

八年级第二学期第一次素养调研

(满分 100 分, 完成时间 100 分钟)

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列函数 (1) $y = \pi x$; (2) $y = 3x - 1$; (3) $y = \frac{1}{x}$; (4) $y = 15 - 3x$; (5) $y = 3x^2 - 1$ 中, 是一次函数的有 ()

A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个

【答案】B

【解析】

【分析】根据一次函数的定义对各小题进行逐一分析即可.

【详解】解: (1) $y = \pi x$, 是一次函数;

(2) $y = 3x - 1$, 是一次函数;

(3) $y = \frac{1}{x}$, 不是一次函数;

(4) $y = 15 - 3x$, 是一次函数;

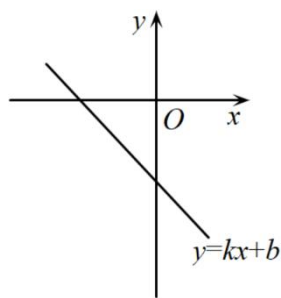
(5) $y = 3x^2 - 1$, 不是一次函数,

综上, (1) (2) (4) 是一次函数, 共 3 个;

故选: B.

【点睛】本题考查的是一次函数的定义, 解决本题的关键是明确一次函数的定义, 一般地, 形如 $y = kx + b (k \neq 0, k, b \text{ 是常数})$ 的函数, 叫做一次函数.

2. 已知一次函数 $y = kx + b$ 的图象如图所示, 则 k, b 的取值范围是 ()



A. $k > 0, b > 0$ B. $k > 0, b < 0$ C. $k < 0, b > 0$ D. $k < 0, b < 0$

【答案】D

【解析】

【分析】根据一次函数图象进行判断.

【详解】解: $\because$ 一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过第二、三、四象限,

$$\therefore k < 0, b < 0.$$

故选 D.

【点睛】本题考查一次函数的图象和性质,熟知一次函数的图象与系数的关系是解题的关键.

3. 下列关于 x 的方程中, 有实数根的是 ()

A. $x^3 + 2 = 0$ B. $x^2 - 2x + 3 = 0$ C. $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}$ D.

$$\sqrt{x+2} + 1 = 0$$

【答案】 A

【解析】

【分析】 首先逐个对每一项的方程分析求解, 即可得出结论.

【详解】 解: A、 $x^3 + 2 = 0$, 有实数根 $x = -\sqrt[3]{2}$, 该选项符合题意;

B、 $x^2 - 2x + 3 = 0$, $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -8 < 0$, 原方程没有实数根, 该选项不符合题意;

C、去分母解得 $x = 1$, 经检验 $x = 1$ 不是原方程的解, 原方程没有实数根, 该选项不符合题意;

D、由二次根式的性质可得 $\sqrt{x+2} \geq 0$, 原方程没有实数根, 该选项不符合题意;

故选: A.

【点睛】 本题考查了无理方程, 根的判别式以及分式方程的解法, 熟练掌握相关知识是解题的关键.

4. 下列方程组中, 属于二元二次方程组的为 ()

A. $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} 3x+y=2 \\ xy=4 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x+\sqrt{y}=1 \\ x+y=1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3 \\ \frac{2}{x} - \frac{1}{y} = -4 \end{cases}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据二元二次方程组的定义解答.

【详解】 解: A、 $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=2 \end{cases}$ 是二元一次方程组, 不符合题意;

B、 $\begin{cases} 3x+y=2 \\ xy=4 \end{cases}$ 是二元二次方程组, 符合题意;

C、 $\begin{cases} x + \sqrt{y} = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ 是无理方程组，不符合题意；

D、 $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3 \\ \frac{2}{x} - \frac{1}{y} = -4 \end{cases}$ 是分式方程组，不符合题意；

故选：B.

【点睛】本题考查二元二次方程组：有两个二元二次方程或一个二元二次方程，一个一元一次方程所组成的方程组称为二元二次方程组.

5. 方程组 $\begin{cases} x^2 - y = 1 \\ 2x - y = k \end{cases}$ 有实数解，则 k 的取值范围是 ()

A. $k \geq 2$

B. $k = 2$

C. $k < 2$

D. $k \leq 2$

【答案】D

【解析】

【分析】①-②得出 $x^2 - 2x = 1 - k$ ，求出 $x^2 - 2x + k - 1 = 0$ ，根据方程组有实数解得出

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (k - 1) \geq 0$ ，再求出 k 的取值范围即可.

