

八年级数学第二学期3月份练习卷

时间：90分钟 满分：100分

一、选择题（每题3分，共18分）

1. 下列函数是一次函数的是（ ）

- A. $y = kx + b$ B. $y = 2x + 3$ C. $y = \frac{1}{2x-1}$ D. $y = -\frac{1}{2}x^2 - x$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了一次函数的定义，形如 $y = kx + b$ (k, b 为常数, $k \neq 0$)，根据一次函数的定义，即可判断.

【详解】解：A、 $y = kx + b$ ，当 $k = 0$ 时，不是一次函数，故不符合题意；

B、 $y = 2x + 3$ 是一次函数，故符合题意；

C、 $y = \frac{1}{2x-1}$ 不是一次函数，故不符合题意；

D、 $y = -\frac{1}{2}x^2 - x$ 不是一次函数，故不符合题意；

故选：B.

2. 要得到直线 $y = -2x - 4$ 的图像，可把直线 $y = -2x$ （ ）

- A. 向下平移4个单位 B. 向上平移4个单位
C. 向左平移4个单位 D. 向右平移4个单位

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查一次函数的图像平移变换，解题的关键是根据“左加右减、上加下减”的函数图像平移规律解答即可.

【详解】解：将直线 $y = -2x$ 的图像向下平移4个单位即可得到直线 $y = -2x - 4$ 的图像.

故选：A.

3. 下列说法正确的是（ ）

- A. $\frac{x^2-1}{2} + \frac{x}{3} = 1$ 分式方程 B. $x^2 + 3y = 1$ 是二元二次方程
C. $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$ 是无理方程 D. $x^2 + x = 0$ 是二项方程

【答案】B

【解析】

【分析】根据一元二次方程的定义对 A、B、C 进行判断；根据二元二次方程的定义对 B 进行判断，

【详解】A、 $\frac{x^2-1}{2}+\frac{x}{3}=1$ 为一元二次方程，所以 A 选项的说法错误；

B、 $x^2+3y=1$ 为二元二次方程，所以 B 选项的说法正确；

C、 $x^2+\sqrt{2}x-1=0$ 是一元二次方程，所以 C 选项的说法错误；

D、 $x^2+x=0$ 是一元二次方程，所以 D 选项的说法错误。

故选：B。

【点睛】本题考查了无理方程，解题的关键是掌握分式方程、二元二次方程及无理方程的概念。

4. 下列方程有实数根的是 ()

A. $3x^2+1=0$ B. $\sqrt{x^2+1}=0$ C. $\frac{2}{x-1}=1$ D. $x^2+3x+3=0$

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查判断方程的根的情况，对于选项 A，由 $x^2 \geq 0$ 知 $3x^2+1 \geq 1$ 可判断方程没有实数根；

对于选项 B，由 $x^2 \geq 0$ 知 $x^2+1 \geq 1$ 可得 $\sqrt{x^2+1} \geq 1$ ，可判断方程没有实数根；对于选项 C，求得 $x=3$ 是原方程的解，对于选项 D， $\Delta=-3<0$ ，原方程无解。

【详解】解：A、 $\because x^2 \geq 0$ ，

$$\therefore 3x^2+1 \geq 1,$$

故选项 A 不正确；

$$B. \because x^2 \geq 0,$$

$$\therefore x^2+1 \geq 1,$$

$$\therefore \sqrt{x^2+1} \geq 1,$$

故选项 B 不正确；

$$C. \text{去分母得, } x-1=2,$$

$$\text{解得, } x=3,$$

经检验， $x=3$ 是原方程的解，

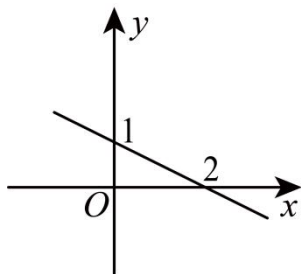
故选项 C 正确;

D. $\Delta = 3^2 - 4 \times 3 \times 1 = 9 - 12 = -3 < 0$, 原方程没有实数根.

所以 D 选项错误.

故选: C.

5. 如图, 直线 $y = kx + b$ 的图象如图所示, 则关于 x 的不等式 $kx + b \geq 0$ 的解集是 ()



A. $x \leq 1$

B. $x \geq 1$

C. $x \geq 2$

D. $x \leq 2$

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据函数图象, 找出图象在 x 轴上方的部分的 x 的取值范围即可得解.

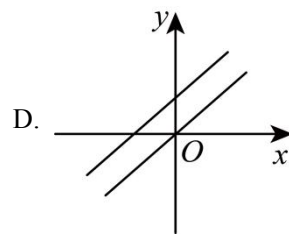
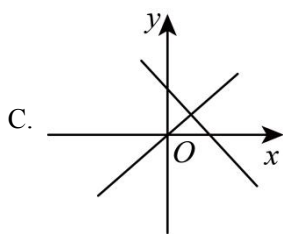
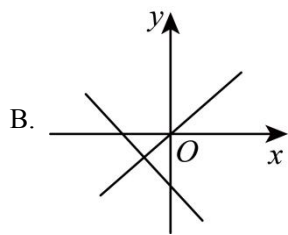
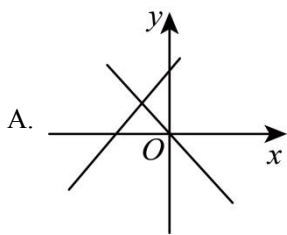
【详解】 解: 使不等式 $kx + b \geq 0$ 成立即直线 $y = kx + b$ 的图象在 x 轴上方,

由图可知, 当 $x \leq 2$ 时, $kx + b \geq 0$.

