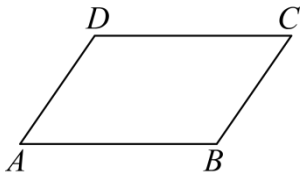


上海市延实八年级（下）数学阶段练习

一、选择题

1. 如图，能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形的是（ ）



A. $AB \parallel CD$, $AD = BC$

B. $\angle A = \angle B$, $\angle C = \angle D$

C. $AB = CD$, $AD = BC$

D. $AB = AD$, $CB = CD$

【答案】C

【解析】

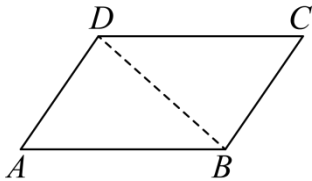
【分析】根据已知条件结合平行四边形的定义直接作出判断即可.

【详解】根据平行四边形的判定可知:

A、若 $AB \parallel CD$, $AD = BC$, 可能是平行四边形, 也可能是梯形, 故 A 错误,

B、两组邻角相等也有可能是等腰梯形, 故 B 错误.

C、连接 DB .



$$\text{由} \begin{cases} AB = CD \\ AD = BC \\ BD = DB \end{cases} \text{得} \triangle ABD \cong \triangle CDB \text{ (SSS)}$$

$$\therefore \angle ADB = \angle CBD, \angle ABD = \angle CDB$$

$$\therefore AD \parallel BC, AB \parallel CD \text{ (内错角相等, 两直线平行)}$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形的条件, 故 C 正确.

D、此条件下无法判定四边形的形状, 还可能是等腰梯形, 故 D 错误.

故选: C.

【点睛】本题主要考查平行四边形的判定的知识点, 解答本题的关键是熟练掌握平行四边形的判定定理, 此题基础题, 比较简单.

2. 等边三角形、平行四边形、菱形、矩形、正方形、等腰梯形中, 既是轴对称图形, 又是中心对称图形的

个数是 ()

A. 2 个

B. 3 个

C. 4 个

D. 5 个

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据轴对称图形与中心对称图形的概念结合各图形的特点逐一进行分析求解即可.

【详解】 解: 等边三角形, 是轴对称图形, 不是中心对称图形, 不符合题意;

平行四边形, 不是轴对称图形, 是中心对称图形, 不符合题意;

菱形, 既是轴对称图形, 又是中心对称图形, 符合题意;

矩形, 既是轴对称图形, 又是中心对称图形, 符合题意;

正方形, 是轴对称图形, 也是中心对称图形, 符合题意;

等腰梯形, 是轴对称图形, 不是中心对称图形, 不符合题意;

综上可得有 3 个符合题意的答案.

故选: B.

【点睛】 本题考查了中心对称图形和轴对称图形的知识, 注意掌握好中心对称图形与轴对称图形的概念, 轴对称图形的关键是寻找对称轴, 图形两部分折叠后可重合, 中心对称图形是要寻找对称中心, 旋转 180° 后与原图重合.

3. 如图, 丝带重叠的部分一定是 ()



A. 菱形

B. 矩形

C. 正方形

D. 都有可能

【答案】 A

【解析】

【分析】 首先可判断重叠部分为平行四边形, 且两条丝带宽度相同; 再由平行四边形的面积可得邻边相等, 则重叠部分为菱形.

【详解】 解: 过点 A 作 $AE \perp BC$ 于 E, $AF \perp CD$ 于 F, 因为两条彩带宽度相同,
所以 $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, $AE = AF$.

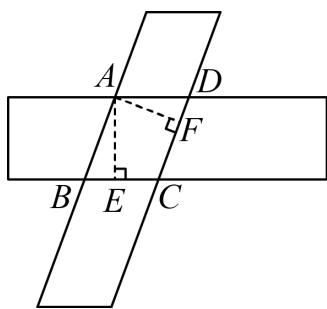
$\therefore$ 四边形 ABCD 是平行四边形.

$\because S_{\square ABCD} = BC \cdot AE = CD \cdot AF$.

$\therefore BC = CD$,

∴ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

故选 A.



【点睛】 本题考查了平行四边形的判定和性质以及菱形的判定和性质，利用平

行四边形的面积公式得到一组邻边相等是解题关键.

4. 下面命题正确的个数是 ()

① 对角线互相平分的四边形是平行四边形

② 对角线相等且互相平分的四边形是矩形

③ 对角线互相垂直平分的四边形是菱形

④ 对角线相等且互相垂直平分的四边形是正方形

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据平行四边形、矩形、菱形和正方形的判定判断即可.

【详解】 解: ① 对角线互相平分的四边形是平行四边形, 是真命题;

② 对角线相等且互相平分的四边形是矩形, 是真命题;

③ 对角线互相垂直平分的四边形是菱形, 是真命题;

④ 对角线相等且互相垂直平分的四边形是正方形, 是真命题;

故选: D.