【详解】解： $\begin{cases} x^2 - y = 1 \text{ ①} \\ 2x - y = k \text{ ②} \end{cases}$,

①-②，得 $x^2 - 2x = 1 - k$ ，即 $x^2 - 2x + k - 1 = 0$ ，

$\therefore$ 方程组 $\begin{cases} x^2 - y = 1 \\ 2x - y = k \end{cases}$ 有实数解，

$\therefore$ 一元二次方程 $x^2 - 2x + k - 1 = 0$ 有实数根，

$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (k - 1) \geq 0$ ，

解得： $k \leq 2$ ，

故选：D.

【点睛】本题考查了解高次方程组 and 一元二次方程根的判别式，方程组消元转化成一元二次方程是解此题的关键.

6. 关于方程 $x^3 + 4x = 0$ ，下列说法正确的是 ()

A. 它是二项方程

B. 它的解是 $x = 2$

C. 它是高次方程

D.

$x = -2, 2, 0$ 都是它的解

【答案】C

【解析】

【分析】 由于方程 $x^3 + 4x = 0$ ，所以方程的未知数是一个，次数是 3 次，由此即可确定选择项。

【详解】 解：A、二项方程应该是 $ax^n + b = 0$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$, n 为正整数)，故本选项不符合题意；

B、方程 $x^3 + 4x = 0$ ，整理得 $x(x^2 + 4) = 0$ ，由于 $x^2 + 4 \neq 0$ ，所以它的解是 $x = 0$ ，故本选项不符合题意；

C、它是高次方程，故本选项符合题意；

D、方程 $x^3 + 4x = 0$ ，整理得 $x(x^2 + 4) = 0$ ，由于 $x^2 + 4 \neq 0$ ，所以它的解是 $x = 0$ ，故本选项不符合题意；

故选：C.

【点睛】 此题主要考查了高次方程的定义，二项方程的定义，解高次方程，解题的关键是抓住高次方程是整式方程，同时要抓住未知数的个数和次数才能正确解决问题.

二、填空题 (本大题共 12 题，每题 2 分，满分 24 分)

7. 直线 $y = x + 2$ 在 y 轴上的截距是_____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 将 $x = 0$ 代入一次函数解析式中求出 y 值，此题得解.

【详解】 解：当 $x = 0$ 时， $y = x + 2 = 2$ ，

$\therefore$ 直线 $y = x + 2$ 在 y 轴上的截距是 2.

故答案为：2.

【点睛】 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征，将 $x = 0$ 代入函数解析式求出 y 值是解题的关键.

8. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ，那么 $f(-5) =$ _____.

【答案】 $-\frac{1}{6}$

【解析】

【分析】 把 $x = -5$ 代入函数解析式进行计算即可.

【详解】 解： $\because$ 函数 $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ，

$\therefore f(-5) = \frac{1}{-5-1} = -\frac{1}{6}$ ，

故答案为: $-\frac{1}{6}$.

【点睛】本题考查的是已知函数的自变量求解函数值, 理解题意是解本题的关键.

9. 直线 $y = 2x - 4$ 可以由直线 $y = 2x + 1$ 沿着 y 轴向_____ (填“上”“下”) 平移_____ 个单位得到.

【答案】 ①. 上 ②. 5

【解析】

【分析】利用直线平移的规律求解.

【详解】解: 直线 $y = 2x - 4$ 可以由直线 $y = 2x + 1$ 沿 y 轴向向上平移 5 个单位得到.

故答案为: 上, 5.

【点睛】本题考查了一次函数图象与几何变换: 对于一次函数 $y = kx + b$, 把直线 $y = kx + b$ 向上平移或向下平移 m ($m > 0$) 个单位所得直线解析式为 $y = kx + b + m$ (或 $y = kx + b - m$).

10. 一次函数 $y = 5x - 4$ 的图像不经过第_____ 象限.

【答案】 二

【解析】

【分析】根据 k 、 b 的正负即可确定一次函数 $y = kx + b$ 的图像经过的象限.

【详解】解: $\because k = 5 > 0$, $b = -4 < 0$,

$\therefore$ 一次函数 $y = 5x - 4$ 的图像经过第一、三、四象限, 不经过第二象限.

故答案为: 二.

【点睛】本题考查了一次函数的图像与性质, 一次函数的系数是判断其图像经过象限的关键, $k > 0$, $b > 0$, 图像经过第一、二、三象限; $k > 0$, $b < 0$, 图像经过第一、三、四象限; $k < 0$, $b > 0$, 图像经过第一、二、四象限; $k < 0$, $b < 0$, 图像经过第二、三、四象限.