故选: D.

【点睛】 本题考查了一次函数与一元一次不等式, 能够准确识图, 找出符合不等式的图象的部分是解答本题的关键.

6. 函数 $y = x + k$ 和 $y = kx$ 在同一坐标系中的大致图象是 ()



【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数、正比例函数的图象, 根据正比例函数图象所在的象限判定 k 的符号, 根据 k 的符号来判定一次函数图象所经过的象限.

【详解】 解: A、正比例函数图象经过第二、四象限, 则 $k < 0$. 则一次函数 $y = x + k$ 的图象应该经过第一、三、四象限. 故本选项错误;

B、正比例函数图象经过第一、三象限，则 $k > 0$. 则一次函数 $y = x + k$ 的图象应该经过第一、二、三象限. 故本选项错误;

C、正比例函数图象经过第一、三象限，则 $k > 0$. 则一次函数 $y = x + k$ 的图象应该经过第一、二、三象限. 故本选项错误;

D、正比例函数图象经过第一、三象限，则 $k > 0$. 则一次函数 $y = x + k$ 的图象应该经过第一、二、三象限. 故本选项正确;

故选: D.

二、填空题 (每题 2 分, 共 24 分)

7. 直线 $y = 2x + 3$ 的截距是_____.

【答案】 3 或 $-\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 根据一次函数 $y = kx + b$ 的图象, 与 x 轴的交点的横坐标叫做横截距, 与 y 轴的交点的纵坐标叫做纵截距, 进行解题即可.

【详解】 解: 当 $x = 0$ 时: $y = 3$; 当 $y = 0$ 时, $0 = 2x + 3$, 解得: $x = -\frac{3}{2}$;

$\therefore$ 直线 $y = 2x + 3$ 的截距是: 3 或 $-\frac{3}{2}$;

故答案为: 3 或 $-\frac{3}{2}$.

【点睛】 本题考查直线的截距. 熟练掌握一次函数 $y = kx + b$ 的图象, 与 x 轴的交点的横坐标叫做横截距, 与 y 轴的交点的纵坐标叫做纵截距, 是解题的关键.

8. 已知一次函数 $y = 2x + 1$, 则 y 随 x 的增大而_____ (填“增大”或“减小”)

【答案】 增大

【解析】

【详解】 试题解析: $\because y = 2x + 1$,

$\therefore k = 2 > 0$,

$\therefore y$ 随 x 的增大而增大.

考点: 一次函数的性质.

9. 已知一次函数的图象与直线 $y = -x + 1$ 平行, 且截距为 3, 那么此一次函数的解析式为_____.

【答案】 $y = -x + 3$

【解析】

【分析】本题考查了两条直线相交或平行问题以及一次函数图象上点的坐标特征，根据一次函数 $y = kx + b$ 的图象与直线 $y = -x + 1$ 平行可得 $k = -1$ ，由截距为 3，知 $b = 3$ ，从而得出一次函数的解析式。

【详解】解：设一次函数的解析式为 $y = kx + b$ ，

由一次函数 $y = kx + b$ 的图象与直线 $y = -x + 1$ 平行，得 $k = -1$ ，

又截距为 3，

所以， $b = 3$ ，

∴ 此一次函数的解析式为 $y = -x + 3$ 。

故答案为： $y = -x + 3$ 。

10. 已知直线 $y = -2x + 4$ 与坐标轴分别交于 A、B 两点，那么 $\triangle AOB$ 的面积是_____。

【答案】4

【解析】

【分析】本题考查一次函数与坐标轴交点坐标特征以及三角形的面积公式，由一次函数解析式分别求出点 A 和点 B 的坐标，再根据三角形的面积公式即可作答。掌握确定一次函数与坐标轴交点坐标的方法是解题的关键。

【详解】解：如图，

∵ 直线 $y = -2x + 4$ 与坐标轴分别交于 A、B 两点，

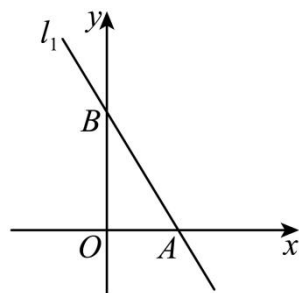
当 $x = 0$ 时， $y = 4$ ；当 $y = 0$ 时， $x = 2$ ，

∴ $A(-2, 0)$ ， $B(0, 4)$ ，

∴ $OA = 2$ ， $OB = 4$ ，

∴ $\triangle AOB$ 的面积是： $\frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$ 。

故答案为：4。



11. 方程 $\sqrt{x} = -x$ 的解是_____。

【答案】 $x = 0$

【解析】

【分析】 两边同时平方，然后解方程即可.

