2}x - 3 = 0$ 是无理方程

C. $2x^2 + y = 3$ 是二元二次方程

D. $\frac{x^2 - x}{3} = 2$ 是分式方程

【答案】C

【解析】

【分析】根据方程的定义，无理方程的定义，二元二次方程的定义，分式方程的定义逐个判断即可。

【详解】解：A、方程含有两个未知数项，没有非零常数项，不是二项方程，故本选项不符合题意；

B、根号内没有未知数，不是无理方程，故本选项不符合题意；

C、方程是二元二次方程，故本选项符合题意；

D、分母中没有未知数，不是分式方程，故本选项不符合题意；

故选：C。

【点睛】本题考查了方程、无理方程、二元二次方程、分式方程的定义等知识点，注意：根号内含有未知数的方程，叫无理方程，分母中含有未知数的方程，叫分式方程。

17. 已知一次函数 $y = -3x + 2$ ，那么下列结论正确的是 ()

A. 图像必经过点 $P(-3, 2)$

B. 图像经过第一、二、三象限

C. 当 $x > \frac{2}{3}$ 时， $y < 0$

D. y 的值随 x 的值增大而增大

【答案】C

【解析】

【分析】根据一次函数的图像上点的特征对选项 A 进行判断；根据一次函数的性质对选项 B、D 进行判断；利用 $x > \frac{2}{3}$ 时，函数图像的特征对选项 C 进行判断；即可得出答案.

【详解】解：A、当 $x = -3$ 时， $y = -3 \times (-3) + 2 = 11$ ，则点 $P(-3, 2)$ 不在函数图像上，故此选项不符合题意；

B、 $\because k = -3 < 0, b = 4 > 0$,

$\therefore$ 此函数的图像经过第一、二、四象限，故此选项不符合题意；

C、 $\because$ 函数与 x 轴的交点横坐标是 $\frac{2}{3}$ ，函数函数值 y 随 x 的增大而减小，

$\therefore$ 交点的右边 $y < 0$ ，

即：当 $x > \frac{2}{3}$ 时， $y < 0$ ，故此选项符合题意；

D、 $\because k = -3 < 0$,

$\therefore y$ 随 x 的增大而减小，故此选项不符合题意；

故选：C.

【点睛】此题考查了一次函数的图像与性质，熟练掌握一次函数的图像与性质、学会用数形结合的思想方法是解此题的关键.

18. 下列四个方程中，有一个根是 $x = 2$ 的方程是 ()

A. $\frac{2}{x-2} + \frac{x}{2-x} = 0$

B. $\frac{x-2}{2} + \frac{2-x}{x} = 0$

C. $\sqrt{x-6} = 2$

D. $\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x-3} = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】将 $x = 2$ 代入四个方程进行检验即可.

【详解】A、由分式方程的分母不能为 0 可得 $x \neq 2$ ，则 $x = 2$ 不是原分式方程的根，此项不符合题意

B、将 $x = 2$ 代入得： $\frac{2-2}{2} + \frac{2-2}{2} = 0$ ，经检验， $x = 2$ 是原方程的根，此项符合题意

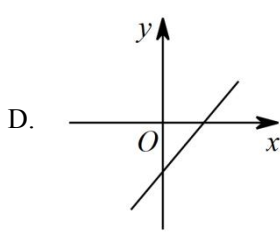
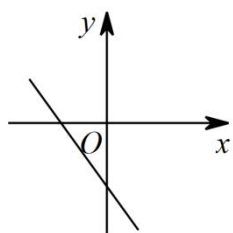
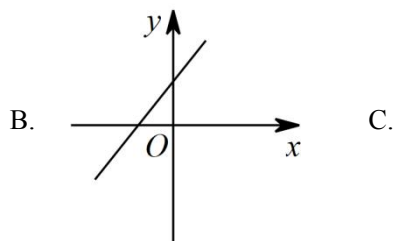
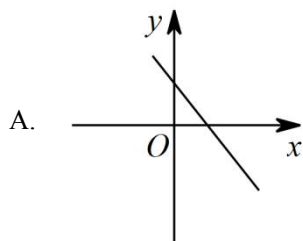
C、当 $x = 2$ 时， $x - 6 = 2 - 6 = -4 < 0$ 无意义，则 $x = 2$ 不是原方程的根，此项不符合题意

D、当 $x = 2$ 时， $x - 3 = 2 - 3 = -1 < 0$ 无意义，则 $x = 2$ 不是原方程的根，此项不符合题意

故选：B.