11. 已知: 点 $A(-1, a)$ 、 $B(1, b)$ 在函数 $y = -x + m$ 的图像上, 则 a _____ b (在横线上填写“ $>$ ”或“ $=$ ”或“ $<$ ”).

【答案】 $>$

【解析】

【分析】根据一次函数 $y = kx + b$ 的性质, 当 $k < 0$ 时, y 将随 x 的增大而减小, 即可得出 a , b 的大小关系即可.

【详解】解: $\because k = -1 < 0$,

$\therefore y$ 将随 x 的增大而减小,

$\because -1 < 1$,

$\therefore a > b$.

故答案为: $>$.

【点睛】此题主要考查了一次函数的增减性，比较简单．解答此题的关键是熟知一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的增减性，当 $k > 0$ 时， y 随 x 的增大而增大；当 $k < 0$ 时， y 随 x 的增大而减小．

12. 二项方程 $\frac{1}{2}x^5 - 16 = 0$ 的实数根是_____．

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】先移项得到 $\frac{1}{2}x^5 = 16$ ，推出 $x^5 = 32$ ，根据 $2^5 = 32$ 即可求出答案．

【详解】 $\frac{1}{2}x^5 - 16 = 0$ ，

$$\frac{1}{2}x^5 = 16,$$

$$x^5 = 32,$$

$$\because 2^5 = 32,$$

$$\therefore x = 2,$$

故答案为： $x = 2$ ．

【点睛】此题考查解高次方程，掌握解方程的步骤，正确计算数的高次方是解题的关键．

13. 若一次函数 $y = (2 - k)x + 3$ 中 y 随 x 的增大而减小，则 k 的取值范围是_____．

【答案】 $k > 2$

【解析】

【分析】在 $y = kx + b$ 中，当 $k > 0$ 时 y 随 x 的增大而增大，当 $k < 0$ 时 y 随 x 的增大而减小．由此列不等式可求得 k 的取值范围．

【详解】解： $\because$ 一次函数 $y = (2 - k)x + 3$ 中 y 随 x 的增大而减小，

$$\therefore 2 - k < 0, \text{ 解得 } k > 2,$$

故答案为： $k > 2$ ．

【点睛】本题主要考查一次函数的增减性，掌握一次函数的增减性是解题的关键．

14. 已知等腰三角形的周长为 80，腰长为 x ，底边长为 y ．请写出 y 关于 x 的函数解析式_____，并求出定义域_____．

【答案】 ①. $y = -2x + 80$ ②. $20 < x < 40$

【解析】

【分析】根据等腰三角形的周长=两腰之和+底边的长建立等式就可以求出其解析式，根据三角形的三边关系建立不等式就可以求出自变量的取值范围．

【详解】解：底边长 y 关于腰长 x 的函数解析式为 $y=-2x+80$,

$$\text{由} \begin{cases} y > 0 \\ y < 2x \end{cases},$$

$$\text{得} \begin{cases} 80-2x > 0 \\ 80-2x < 2x \end{cases},$$

解得 $20 < x < 40$.

$\therefore$ 自变量取值范围为 $20 < x < 40$.

故答案为: $y = -2x + 80 (20 < x < 40)$.

【点睛】本题考查了等腰三角形的周长的运用, 三角形三条边的关系, 自变量取值范围确定的方法, 熟练掌握等腰三角形的定义是解答本题的关键.

15. 用换元法解分式方程 $\frac{x-2}{x} - \frac{3x}{x-2} - 2 = 0$ 时, 如果设 $\frac{x-2}{x} = y$, 则原方程可化为关于 y 的整式方程是_____.

【答案】 $y^2 - 2y - 3 = 0$;

【解析】

【分析】如果设 $\frac{x-2}{x} = y$, 那么 $\frac{x}{x-2} = \frac{1}{y}$, 原方程变为: $y - \frac{3}{y} - 2 = 0$, 方程两边乘最简公分母 y , 可以把分式方程转化为整式方程.

【详解】解: 设 $\frac{x-2}{x} = y$,

原方程变为 $y - \frac{3}{y} - 2 = 0$,

方程两边都乘 y 得 $y^2 - 2y - 3 = 0$.

故原方程可化为关于 y 的整式方程是 $y^2 - 2y - 3 = 0$.

故答案为 $y^2 - 2y - 3 = 0$.