【详解】 解： 两边平方得： $x = x^2$ ，

解方程得： $x_1 = 0$ ， $x_2 = 1$ ，

检验： 当 $x_1 = 0$ 时， 方程的左边 = 右边 = 0，

$\therefore x = 0$ 为原方程的根

当 $x_2 = 1$ 时， 原方程无意义， 故舍去.

故答案为： $x = 0$.

【点睛】 本题主要考查二次根式有意义的条件及一元二次方程的解法，熟练掌握各个运算是解题的关键.

12. 方程 $\frac{x+1}{x} = -1$ 的根是_____.

【答案】 $x = -\frac{1}{2}$ ## $x = -0.5$

【解析】

【分析】 本题主要考查解分式方程，先去分母，将分式方程转化为整式方程，求出整式方程的解，再进行检验即可得出原方程的根.

【详解】 解： $\frac{x+1}{x} = -1$ ，

去分母得， $x+1 = -x$ ，

解得， $x = -\frac{1}{2}$ ，

经检验， $x = -\frac{1}{2}$ 是原方程的根，

即原方程的根为 $x = -\frac{1}{2}$.

13. 方程 $x^5 - 32 = 0$ 的根是_____.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 本题主要考查高次方程，由 $2^5 = 32$ 可得 $x = 2$ ，即可得出答案.

【详解】 解： $\because x^5 - 32 = 0$ ，

$\therefore x^5 = 32$ ，

解得： $x = 2$ ，

故答案为: $x=2$.

14. 如果方程 $1+\sqrt{3x+2}=k$ 无实数根, 那么 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k < 1$

【解析】

【分析】 本题考查算术平方根的非负性, 解题的关键是先把方程变形为 $\sqrt{3x+2}=k-1$, 利用算术平方根的非负数的性质得到 $k-1 < 0$, 然后解关于 k 的不等式即可.

【详解】 解: $\because 1+\sqrt{3x+2}=k$,

$$\therefore \sqrt{3x+2}=k-1,$$

又 $\because$ 方程 $1+\sqrt{3x+2}=k$ 无实数根, 且 $\sqrt{3x+2} \geq 0$,

$$\therefore k-1 < 0,$$

$$\therefore k < 1,$$

$$\therefore k \text{ 的取值范围是 } k < 1.$$

故答案为: $k < 1$.

15. 用换元法解分式方程 $\frac{x-1}{x} - \frac{3x}{x-1} + 1 = 0$ 时, 如果设 $\frac{x-1}{x} = y$, 将原方程化为关于 y 的整式方程, 那么这个整式方程是_____.

【答案】 $y^2 + y - 3 = 0$

【解析】

【分析】 利用换元法令 $\frac{x-1}{x} = y$ 得 $y - \frac{3}{y} + 1 = 0$, 再两边同乘以 y 即可得出答案.

【详解】 设 $\frac{x-1}{x} = y$, 则 $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{y}$

原分式方程可化为 $y - \frac{3}{y} + 1 = 0$

两边同乘以 y 得: $y^2 + y - 3 = 0$

故答案为: $y^2 + y - 3 = 0$.

【点睛】 本题考查了利用换元法解分式方程, 掌握理解换元法是解题关键.

16. $\frac{x}{x-1} + \frac{k}{x-1} - \frac{x}{x+1} = 0$ 有增根 $x=1$, 则 k 的值为_____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】增根是指方程求解后得到的不满足题设条件的根，此题中， $x=1$ 为方程增根，说明 $x=1$ 为原方程的一个根，但不满足原方程的解。

【详解】由 $\frac{x}{x-1} + \frac{k}{x-1} - \frac{x}{x+1} = 0$
得 $\frac{x+k}{x-1} - \frac{x}{x+1} = 0$ ，即 $\frac{x+k}{x-1} = \frac{x}{x+1}$ ， $(x-1)x = (x+k)(x+1)$
得到 $x^2 - x = x^2 + x + kx + k$ ，即 $k = \frac{-2x}{x+1}$

当 $x=1$ 时原方程无意义，但它必须满足是原方程得解。

因此当 $x=1$ 时，带入即得

此时 $k=-1$ 。

故 k 的值为 -1。

【点睛】本题考查分式方程增根的情况，了解增根的定义及学会解此类型题目是本题的关键。

17. 一次函数 $y = (2m - 10)x + 2m - 8$ 不经过第三象限，则 m 的取值范围是_____。

【答案】 $4 \leq m < 5$

【解析】

【分析】由一次函数 $y = kx + b$ 的图象不经过第三象限，则图象经过第一、二、四象限或二、四象限，那么 $k < 0$ ， $b \geq 0$ ，由此即可确定题目 m 的取值范围。