【点睛】本题考查了分式方程与无理方程的根的定义，掌握方程的根的定义是解题关键.

19. 已知直线 $y = kx + b$ 经过一、二、四象限，则直线 $y = bx - k$ 的图象只能是 ()



【答案】B

【解析】

【分析】根据直线 $y = kx + b$ 经过一、二、四象限，可得 $k < 0$ ， $b > 0$ ，从而得到 $-k > 0$ ，即可求解.

【详解】解：∵ 直线 $y = kx + b$ 经过一、二、四象限，

∴ $k < 0$ ， $b > 0$ ，

∴ $-k > 0$ ，

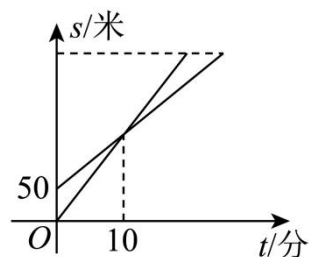
∴ 直线 $y = bx - k$ 的图象经过一、二、三象限，

∴ 选项 B 中图象符合题意.

故选：B.

【点睛】本题考查了一次函数图象与系数的关系，牢记“ $k < 0$ ， $b > 0 \Leftrightarrow y = kx + b$ 的图象在一、二、四象限”是解题的关键. 由直线经过的象限结合四个选项中的图象，即可得出结论.

20. 一天，小军和爸爸去登山，已知山脚到山顶的路程为 300 米. 小军先走了一段路程，爸爸才开始出发. 图中两条线段分别表示小军和爸爸离开山脚登山的路程 S (米) 与登山所用的时间 t (分) 的关系 (从爸爸开始登山时计时). 根据图象，下列说法错误的是 ()



A. 爸爸登山时，小军已走了 50 米

B. 爸爸走了 5 分钟，小军仍在爸爸的前面

C. 小军比爸爸晚到山顶

D. 爸爸前 10 分钟登山的速度比小军慢, 10 分钟后登山的速度比小军快

【答案】D

【解析】

【分析】根据函数图象和爸爸登山的速度比小明快进行判断.

【详解】由图象可知, 小明和爸爸离开山脚登山的路程 S (米) 与登山所用时间 t (分钟) 的关系都是一次函数关系, 因而速度不变.

可知: 爸爸前 10 分钟前在小军的后面, 10 分钟后小军在爸爸的后面.

故选: D.

【点睛】此题主要考查了函数的图象, 关键是要正确理解函数图象横纵坐标表示的意义, 理解解决问题的过程, 能够通过图象得到函数是随自变量的增大, 知道函数值是增大还是减小.

三. 解方程 (本大题共 4 题, 每题 5 分, 满分 20 分)

21. $\frac{a(x-1)}{2} = x+1$

【答案】当 $a \neq 2$ 时, 有唯一解 $x = \frac{a+2}{a-2}$; 当 $a = 2$ 时, 无解

【解析】

【分析】根据解一元一次方程的步骤化简到 $(a-2)x = a+2$, 对 $a-2$ 是否等于零进行分类讨论, 即可求解.

【详解】解: 去分母, 得: $a(x-1) = 2x+2$,

去括号, 得: $ax - a = 2x + 2$,

移项, 得: $ax - 2x = a + 2$,

合并同类项, 得: $(a-2)x = a+2$,

当 $a \neq 2$ 时, 有唯一解 $x = \frac{a+2}{a-2}$;

当 $a = 2$ 时, $0 = 4$ 不成立,

$\therefore$ 无解.