【点睛】本题考查用换元法使分式方程简便. 换元后再在方程两边乘最简公分母可以把分式方程转化为整式方程. 应注意换元后的字母系数.

16. 如果关于 x 的方程 $\frac{x}{x-3} = 2 - \frac{k}{3-x}$ 的有增根, 那么 k 的值为_____.

【答案】 3

【解析】

【分析】分式方程去分母转化为整式方程, 由分式方程有增根, 得到最简公分母为 0 求出 x 的值, 代入整式方程求出 k 的值即可.

【详解】解：分式方程去分母得： $x = 2(x - 3) + k$,

由分式方程有增根，得到 $x - 3 = 0$ ，即 $x = 3$,

把 $x = 3$ 代入整式方程得： $k = 3$,

故答案为：3

【点睛】此题考查了分式方程的增根，增根确定后可按如下步骤进行：①化分式方程为整式方程；②把增根代入整式方程即可求得相关字母的值.

17. 定义：如果函数 $y = f(x)$ 和 $y = h(x)$ 的图像关于 x 轴对称，那么我们就把函数 $y = f(x)$ 和 $y = h(x)$ 叫做互为“镜子”函数. 请写出函数 $y = x - 2$ 的“镜子”函数：_____.

【答案】 $y = -x + 2$

【解析】

【分析】设函数 $y = x - 2$ 的“镜子”函数上的任意一点为 (x, y) ，根据关于 x 轴对称的点横坐标相等，纵坐标互为相反数可得点 $(x, -y)$ 在函数 $y = x - 2$ 的图象上，代入整理即可得到答案.

【详解】解：设函数 $y = x - 2$ 的“镜子”函数上的任意一点为 (x, y) ，根据关于 x 轴对称的点横坐标相等，纵坐标互为相反数可得点 $(x, -y)$ 在函数 $y = x - 2$ 的图象上，

$\therefore -y = x - 2$ ，即 $y = -x + 2$ ，

$\therefore$ 函数 $y = x - 2$ 的“镜子”函数为 $y = -x + 2$.

故答案为： $y = -x + 2$

【点睛】此题考查了函数新定义和一次函数，熟练掌握关于 x 轴对称的点的特征是解题的关键.

18. 已知直线 $y = x + b$ 过点 $A(-1, -5)$ ，并分别与 x 轴、 y 轴交于点 C 、 B . 点 D 在射线 BC 上，且 $\angle DOC = \angle AOB$ ，则点 D 的坐标_____.

【答案】 $(5, 1)$ 或 $\left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$

【解析】

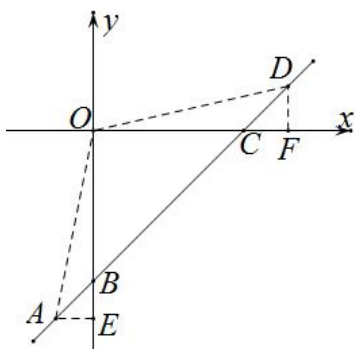
【分析】分点 D 在 x 轴上方和点 D 在 x 轴下方时，两种情况讨论，利用相似三角形的判定和性质求解即可.

【详解】解： $\because$ 直线 $y = x + b$ 过点 $A(-1, -5)$ ，

$\therefore -5 = -1 + b$ ，解得 $b = -4$ ，

$\therefore$ 直线 $y = x - 4$ ，

当点 D 在 x 轴上方时，作 $AE \perp y$ 轴于点 E ，作 $DF \perp x$ 轴于点 F ，



设点 D 的坐标为 $(a, a-4)$ ，则 $DF = a-4$ ， $OF = a$ ， $AE = 1$ ， $OE = 5$ ，

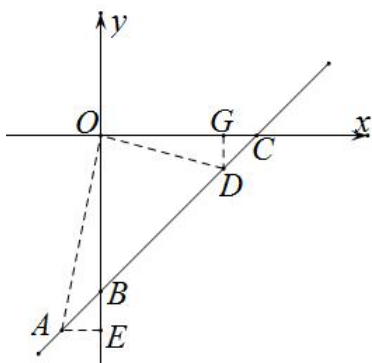
$\therefore \angle DOF = \angle AOE$ ， $\angle DFO = \angle AEO = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle DOF \sim \triangle AOE$ ，

$\therefore \frac{AE}{DF} = \frac{OE}{OF}$ ，即 $\frac{1}{a-4} = \frac{5}{a}$ ，解得 $a = 5$ ，