【详解】解：∵ 函数 $y = (2m - 10)x + 2m - 8$ 的图象不经过第三象限，

∴ 函数 $y = (2m - 10)x + 2m - 8$ 的图象经过第一、二、四象限或二、四象限，

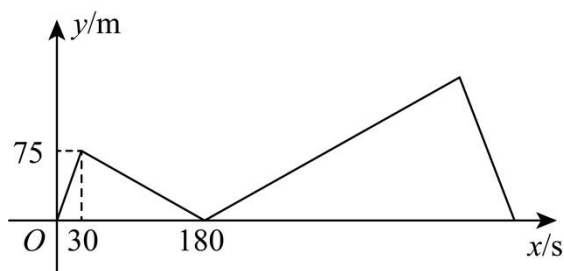
∴ $2m - 10 < 0$ 且 $2m - 8 \geq 0$ ，

解得 $4 \leq m < 5$ 。

故答案为： $4 \leq m < 5$ 。

【点睛】本题考查了一次函数图象在坐标平面内的位置与 k 、 b 的关系，解题的关键是注意理解：直线 $y = kx + b$ 所在的位置与 k 、 b 的符号有直接的关系。 $k > 0$ 时，直线必经过一、三象限； $k < 0$ 时，直线必经过二、四象限； $b > 0$ 时，直线与 y 轴正半轴相交； $b = 0$ 时，直线过原点； $b < 0$ 时，直线与 y 轴负半轴相交。

18. 甲、乙两人在直线道路上同起点、同终点、同方向，分别以不同的速度匀速跑步 1500 米，先到终点的人原地休息，已知甲先出发 30 秒后，乙才出发，在跑步的整个过程中，甲、乙两人的距离 y (米) 与甲出发的时间 x (秒) 之间的关系如图所示，则乙到终点时，甲距终点的距离是_____米。



【答案】 175

【解析】

【详解】解：根据题意得，甲的速度为： $75 \div 30 = 2.5$ 米/秒，

设乙的速度为 m 米/秒，则 $(m-2.5) \times (180-30) = 75$ ，

解得： $m=3$ 米/秒，

则乙的速度为 3 米/秒，

乙到终点时所用的时间为： $\frac{1500}{3} = 500$ (秒)，

此时甲走的路程是： $2.5 \times (500+30) = 1325$ (米)，

甲距终点的距离是 $1500-1325=175$ (米)。

【点睛】本题考查了一次函数的应用，读懂题目信息，理解并得到乙先到达终点，然后求出甲、乙两人所用的时间是解题的关键。

三、简答题（每题 6 分，共 42 分）

19. 解方程： $a(x-1) = 2(x+1)$

【答案】 $a=2$ 时，原方程无解； $a \neq 2$ 时， $x = \frac{a+2}{a-2}$

【解析】

【分析】 本题主要考查含有字母系数的一元一次方程，将方程整理为 $(a-2)x = a+2$ ，再分 $a-2=0$, $a-2 \neq 0$ 两种情况讨论求解即可。

【详解】解： $a(x-1) = 2(x+1)$

去括号得， $ax - a = 2x + 2$ ，

移项得， $ax - 2x = a + 2$ ，

合并得， $(a-2)x = a+2$ ，

当 $a-2=0$ 时，即 $a=2$ 时，原方程无解；

当 $a-2 \neq 0$ ，即 $a \neq 2$ 时， $x = \frac{a+2}{a-2}$ 。

20. 解方程: $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1}=1$

【答案】 $x=5$ 或 $x=1$

【解析】

【分析】本题主要考查解无理方程, 方程移项后得 $\sqrt{2x-1}=1+\sqrt{x-1}$, 方程两边平方整理得 $x-1=2\sqrt{x-1}$, 再平方整理得 $x^2-6x+5=0$, 解得 $x_1=5, x_2=1$, 再进行检验即可得出方程的解

【详解】解: $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1}=1$,

移项得, $\sqrt{2x-1}=1+\sqrt{x-1}$,

两边平方得, $2x-1=x+2\sqrt{x-1}$

整理得, $x-1=2\sqrt{x-1}$,

两边平方得, $(x-1)^2=4(x-1)$,

移项得, $(x-1)^2-4(x-1)=0$,

解得, $x_1=5, x_2=1$,

检验: 当 $x=5$ 时, 左边 $=\sqrt{2\times 5-1}-\sqrt{5-1}=3-2=1$, 右边 $=1$, 左边=右边;

当 $x=1$ 时, 左边 $=\sqrt{2\times 1-1}-\sqrt{1-1}=1-0=1$, 右边 $=1$, 左边=右边;

所以, $x=5$ 或 $x=1$ 是原方程的解

21. 解方程: $\frac{6}{x^2-9}+1=\frac{1}{x-3}$.

【答案】 $x=-2$

【解析】

【分析】分式方程去分母转化为整式方程, 求出整式方程的解得到 x 的值, 经检验即可得到分式方程的解.

【详解】解: 去分母得: $6+x^2-9=x+3$,

整理得: $x^2-x-6=0$, 即 $(x-3)(x+2)=0$,

解得: $x=3$ 或 $x=-2$,

检验: 把 $x=3$ 代入得: $(x+3)(x-3)=0$,

把 $x=-2$ 代入得: $(x+3)(x-3)=-5\neq 0$,

则 $x=3$ 是增根, 分式方程的解为 $x=-2$.

【点睛】此题考查了解分式方程, 利用了转化的思想, 解分式方程注意要检验.

22. 解方程: $\frac{x}{x-1} + \frac{x-1}{x} + 2 = 0$

【答案】 $x = \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查解分式方程，解题的关键是将分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解. 本题还考查了利用完全平方公式进行因式分解.