故当 $a \neq 2$ 时, 有唯一解 $x = \frac{a+2}{a-2}$; 当 $a = 2$ 时, 无解.

【点睛】本题考查了含有参数的一元一次方程的解法, 对含有参数未知数系数进行分类讨论是解题的关键.

22. 解方程, $\frac{x-2}{x} - \frac{3x}{x-2} - 2 = 0$

【答案】 $x_1 = 1$, $x_2 = -1$

【解析】

【分析】根据解分式方程的步骤解方程即可.

【详解】解: $\frac{x-2}{x} - \frac{3x}{x-2} - 2 = 0$,

两边乘以 $x(x-2)$, 得出: $(x-2)^2 - 3x^2 - 2x(x-2) = 0$,

整理得: $x^2 - 1 = 0$,

解得: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$,

经检验: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ 是分式方程的解,

$\therefore x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

【点睛】本题考查解分式方程, 正确计算是解题的关键.

23. $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-3} - 7 = 0$

【答案】 $x = 12$

【解析】

【分析】将原方程变形为 $\sqrt{x+4} = 7 - \sqrt{x-3}$, 两边平方并整理得: $\sqrt{x-3} = 3$, 再两边平方即可解出 x , 最后检验即可.

【详解】解: $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-3} - 7 = 0$,

$\sqrt{x+4} = 7 - \sqrt{x-3}$,

方程两边平方, 得: $x+4 = 49 - 14\sqrt{x-3} + x-3$

整理, 得: $\sqrt{x-3} = 3$,

方程两边再次平方, 得: $x-3 = 9$,

解得: $x = 12$.

经检验 $x = 12$ 是原方程的解,

$\therefore$ 原无理方程的解为 $x = 12$.

【点睛】本题考查解无理方程. 掌握解无理方程的方法是解题关键.

24. 解方程组:
$$\begin{cases} x+2y=8 \\ x^2+5xy-6y^2=0 \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x_1=12 \\ y_1=-2 \end{cases}, \begin{cases} x_2=\frac{8}{3} \\ y_2=\frac{8}{3} \end{cases}$$

【解析】

【分析】先将第 2 个方程变形为 $x+6y=0$, $x-y=0$, 从而得到两个二元一次方程组, 再分

别求解即可.

【详解】解:
$$\begin{cases} x+2y=8 \textcircled{1} \\ x^2+5xy-6y^2=0 \textcircled{2} \end{cases},$$

由②得: $x+6y=0$, $x-y=0$,

原方程组可化为
$$\begin{cases} x+2y=8 \\ x+6y=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+2y=8 \\ x-y=0 \end{cases},$$

故原方程组的解为
$$\begin{cases} x_1=12 \\ y_1=-2 \end{cases}, \begin{cases} x_2=\frac{8}{3} \\ y_2=\frac{8}{3} \end{cases}.$$

【点睛】本题考查的是高次方程, 关键是通过分解, 把高次方程降次, 得到二元一次方程组, 用到的知识点是因式分解、加减法.

四. 解答题 (本大题共 4 题, 满分 35 分)

25. 已知关于 x 的分式方程
$$\frac{4}{x+1} + \frac{3}{x-1} = \frac{k}{x^2-1}.$$

(1) 若方程有增根, 求 k 的值.

(2) 若方程的解为负数, 求 k 的取值范围.

【答案】(1) k 的值为 6 或 -8

(2) $k < -1$, 且 $k \neq -8$

【解析】

【分析】(1) 分式方程去分母转化为整式方程, 根据分式方程有增根, 得到最简公分母为 0, 代入整式方程计算即可求出 k 的值.

(2) 分式方程去分母转化为整式方程, 求出整式方程的解得到 x , 根据解为负数求出 k 的范围即可;

【小问 1 详解】

分式方程去分母得: $4(x-1) + 3(x+1) = k$,

由这个方程有增根, 得到 $x=1$ 或 $x=-1$,

将 $x=1$ 代入整式方程得: $k=6$,

将 $x=-1$ 代入整式方程得: $k=-8$,

则 k 的值为 6 或 -8.