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(5, 1)$ ；

当点 D 在 x 轴下方时，作 $AE \perp y$ 轴于点 E ，作 $DG \perp x$ 轴于点 G ，



设点 D 的坐标为 $(b, b-4)$ ，

同理 $\triangle DOG \sim \triangle AOE$ ，

$\therefore \frac{AE}{DG} = \frac{OE}{OG}$ ， $\frac{1}{4-b} = \frac{5}{b}$ ，

解得 $b = \frac{10}{3}$ ，

同理求得点 D 的坐标为 $(\frac{10}{3}, \frac{2}{3})$ ；

综上，点 D 的坐标为 $(5, 1)$ 或 $(\frac{10}{3}, \frac{2}{3})$ 。

故答案为： $(5, 1)$ 或 $(\frac{10}{3}, \frac{2}{3})$ 。

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定和性质，待定系数法求一次函数的解析式，解题的关

键是灵活运用所学知识解决问题.

三、简答题: (本大题共 6 题, 每题 5 分, 满分 30 分)

19. 已知一次函数的图像经过点 $M(-3, 2)$, 且平行于直线 $y = 4x - 1$.

(1) 求这个函数图像的解析式;

(2) 所求得的一次函数的图像与坐标轴围成的三角形的面积.

【答案】(1) $y = 4x + 14$;

(2) $\frac{49}{2}$

【解析】

【分析】(1) 根据平行直线的解析式的 k 值相等求出 k 值, 然后把点的坐标代入函数表达式进行计算即可得解;

(2) 求出与两坐标轴的交点坐标, 然后利用三角形的面积公式列式计算即可得解.

【小问 1 详解】

解: 设所求一次函数的解析式为 $y = kx + b$.

$\because$ 直线 $y = kx + b$ 与直线 $y = 4x - 1$ 平行,

$\therefore k = 4$,

$\because$ 直线 $y = kx + b$ 经过点 $M(-3, 2)$, 又 $k = 4$,

$\therefore 4 \times (-3) + b = 2$,

解得, $b = 14$,

所以这个函数的解析式为 $y = 4x + 14$;

【小问 2 详解】

解: 设直线 $y = 4x + 14$ 分别与 x 轴、 y 轴交于 A 、 B 点,

令 $x = 0$, 则 $y = 14$,

$\therefore$ 点 $B(0, 14)$;

令 $y = 0$, 则 $4x + 14 = 0$,

解得 $x = -\frac{7}{2}$,

$\therefore$ 点 $A(-\frac{7}{2}, 0)$

所以 $S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} \times 14 = \frac{49}{2}$.

【点睛】本题考查了两直线平行的问题, 根据平行直线的解析式的 k 值相等得到 $k = 4$ 是解题的关键, 也是本题的难点, 还要注意求函数图象与坐标轴的交点的方法.

20. 解方程: $bx^2 - 2 = 7 - x^2 (b \neq -1)$.

【答案】 $x_1 = \frac{3\sqrt{b+1}}{b+1}, x_2 = -\frac{3\sqrt{b+1}}{b+1}$

【解析】

【分析】 先把方程整理成 $(b+1)x^2 = 9$ ，根据 $b \neq -1$ 得到 $b+1 \neq 0$ ，则 $x^2 = \frac{9}{b+1}$ ，利用开平方即可得到方程的解.

【详解】 解： $bx^2 - 2 = 7 - x^2$

移项得， $bx^2 + x^2 = 7 + 2$ ，

合并同类项得， $(b+1)x^2 = 9$ ，

$\therefore b \neq -1$ ，

$\therefore b+1 \neq 0$ ，

$\therefore x^2 = \frac{9}{b+1}$ ，

$\therefore x_1 = \frac{3\sqrt{b+1}}{b+1}, x_2 = -\frac{3\sqrt{b+1}}{b+1}$.

【点睛】 此题考查了一元二次方程的解法，熟练掌握开平方法解一元二次方程是解题的关键.

21. 解方程： $\frac{x}{x-1} - \frac{2x-2}{x} = -1$

【答案】 $x = \frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 去分母化为整式方程，解方程后检验即可得到分式方程的解.

【详解】 解： $\frac{x}{x-1} - \frac{2x-2}{x} = -1$

两边都乘以 $x(x-1)$ 得， $x^2 - (2x-2)(x-1) = -x(x-1)$ ，

解得， $x = \frac{2}{3}$ ，

把 $x = \frac{2}{3}$ 代入 $x(x-1)$ 得， $x(x-1) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3} - 1\right) = -\frac{2}{9} \neq 0$ ，

$\therefore$ 原分式方程的解是 $x = \frac{2}{3}$.