【详解】 解：在方程两边同时乘以 $x(x-1)$ ，得：

$$x^2 + (x-1)^2 + 2x(x-1) = 0,$$

$$\therefore [x + (x-1)]^2 = 0, \text{ 即 } (2x-1)^2 = 0,$$

$$\therefore 2x-1=0,$$

$$\text{解得: } x = \frac{1}{2},$$

$$\text{检验: 当 } x = \frac{1}{2} \text{ 时, 代入 } x(x-1) \text{ 得: } \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{4} \neq 0,$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} \text{ 是原方程的解.}$$

23. 解方程组:
$$\begin{cases} \frac{10}{x+y} + \frac{3}{x-y} = -5 \\ \frac{15}{x+y} - \frac{2}{x-y} = -1 \end{cases}$$

【答案】 $\begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$

【解析】

【分析】 本题考查解二元一次方程组、分式方程. 设 $\frac{1}{x+y} = a$, $\frac{1}{x-y} = b$, 将原方程组化为关于 a 、 b 二元一次方程组，求解后得到 a 、 b 的值，然后得到关于 x 、 y 的二元一次方程组，求解后再检验后即可得解，本题运用了换元法的思想. 掌握二元一次方程组、分式方程的解法是解题的关键.

【详解】 解：设 $\frac{1}{x+y} = a$, $\frac{1}{x-y} = b$,

$$\therefore \text{原方程组化为} \begin{cases} 10a + 3b = -5 \\ 15a - 2b = -1 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = -\frac{1}{5}, \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{x+y} = -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{x-y} = -1 \end{cases},$$

$$\text{去分母, 得: } \begin{cases} x+y = -5 \\ x-y = -1 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases},$$

$$\text{检验: 当 } \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases} \text{ 时, } x+y = -5 \neq 0 \text{ 且 } x-y = -1 \neq 0,$$

$$\therefore \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases} \text{ 是原方程组的解.}$$

$$24. \text{ 解方程组: } \begin{cases} x^2 - 9y^2 = 0 & \text{①} \\ x^2 - 2xy + y^2 = 4 & \text{②} \end{cases}$$

$$\text{【答案】} \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$$

【解析】

【分析】首先把①、②分别进行因式分解, 可分别得到两个二元一次方程, 即可得到四个二元一次方程组, 解方程组, 即可分别求解.

【详解】解: 方程①可变形为 $(x+3y)(x-3y) = 0$.

得 $x+3y=0$ 或 $x-3y=0$.

方程②可变形为 $(x-y)^2 = 4$.

得 $x-y=2$ 或 $x-y=-2$.

因此, 原方程组可组成以下四个二元一次方程组:

$$\begin{cases} x+3y=0 \\ x-y=2 \end{cases}, \begin{cases} x+3y=0 \\ x-y=-2 \end{cases}, \begin{cases} x-3y=0 \\ x-y=2 \end{cases}, \begin{cases} x-3y=0 \\ x-y=-2 \end{cases}.$$

分别解这四个方程组，得原方程组的解是

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}.$$

【点睛】 本题考查了解二元二次方程组，熟练掌握和运用解二元二次方程组的方法是解决本题的关键.

25. 一次函数 $y = kx + b$ 的图象过点 $(-2, 3)$ 和点 $(1, -3)$,

(1) 求 k 与 b 的值;

(2) 判定 $(-1, 1)$ 是否在此直线上?

【答案】 (1) $\begin{cases} k = -2 \\ b = -1 \end{cases}$

(2) 点 $(-1, 1)$ 在直线 $y = -2x - 1$ 上

【解析】

【分析】 本题考查了待定系数法求一次函数解析式和一次函数图象上点的坐标特征.

(1) 先把点 $(-2, 3)$ 和点 $(1, -3)$ 代入 $y = kx + b$, 得到关于 k 、 b 的方程, 然后解方程组即可;

(2) 把 $x = -1$ 代入 (1) 中的一次函数解析式中计算出对应的函数值, 然后进行判断.

【小问 1 详解】

解: 把点 $(-2, 3)$ 和点 $(1, -3)$ 代入 $y = kx + b$, 得

$$\begin{cases} -2k + b = 3 \\ k + b = -3 \end{cases},$$

解得 $\begin{cases} k = -2 \\ b = -1 \end{cases};$

【小问 2 详解】

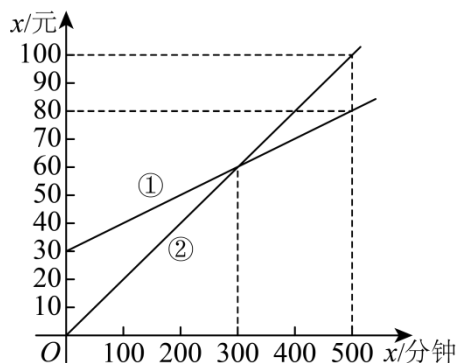
解: 由 (1) 得一次函数解析式为 $y = -2x - 1$,

当 $x = -1$ 时, $y = -2x - 1 = -2 \times (-1) - 1 = 2 - 1 = 1$,

所以点 $(-1, 1)$ 在直线 $y = -2x - 1$ 上.