【小问 2 详解】

分式方程去分母得: $4(x-1) + 3(x+1) = k$,

去括号合并得: $7x-1=k$, 即 $x = \frac{k+1}{7}$,

根据题意得: $\frac{k+1}{7} < 0$, 且 $\frac{k+1}{7} \neq 1$ 且 $\frac{k+1}{7} \neq -1$,

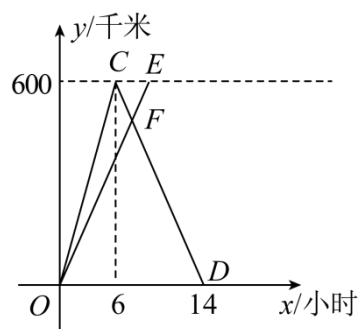
解得: $k < -1$, 且 $k \neq -8$.

【点睛】本题考查分式方程的解得情况, 解分式方程的基本方法是一化二解三检验, 分式方程的增根是使最简公分母为 0 的未知数的值.

26. A, B 两城相距 600 千米, 甲、乙两车同时从 A 城出发驶向 B 城, 甲车到达 B 城后立即返回. 如图是它们离 A 城的距离 y (千米) 与行驶时间 x (小时) 之间的函数图象.

(1) 求甲车行驶过程中 y 与 x 之间的函数解析式, 并写出自变量 x 的取值范围;

(2) 当它们行驶 7 小时时, 两车相遇, 求乙车速度.



【答案】(1) $y = \begin{cases} 100x & (0 < x \leq 6) \\ -75x + 1050 & (6 < x \leq 14) \end{cases}$

(2) 75 (千米/小时)

【解析】

【分析】(1) 先根据图象和题意知道, 甲是分段函数, 所以分别设 $0 < x \leq 6$ 时, $y = k_1x$; $6 < x \leq 14$ 时, $y = kx + b$, 根据图象上的点的坐标, 利用待定系数法可求解.

(2) 注意相遇时是在 6-14 小时之间, 求交点时应该套用甲中的函数关系式为 $y = -75x + 1050$, 直接把 $x = 7$ 代入即可求相遇时 y 的值, 再求速度即可.

【详解】(1)①当 $0 < x \leq 6$ 时, 设 $y = k_1x$

把点 $(6, 600)$ 代入得

$$k_1 = 100$$

所以 $y = 100x$;

②当 $6 < x \leq 14$ 时, 设 $y = kx + b$

$\because$ 图象过 $(6, 600), (14, 0)$ 两点

$$\therefore \begin{cases} 6k + b = 600 \\ 14k + b = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -75 \\ b = 1050 \end{cases}$$

$$\therefore y = -75x + 1050$$

$$\therefore y = \begin{cases} 100x & (0 < x \leq 6) \\ -75x + 1050 & (6 < x \leq 14) \end{cases}$$

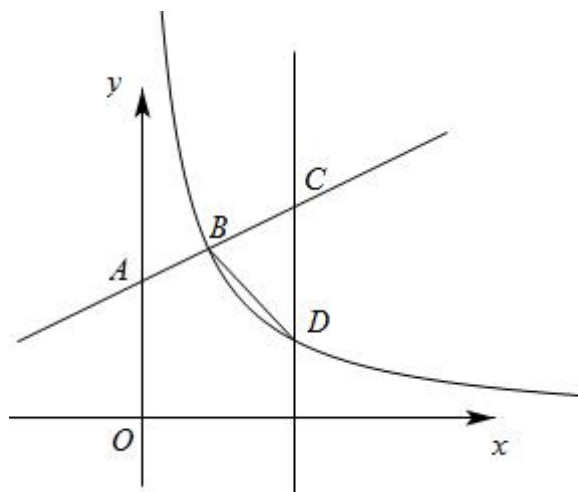
(2) 当 $x=7$ 时, $y = -75 \times 7 + 1050 = 525$,

$$V_{\text{乙}} = \frac{525}{7} = 75 \text{ (千米/小时)}.$$

27. 已知: 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 一次函数 $y = \frac{1}{2}x + 4$ 的图像与 y 轴交于点 A ,

与反比例函数 $y = \frac{m}{x} (x > 0)$ 的图像交于点 $B(a, 5)$. 点 C 为函数 $y = \frac{1}{2}x + 4$ 的图像上一点,

过点 C 作 $CD \parallel y$ 轴, 交反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图像于点 D .