【点睛】 此题考查了分式方程，熟练掌握分式方程的解法是解题的关键.

22. 解方程： $\sqrt{x} - \sqrt{5-x} = 1$

【答案】 $x = 4$

【解析】

【分析】移项可得 $\sqrt{x}-1=\sqrt{5-x}$ ，两边平方整理得 $\sqrt{x}=x-2$ ，再平方即可求解，然后检验即可.

【详解】解: $\sqrt{x}-\sqrt{5-x}=1$,

移项得 $\sqrt{x}-1=\sqrt{5-x}$,

两边平方得 $x-2\sqrt{x}+1=5-x$, 即 $\sqrt{x}=x-2$,

两边平方整理得 $x^2-5x+4=0$, 即 $(x-1)(x-4)=0$,

解得 $x_1=1$, $x_2=4$,

经检验, $x=1$ 不是原方程的解,

$x=4$ 是原方程的解,

$\therefore$ 原方程的解是 $x=4$.

【点睛】本题考查了无理方程的解法, 解含未知数的二次根式只有一个的无理方程时, 一般步骤是: ①移项, 使方程左边只保留含有根号的二次根式, 其余各项均移到方程的右边; ②两边同时平方, 得到一个整式方程; ③解整式方程; ④验根.

23. 解方程组:
$$\begin{cases} xy=3 \\ x^2-2xy+y^2-4=0 \end{cases}.$$

【答案】
$$\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=1 \end{cases}; \begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=-3 \end{cases}; \begin{cases} x_3=1 \\ y_3=3 \end{cases}; \begin{cases} x_4=-3 \\ y_4=-1 \end{cases};$$

【解析】

【分析】把方程②化为两个一次因式的积, 与方程①组成两个方程组: $\begin{cases} xy=3 \\ x-y=2 \end{cases}$ 或

$$\begin{cases} xy=3 \\ x-y=-2 \end{cases},$$
 解出即可.

【详解】
$$\begin{cases} xy=3 \text{ ①} \\ x^2-2xy+y^2-4=0 \text{ ②} \end{cases},$$

由②得: $(x-y)^2=4$,

$x-y=\pm 2$,

则 $\begin{cases} xy=3 \\ x-y=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} xy=3 \\ x-y=-2 \end{cases},$

解得:
$$\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=1 \end{cases}; \begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=-3 \end{cases}; \begin{cases} x_3=1 \\ y_3=3 \end{cases}; \begin{cases} x_4=-3 \\ y_4=-1 \end{cases}.$$

【点睛】本题是解二元二次方程组, 把其中一个方程化为两个一次方程是关键, 注意不丢解.

24. 解方程组:
$$\begin{cases} \frac{2}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 2 \\ \frac{3}{x-y} - \frac{1}{x+y} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

【解析】

【分析】 令 $\frac{1}{x+y} = \mu$, $\frac{1}{x-y} = \nu$, 则原方程组化为:
$$\begin{cases} 2\mu + \nu = 2 \\ 3\nu - \mu = \frac{5}{2} \end{cases}$$
, 求出 μ 、 ν 的值,

再代入求出 x 、 y 即可.

【详解】 解: 令 $\frac{1}{x+y} = \mu$, $\frac{1}{x-y} = \nu$, $\therefore$ 原方程组可化为:
$$\begin{cases} 2\mu + \nu = 2 \\ 3\nu - \mu = \frac{5}{2} \end{cases}$$
,

解得:
$$\begin{cases} \mu = \frac{1}{2} \\ \nu = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x-y} = 1 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} x+y=2 \\ x-y=1 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases},$$

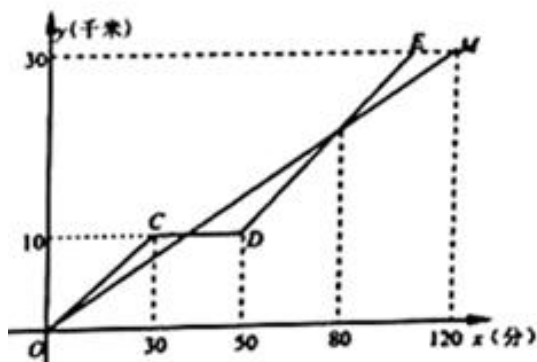
经检验,
$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$
 是原方程组的解

所以原方程组的解为
$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

【点睛】 本题考查了解分式方程组和解二元一次方程组，能正确换元是解此题的关键.