四、解答题 (26 题 4 分, 27 题 6 分, 28 题 6 分, 共 16 分)

26. 某通讯公司推出①②两种收费方式供用户选择, 其中一种有月租费, 另一种没有月租费, 且两种收费方式的通话时间 x (分钟) 与收费 y (元) 之间的函数关系如图所示:



(1) 有月租费的收费方式是_____ (填①或②), 月租费是_____元;

(2) 请结合图象, 根据用户通话时间的多少, 给出经济实惠的选择建议;

(3) 当 x 值为多少时, 第②种方案比第一种方案每个月多 30 元?

【答案】 (1) ①, 30

(2) 当通话时间为 300 分钟时, 两种收费方式的收费相同; 当通话时间小于 300 分钟时, 收费方式②的收费更实惠; 当通话时间大于 300 分钟时, 收费方式①的收费更实惠;

(3) 当 $x = 600$ 分钟时, 第②种方案比第①种方案每个月多 30.

【解析】

【分析】 (1) 根据图象即可解答;

(2) 找到图象的交点, 结合图象即可解答;

即可解答; 根据函数图象中的数据, 可以分别求得①②两种方案的收费 y (元) 与通话时间 x (分钟) 之间的函数关系式; 再由题意列出方程, 解方程即可.

【小问 1 详解】

解: 有月租费的收费方式是①, 月租费是 30 元;

故答案为: ①, 30;

【小问 2 详解】

解: 由函数图象知, 当通话时间为 300 分钟时, 两种收费方式的收费相同;

当通话时间小于 300 分钟时, 收费方式②的收费更实惠;

当通话时间大于 300 分钟时, 收费方式①的收费更实惠;

【小问 3 详解】

解: 设①种方案的收费 y (元) 与通话时间 x (分钟) 之间的函数关系式是 $y = kx + b$,

$\therefore$ 点 $(0, 30)$, $(500, 80)$ 在此函数图象上,

$$\therefore \begin{cases} b = 30 \\ 500k + b = 80 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = 0.1 \\ b = 30 \end{cases},$$

即①种方案的收费 y (元) 与通话时间 x (分钟) 之间的函数关系式是 $y = 0.1x + 30$;

设②种方案的收费 y (元) 与通话时间 x (分钟) 之间的函数关系式是 $y = ax$,

$\therefore$ 点 $(500, 100)$ 在此函数图象上,

$\therefore 100 = 500a$, 得 $a = 0.2$,

即②种方案的收费 y (元) 与通话时间 x (分钟) 之间的函数关系式是 $y = 0.2x$;

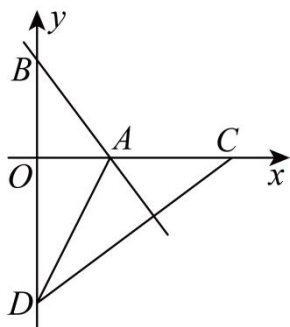
由题意得: $0.2x - (0.1x + 30) = 30$,

解得 $x = 600$,

答: 当 $x = 600$ 时, 第②种方案比第①种方案每个月多 30.

【点睛】 本题考查一次函数的应用, 解答本题的关键是明确题意, 求出相应的函数解析式, 利用数形结合的思想解答.

27. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $y = -\frac{4}{3}x + 4$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、点 B , 点 D 在 y 轴的负半轴上, 若将 $\triangle DAB$ 沿直线 AD 折叠, 点 B 恰好落在 x 轴正半轴上的点 C 处.



(1) 求 AB 的长和点 C 的坐标;

(2) 若点 P 在直线 AB 上, 且 $\triangle ACP$ 的面积等于 5, 求点 P 坐标;

(3) 求直线 CD 的解析式.

【答案】 (1) $AB = 5$, $C(8, 0)$

(2) $P\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ 或 $P\left(\frac{9}{2}, -2\right)$

(3) $y = \frac{3}{4}x - 6$

【解析】

【分析】 (1) 先求出点 A 和点 B 的坐标, 得出 $OB = 4$, $OA = 3$, 根据勾股定理即可求出 AB , 根据折叠的性质可知 $AC = AB = 5$, 求出 $OC = OA + AC = 8$, 即可求出点 C 的坐标;

(2) 根据 $\triangle ACP$ 的面积等于 5, 和三角形的面积公式得出点 P 的纵坐标绝对值为 2, 则点 P 的纵坐标为 2

或-2, 把点 P 纵坐标代入 $y = -\frac{4}{3}x + 4$, 即可求出点 P 的坐标;

(3) 设 $OD = t$, 则 $BD = CD = t + 4$, 根据 $OD^2 + OC^2 = CD^2$ 列出方程, 求出 t 的值, 得出点 D 坐标, 再设直线 CD 的解析式为 $y = kx + b$, 把 $C(8, 0)$, $D(0, -6)$ 代入得, 求出 k 和 b 的值即可.