(1) 求反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的解析式;

(2) 如果 $BC = AB$, 求点 C 的坐标;

(3) 如果 $BC = BD$, 求点 D 的坐标.

【答案】 (1) $y = \frac{10}{x}$

(2) $C(4, 6)$ (3) $D(10, 1)$.

【解析】

【分析】 (1) 由一次函数的解析式求得 B 的坐标, 然后根据待定系数法即可求得反比例函数的解析式;

(2) 求得 A 的坐标, 然后根据中点公式即可求得点 C 的坐标;

(3) 根据等腰三角形的性质, 则 CD 的中点的纵坐标为点 B 的纵坐标, 据此列分式方程求得即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 一次函数 $y = \frac{1}{2}x + 4$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{m}{x} (x > 0)$ 的图像交于点 $B (a, 5)$,

$$\therefore 5 = \frac{1}{2}a + 4,$$

$$\therefore a = 2,$$

$$\therefore \text{点 } B (2, 5),$$

$$\therefore m = 2 \times 5 = 10,$$

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为 } y = \frac{10}{x};$$

【小问 2 详解】

$\because$ 一次函数 $y = \frac{1}{2}x + 4$ 的图像与 y 轴交于点 A ,

令 $x = 0$, 则 $y = 4$,

$$\therefore A (0, 4),$$

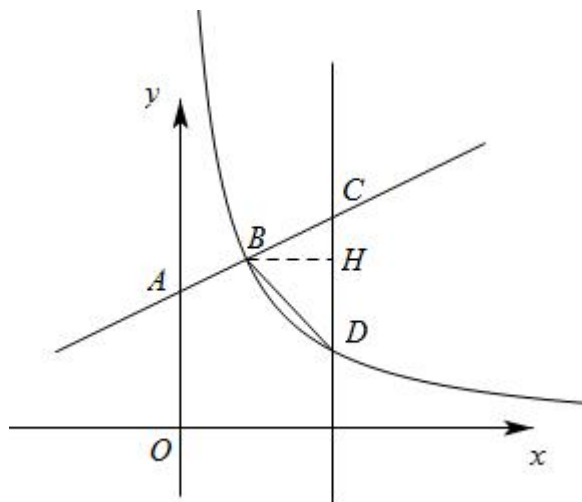
$$\because \text{点 } B (2, 5), BC = AB,$$