四、解答题 (本大题共 3 题, 满分 28 分)

25. A、B 两地相距 30 千米, 已知甲、乙两人分别骑自行车和摩托车从 A 地出发前往 B 地, 途中乙因修车耽误了些时间, 然后又继续赶路. 图 5 中的线段 OM 和折线 $OCDE$ 分别反映了甲、乙两人所行的路程 y (千米) 与时间 x (分) 的函数关系, 根据图像提供的信息回答下列问题:



- (1) 甲骑自行车的速度是_____千米/分钟;
- (2) 两人第二次相遇时距离 A 地_____千米;
- (3) 线段 DE 反映了乙修好车后所行的路程 y (千米) 与时间 x (分) 的函数关系. 请求出线段 DE 的表达式及其定义域.

【答案】 (1) 0.25; (2) 20; (3) $y = \frac{1}{3}x - \frac{20}{3} (50 \leq x \leq 110)$.

【解析】

【分析】 (1) 根据图象可以得到甲 120 分走的路程是 30 千米, 由此可以求出甲骑自行车的速度;

(2) 根据图象两人第二次相遇的时间是第 80 分钟, 根据甲的速度, 即可求出两人第二次相遇时距离 A 地的距离;

(3) 根据图象知道乙所行驶的路程 y (千米) 与行驶时间 x (分钟) 的函数关系式为一次函数关系, 利用待定系数法即可确定, 然后根据实际情况即可确定函数的定义域.

【详解】 (1) 根据图象可以得到甲 120 分走的路程是 30 千米,
由此甲骑自行车的速度为: $30 \div 120 = 0.25$ 千米/分钟;
故答案为 0.25.

(2) 根据图象两人第二次相遇的时间是第 80 分钟,
此时两人距离 A 地的距离为: $80 \times 0.25 = 20$ 千米;
故答案为 20.

(3) 设根据图象知道乙所行驶的路程 y (千米) 与行驶时间 x (分钟) 的函数关系式为,

$$y = kx + b (k \neq 0),$$

把(50,10)和(80,20)代入 $y = kx + b (k \neq 0)$, 得

$$\begin{cases} 50k + b = 10 \\ 80k + b = 20, \end{cases}$$

解得:
$$\begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{20}{3}, \end{cases}$$

因此, 乙所行驶的路程 y (千米) 与行驶时间 x (分钟) 的函数关系式为: $y = \frac{1}{3}x - \frac{20}{3}$.

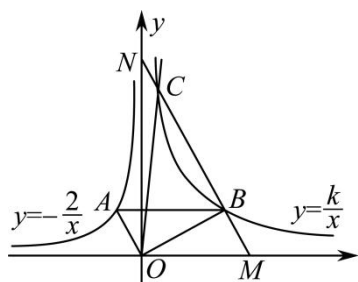
当 $y = 30$ 时, $x = 110$.

函数的定义域为 $50 \leq x \leq 110$.

【点睛】考查函数的图象, 掌握待定系数法求一次函数解析式是解题的关键.

26. 如图, $\angle AOB = 90^\circ$, 反比例函数 $y = -\frac{2}{x} (x < 0)$ 的图象过点 $A(-1, a)$, 反比例函数

$y = \frac{k}{x} (k > 0, x > 0)$ 的图象过点 B , 且 $AB \parallel x$ 轴.



(1) 求 a 和 k 的值;

(2) 过点 B 作 $MN \parallel OA$, 交 x 轴于点 M , 交 y 轴于点 N , 交双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 于另一点 C , 求 $\triangle OBC$

的面积.

【答案】(1) $a=2, k=8$

(2) $S_{\triangle OBC} = 15$

【解析】

【分析】(1) 把 $A(-1, a)$ 代入反比例函数 $y = -\frac{2}{x}$ 得到 $A(-1, 2)$, 过 A 作 $AE \perp x$ 轴于 E , $BF \perp x$

轴于 F , 根据相似三角形的性质得到 $B(4, 2)$, 于是得到 $k = 4 \times 2 = 8$;

(2) 求得直线 AO 的解析式为 $y = -2x$, 设直线 MN 的解析式为 $y = -2x + b$, 得到直线 MN 的解析式为 $y = -2x + 10$, 解方程组得到 $C(1, 8)$, 于是得到结论.