【小问 1 详解】

解: 把 $x = 0$ 代入 $y = -\frac{4}{3}x + 4$ 得: $y = 4$,

$\therefore B(0, 4)$, 则 $OB = 4$,

把 $y = 0$ 代入 $y = -\frac{4}{3}x + 4$ 得: $0 = -\frac{4}{3}x + 4$,

解得: $x = 3$,

$\therefore A(3, 0)$, 则 $OA = 3$,

$\therefore AB = \sqrt{OB^2 + OA^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$,

$\therefore$ 将 $\triangle DAB$ 沿直线 AD 折叠得到 $\triangle DAC$,

$\therefore AC = AB = 5$,

$\therefore OC = OA + AC = 3 + 5 = 8$,

$\therefore C(8, 0)$;

【小问 2 详解】

解: $\therefore \triangle ACP$ 的面积等于 5,

$\therefore \frac{1}{2} AC |y_P| = 5$,

$\therefore AC = 5$,

$\therefore |y_P| = 2$, 则 $y_P = 2$ 或 $y_P = -2$,

把 $y = 2$ 代入 $y = -\frac{4}{3}x + 4$ 得: $2 = -\frac{4}{3}x + 4$,

解得: $x = \frac{3}{2}$,

$\therefore P\left(\frac{3}{2}, 2\right)$,

把 $y = -2$ 代入 $y = -\frac{4}{3}x + 4$ 得: $-2 = -\frac{4}{3}x + 4$,

解得: $x = \frac{9}{2}$,

$$\therefore P\left(\frac{9}{2}, -2\right),$$

$$\text{综上: } P\left(\frac{3}{2}, 2\right) \text{ 或 } P\left(\frac{9}{2}, -2\right);$$

【小问3详解】

解: 设 $OD = t$, 则 $BD = OD + OB = t + 4$,

$\therefore$ 将 $\triangle DAB$ 沿直线 AD 折叠得到 $\triangle DAC$,

$$\therefore BD = CD = t + 4,$$

根据勾股定理可得: $OD^2 + OC^2 = CD^2$,

$$\text{即 } t^2 + 8^2 = (t + 4)^2,$$

解得: $t = 6$,

$$\therefore D(0, -6),$$

设直线 CD 的解析式为 $y = kx + b$,

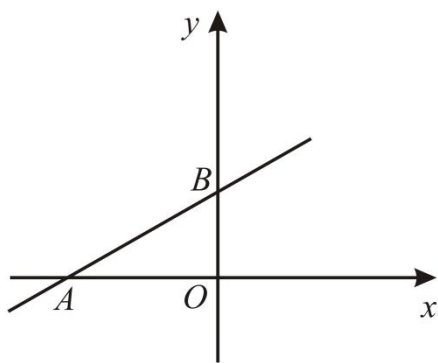
把 $C(8, 0)$, $D(0, -6)$ 代入得:

$$\begin{cases} 0 = 8k + b \\ -6 = b \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = \frac{3}{4} \\ b = -6 \end{cases}$$

$$\therefore \text{直线 } CD \text{ 的解析式为 } y = \frac{3}{4}x - 6.$$

【点睛】 本题主要考查了一次函数的图象和性质, 折叠的性质, 勾股定理, 解题的关键是掌握求一次函数与坐标轴交点坐标, 一次函数图象上点的坐标特征, 用待定系数法求解一次函数解析式的方法, 成轴对称的两个图形对应边相等, 以及勾股定理的内容.

28. 如图, 直线 $y = kx + b$ 与 x 轴, y 轴分别交于点 A , B , 点 A 坐标为 $(-3, 0)$, $\angle OAB = 30^\circ$, 将 x 轴所在的直线沿直线 AB 翻折交 y 轴于点 C , 点 F 是直线 AB 上一动点.



- (1) 求直线 AB 的解析式；
- (2) 若 $CF \perp AB$ ，求 OF 的长；
- (3) 若 $\triangle AOF$ 是等腰三角形，写出点 F 的坐标。

【答案】(1) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$

(2) 3 (3) $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 或 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 或 $\left(-3 + \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 或 $\left(-3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

【解析】

【分析】(1) 先求出 B 点的坐标，将 A 和 B 的坐标代入即可求出 AB 的解析式；

(2) 先求出 BC 的长，再通过 $\angle CBF = 60^\circ$ ，可求出 OF 的长；

(3) 当 AO ， OF ， AF 分别为等腰三角形的底边的时候进行分类讨论。

【小问 1 详解】

解： $\because$ 点 A 坐标为 $(-3, 0)$ ， $\angle OAB = 30^\circ$ ， $AO \perp BO$ ，

$$\therefore OA = 3, AB = 2OB,$$

设 $OB = x$ ，则 $AB = 2x$ ，

在 $\triangle ABO$ 中， $AB^2 = BO^2 + AO^2$ ，

$$\therefore (2x)^2 = x^2 + 3^2,$$

解得 $x = \sqrt{3}$ ，

$$\therefore B(0, \sqrt{3}),$$

设 AB 的解析式： $y = kx + b$ ，

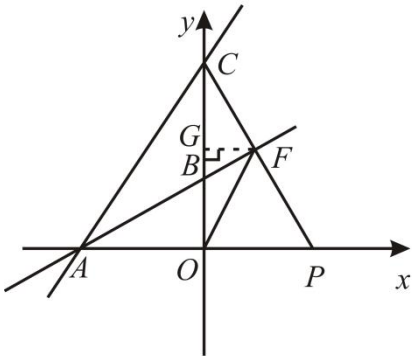
将 $A(-3, 0)$ 和 $B(0, \sqrt{3})$ 分别代入，得

$$\begin{cases} 0 = -3k + b \\ \sqrt{3} = b \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ b = \sqrt{3} \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AB 的解析式: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$.