$$\therefore C (4, 6);$$

【小问 3 详解】

设 C 为 $(c, \frac{1}{2}c + 4)$, 则 D 为 $(c, \frac{10}{c})$,

如图, 过 B 作 $BH \perp CD$ 于 H ,



$$\because B (2, 5), BC = BD,$$

$$\therefore CH = DH, BH \parallel x \text{ 轴},$$

$$\therefore CD \text{ 的中点 } H \text{ 的坐标为 } (c, 5),$$

$$\therefore \frac{1}{2}c + 4 + \frac{10}{c} = 5,$$

$$\text{整理得: } c^2 - 12c + 20 = 0,$$

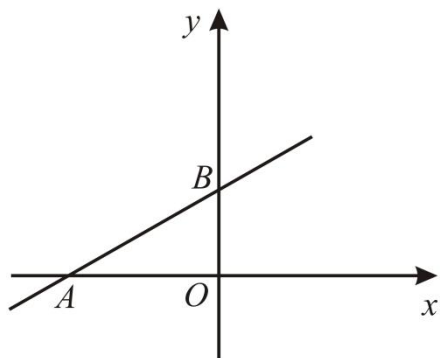
$$\text{解得 } c_1 = 2, c_2 = 10,$$

经检验: 它们都是原方程的根, 但是 $c_1 = 2$ 不符合题意, 舍去,

$$\therefore D(10, 1).$$

【点睛】本题是反比例函数与一次函数的交点问题, 考查了一次函数图象上点的坐标特征, 待定系数法求反比例函数的解析式, 反比例函数图象上点的坐标特征, 等腰三角形的性质, 分式方程的解法, 求出反比例函数的解析式是解题的关键.

28. 如图, 直线 $y = kx + b$ 与 x 轴, y 轴分别交于点 A, B , 点 A 坐标为 $(-3, 0)$, $\angle OAB = 30^\circ$, 将 x 轴所在的直线沿直线 AB 翻折交 y 轴于点 C , 点 F 是直线 AB 上一动点.



- (1) 求直线 AB 的解析式;
- (2) 若 $CF \perp AB$, 求 OF 的长;
- (3) 若 $\triangle AOF$ 是等腰三角形, 写出点 F 的坐标.

【答案】(1) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$

(2) 3 (3) $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 或 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 或 $\left(-3 + \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 或 $\left(-3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

【解析】

【分析】(1) 先求出 B 点的坐标, 将 A 和 B 的坐标代入即可求出 AB 的解析式;

(2) 先求出 BC 的长, 再通过 $\angle CBF = 60^\circ$, 可求出 OF 的长;

(3) 当 AO , OF , AF 分别为等腰三角形的底边的时候进行分类讨论.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 点 A 坐标为 $(-3, 0)$, $\angle OAB = 30^\circ$, $AO \perp BO$,

$$\therefore OA = 3, AB = 2OB,$$

设 $OB = x$ ，则 $AB = 2x$ ，

在 $\triangle ABO$ 中， $AB^2 = BO^2 + AO^2$ ，

$$\therefore (2x)^2 = x^2 + 3^2,$$

解得 $x = \sqrt{3}$ ，

$$\therefore B(0, \sqrt{3}),$$

设 AB 的解析式： $y = kx + b$ ，

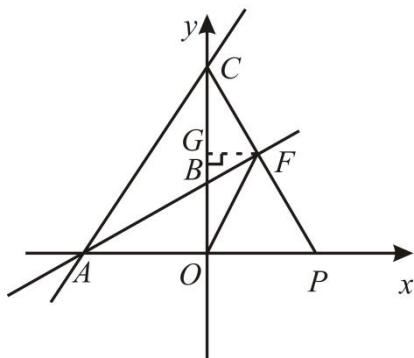
将 $A(-3, 0)$ 和 $B(0, \sqrt{3})$ 分别代入，得

$$\begin{cases} 0 = -3k + b \\ \sqrt{3} = b \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ b = \sqrt{3} \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AB 的解析式： $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$ 。

【小问 2 详解】

解：如图，过点 F 作 $FG \perp y$ 轴于点 G ，延长 CF 交 x 轴于 P 点，



$\therefore$ 直线 AO 沿直线 AB 翻折交 y 轴于点 C ，

$\therefore \angle AFC = \angle AFP = 90^\circ$ ， $\angle OAB = \angle CAB = 30^\circ$ ， $\angle CAO = 60^\circ$ ，

在 $\triangle AOC$ 中， $\angle ACO = 90^\circ - \angle CAO = 30^\circ$ ，

$\therefore AC = 2AO = 6$ ， $\angle ABO = 60^\circ = \angle CBF$ （对顶角相等），

同理（1）可得 $OC = \sqrt{AC^2 - AO^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$ ，

$\therefore BC = OC - OB = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 在 $\triangle CBF$ 中， $\angle CBF = 60^\circ$ ，则 $\angle BCF = 30^\circ$ ， $BF = \frac{1}{2}CB = \sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 在 $\triangle GBF$ 中， $\angle CBF = 60^\circ$ ，则 $\angle BFG = 30^\circ$ ， $BG = \frac{1}{2}BF = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，