【小问 1 详解】

$\because$ 反比例函数 $y = -\frac{2}{x}$ ($x < 0$) 的图象过点 $A(-1, a)$,

$$\therefore a = -\frac{2}{-1} = 2,$$

$$\therefore A(-1, 2),$$

过 A 作 $AE \perp x$ 轴于 E , $BF \perp x$ 轴于 F ,

$$\therefore AE = 2, OE = 1,$$

$$\because AB \parallel x \text{ 轴},$$

$$\therefore BF = 2,$$

$$\because \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAO + \angle AOE = \angle AOE + \angle BOF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAO = \angle BOF,$$

$$\therefore \triangle AEO \sim \triangle OFB,$$

$$\therefore \frac{AE}{OF} = \frac{OE}{BF},$$

$$\therefore OF = 4,$$

$$\therefore B(4, 2),$$

$$\therefore k = 4 \times 2 = 8;$$

【小问 2 详解】

$\because$ 直线 OA 过 $A(-1, 2)$,

$\therefore$ 直线 AO 的解析式为 $y = -2x$,

$\because MN \parallel OA$,

$\therefore$ 设直线 MN 的解析式为 $y = -2x + b$,

$$\therefore 2 = -2 \times 4 + b,$$

$$\therefore b = 10,$$

$\therefore$ 直线 MN 的解析式为 $y = -2x + 10$,

$\because$ 直线 MN 交 x 轴于点 M , 交 y 轴于点 N ,

$$\therefore M(5, 0), N(0, 10),$$

根据题意, 得

$$\begin{cases} y = -2x + 10 \\ y = \frac{8}{x} \end{cases}$$

(2) 先判断 $\triangle OCA$ 为等腰直角三角形得到 $AC = 4\sqrt{2}$, $\angle PAQ = \angle ACO = 45^\circ$, 则 $\triangle PAQ$ 和 $\triangle CQN$ 为等腰直角三角形, 所以 $PA = PQ$, $CN = NQ$, 利用 t 表示 OM 、 AM 、 PQ , 然后利用三角形面积公式求解;

(3) ①当 $\angle MQA$ 为直角时, 则 $\triangle MAQ$ 为等腰直角三角形, 则 $PA = PM$, 即可求解; ②当 $\angle QMA$ 为直角时, 则 $NB + OM = BC = 3$, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: 点 M 需要 2 秒运动到点 A , 点 N 需要 3 秒运动到点 C ,
所以点 M 能到达终点;

故答案为: M ;

【小问 2 详解】

解: $\because A(4,0)$, $B(3,4)$, $C(0,4)$,

$$\therefore OA = OC = 4, \quad BC = 3,$$

$\therefore \triangle OCA$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore AC = 4\sqrt{2}, \quad \angle PAQ = \angle ACO = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle PAQ$ 和 $\triangle CQN$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore PA = PQ, \quad CN = NQ,$$

$$\because OM = 2t, \quad BN = t, \quad AM = 4 - 2t, \quad CN = 3 - t,$$

$$\therefore PQ = PA = OA - OP = 4 - (3 - t) = t + 1,$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} PQ \cdot AM = \frac{1}{2} (t + 1) (4 - 2t) = -t^2 + t + 2 \quad (0 \leq t \leq 2);$$

【小问 3 详解】

解: 存在.

由点 A 、 C 的坐标知, $OA = OC = 4$,

则 $\triangle COA$ 为等腰直角三角形, 故 $\angle OCA = \angle OAC = 45^\circ$,

①当 $\angle MQA$ 为直角时,

$\because \angle OAC = 45^\circ$, 故 $\triangle MAQ$ 为等腰直角三角形,

则 $PA = PM$,

$$\text{而 } PA = 4 - (3 - t) = t + 1, \quad PM = OP - OM = (3 - t) - 2t = 3 - 3t,$$

$$\text{故 } t + 1 = 3 - 3t, \quad \text{解得: } t = \frac{1}{2}, \quad \text{则 } OM = 2t = 1,$$

故点 $M(1,0)$;

②当 $\angle QMA$ 为直角时,

则点 M 、 P 重合,

则 $NB + OM = BC = 3$, 即 $2t + t = 3$, 解得: $t = 1$,

故 $OM = OP = 2t = 2$,

故点 $M(2,0)$;

综上, 点 M 的坐标为 $(1,0)$ 或 $(2,0)$.

【点睛】 本题考查了等腰直角三角形的性质, 坐标与图形, 勾股定理, 利用代数法解决动点问题; 会运用分类讨论的思想解决数学问题.