【小问 2 详解】

解: 如图, 过点 F 作 $FG \perp y$ 轴于点 G , 延长 CF 交 x 轴于 P 点,



$\therefore$ 直线 AO 沿直线 AB 翻折交 y 轴于点 C ,

$\therefore \angle AFC = \angle AFP = 90^\circ$, $\angle OAB = \angle CAB = 30^\circ$, $\angle CAO = 60^\circ$,

在 $\triangle AOC$ 中, $\angle ACO = 90^\circ - \angle CAO = 30^\circ$,

$\therefore AC = 2AO = 6$, $\angle ABO = 60^\circ = \angle CBF$ (对顶角相等),

同理 (1) 可得 $OC = \sqrt{AC^2 - AO^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$,

$\therefore BC = OC - OB = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$,

$\therefore$ 在 $\triangle CBF$ 中, $\angle CBF = 60^\circ$, 则 $\angle BCF = 30^\circ$, $BF = \frac{1}{2}CB = \sqrt{3}$,

$\therefore$ 在 $\triangle GBF$ 中, $\angle CBF = 60^\circ$, 则 $\angle BFG = 30^\circ$, $BG = \frac{1}{2}BF = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

同理 (1) 可得, $FG = \sqrt{FB^2 - BG^2} = \sqrt{3 - \frac{3}{4}} = \frac{3}{2}$,

$\therefore F$ 点的横坐标为 $\frac{3}{2}$,

$\therefore F$ 在直线 AB 上,

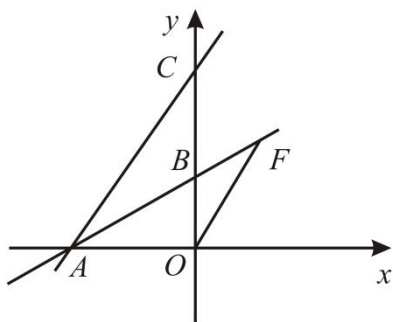
$\therefore$ 把 $x = \frac{3}{2}$ 代入 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$ 中, F 点的纵坐标为 $\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{2} + \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

$$\therefore F\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\therefore OF = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{27}{4}} = 3.$$

【小问3详解】

解：①如图，当 $AO = OF$ ：



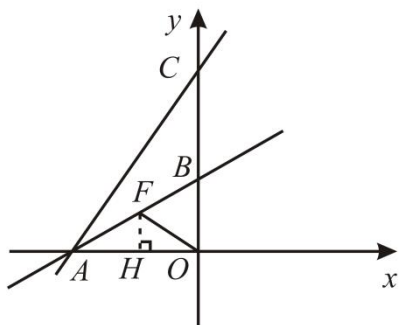
在 (2) 的情况下， $OF = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 3$

$\therefore$ 此时 $AO = OF = 3$,

$\therefore$ 在 (2) 的点 F , 点 A , 点 O 组成的三角形为等腰三角形,

$\therefore$ 当 $OA = FO$ 时, $F\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

②如图，当 $FA = FO$ 时：



过点 F 作 $FH \perp OA$ 于点 H ,

$$\text{则 } HA = HO = \frac{1}{2}AO = \frac{3}{2},$$

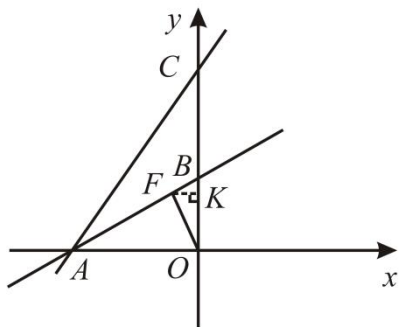
$\therefore \angle BAO = 30^\circ$, $FA = FO$,

$\therefore \angle FOA = \angle FAO = 30^\circ$,

同理可得, $FH = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\therefore \text{此时 } F\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

③如图, 当 $FA = AO$ 时:



过点 F 作 $FK \perp OB$ 于点 K ,

可得, $\triangle FBK$ 中, $\angle FKB = 90^\circ$, $\angle FBK = 60^\circ$,

$$\because AF = AO = 3, \quad AB = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore FB = AB - AF = 2\sqrt{3} - 3,$$

$$\therefore BK = \frac{1}{2}BF = \sqrt{3} - \frac{3}{2},$$

$$\text{同理可得, } FK = 3 - \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore F \text{ 点的横坐标为 } -3 + \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad OK = BO - BK = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{此时 } F\left(-3 + \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right),$$

$$\text{点 } F \text{ 在点 } A \text{ 左侧, } x \text{ 轴下方时, 点 } F \text{ 的坐标为 } \left(-3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right),$$

$$\text{综上所述: 满足条件的点 } F \text{ 的坐标为 } \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ 或 } \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ 或 } \left(-3 + \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right) \text{ 或 } \left(-3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right).$$

【点睛】 本题主要考查了图形的折叠、含 30° 角的直角三角形和等腰三角形, 第三问的重难点在于分类讨论, 属于中等题.