同理 (1) 可得, $FG = \sqrt{FB^2 - BG^2} = \sqrt{3 - \frac{3}{4}} = \frac{3}{2}$,

$\therefore F$ 点的横坐标为 $\frac{3}{2}$,

$\because F$ 在直线 AB 上,

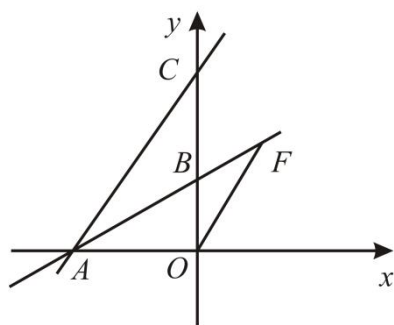
$\therefore$ 把 $x = \frac{3}{2}$ 代入 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$ 中, F 点的纵坐标为 $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{2} + \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore F\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$,

$\therefore OF = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{27}{4}} = 3$.

【小问 3 详解】

解: ①如图, 当 $AO = OF$:



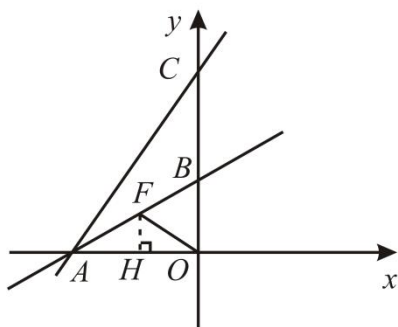
在 (2) 的情况下, $OF = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 3$

$\therefore$ 此时 $AO = OF = 3$,

$\therefore$ 在 (2) 的点 F , 点 A , 点 O 组成的三角形为等腰三角形,

$\therefore$ 当 $OA = FO$ 时, $F\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

②如图, 当 $FA = FO$ 时:



过点 F 作 $FH \perp OA$ 于点 H ,

$$\text{则 } HA = HO = \frac{1}{2}AO = \frac{3}{2},$$

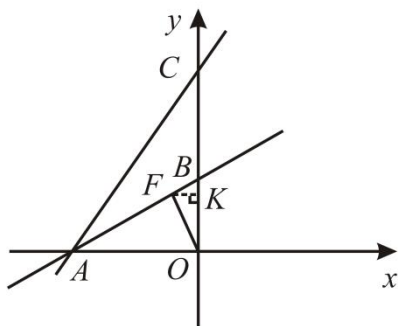
$$\because \angle BAO = 30^\circ, \quad FA = FO,$$

$$\therefore \angle FOA = \angle FAO = 30^\circ,$$

$$\text{同理可得, } FH = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \text{此时 } F\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

③如图, 当 $FA = AO$ 时:



过点 F 作 $FK \perp OB$ 于点 K ,

可得, $\triangle FBK$ 中, $\angle FKB = 90^\circ$, $\angle FBK = 60^\circ$,

$$\because AF = AO = 3, \quad AB = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore FB = AB - AF = 2\sqrt{3} - 3,$$

$$\therefore BK = \frac{1}{2}BF = \sqrt{3} - \frac{3}{2},$$

$$\text{同理可得, } FK = 3 - \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore F \text{ 点的横坐标为 } -3 + \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad OK = BO - BK = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{此时 } F\left(-3+\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right),$$

$$\text{点 } F \text{ 在点 } A \text{ 左侧, } x \text{ 轴下方时, 点 } F \text{ 的坐标为 } \left(-3-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right),$$

$$\text{综上所述: 满足条件的点 } F \text{ 的坐标为 } \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ 或 } \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ 或 } \left(-3+\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right) \text{ 或}$$

$$\left(-3-\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right).$$

【点睛】 本题主要考查了图形的折叠、含 30° 角的直角三角形和等腰三角形, 第三问的重难点在于分类讨论, 属于中等题.