【点睛】 本题考查了正方形、平行四边形、菱形以及矩形的判定定理, 判断命题真假, 注意菱形与正方形的区别与联系、矩形与正方形的区别与联系, 熟练掌握特殊四边形的判定是解答本题的关键.

5. 顺次联结四边形 $ABCD$ 各边中点所成图形是菱形, 则四边形 $ABCD$ 的对角线 ()

A. 互相平分

B. 相等

C. 互相垂直

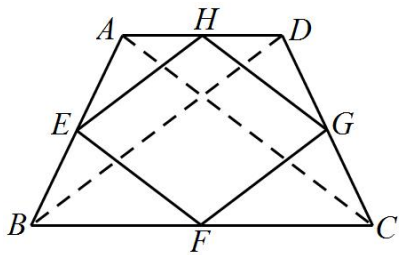
D. 夹角为 60°

【答案】 B

【解析】

【分析】 新图形为菱形, 那么各边相等, 各边都等于原四边形对角线的一半, 那么原四边形对角线相等即可.

【详解】 解: 顺次连接四边形 $ABCD$ 的各边中点所围成的图形是平行四边形, 如图,



HG 平行且等于 $\frac{1}{2}AC$,

EF 平行且等于 $\frac{1}{2}AC$,

故 HG 平行且等于 EF ,

HE 平行且等于 $\frac{1}{2}BD$,

GF 平行且等于 $\frac{1}{2}BD$,

故 HE 平行且等于 FG ,

若 $EFGH$ 为菱形, 则必须 $HE = HG$,

$\therefore AC = BD$.

故选: B.

【点睛】本题考查菱形的性质和三角形中位线定理, 应用三角形中位线定理得到各边与原四边形对角线的关系是解答本题的关键.

二、填空题

6. 已知一个多边形的每一个外角都等于 72° , 则这个多边形的边数是_____.

【答案】5

【解析】

【详解】 $\because$ 多边形的每个外角都等于 72° ,

$\therefore$ 多边形的外角和为 360° ,

$\therefore 360^\circ \div 72^\circ = 5$,

$\therefore$ 这个多边形的边数为 5.

故答案为 5.

7. 在 $ABCD$ 的周长是 36cm, $BC = 10\text{cm}$, 则 $AB =$ _____ cm.

【答案】8

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质得到 $AB = CD, AD = BC$ ，由 $ABCD$ 的周长是 36cm ， $BC = 10\text{cm}$ ， $AB + BC = 18\text{cm}$ ，即可得到答案。

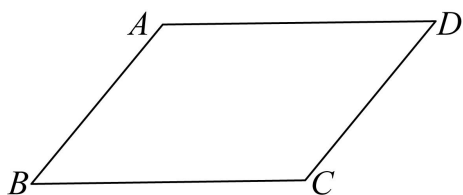
【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB = CD, AD = BC,$$

$$\therefore ABCD \text{ 的周长是 } 36\text{cm}, BC = 10\text{cm},$$

$$\therefore AB + BC = 36 \times \frac{1}{2} = 18(\text{cm}),$$

$$\therefore AB = 18 - 10 = 8(\text{cm}).$$



故答案为：8

【点睛】此题考查了平行四边形的性质，熟练掌握平行四边形的对边相等是解题的关键。

8. 在 $ABCD$ 中， $\angle A = 120^\circ, AB = 6\text{cm}, AD = 3\text{cm}$ ，则 $ABCD$ 的面积为 $\underline{\hspace{2cm}} \text{cm}^2$ 。

【答案】 $9\sqrt{3}$

【解析】

【分析】作 $CH \perp AB$ 于点 H ，则 $\angle BHC = 90^\circ$ ，由平行四边形的性质得到 $\angle B = 60^\circ$ ，则 $\angle BCH = 30^\circ$ ，得到 $BH = \frac{1}{2}BC = \frac{3}{2}\text{cm}$ ，由勾股定理求出 $CH = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，利用平行四边形面积公式即可得到答案。

【详解】解：如图，作 $CH \perp AB$ 于点 H ，则 $\angle BHC = 90^\circ$ ，



在 $ABCD$ 中， $AD = BC = 3\text{cm}, AD \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle A = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 180^\circ - \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BCH = 30^\circ,$$

$$\therefore BH = \frac{1}{2}BC = \frac{3}{2}\text{cm},$$

$$\therefore CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore ABCD \text{ 的面积为 } AB \cdot CH = 6 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3} (\text{cm}^2).$$

故答案为: $9\sqrt{3}$

【点睛】此题考查了平行四边形的性质、勾股定理、含 30° 角直角三角形的性质等知识, 求出 CH 的长度是解题的关键.

9. 等梯形的周长为 30cm , 中位线长为 8cm , 则腰长为 $\underline{\hspace{1cm}}\text{cm}$.

【答案】7.

【解析】

【分析】根据梯形的周长公式和中位线 $= \frac{1}{2}$ (上底 + 下底), 代入对应数据即可求得答案.

【详解】 $\because$ 上底 + 下底 + 两腰 = 周长, 中位线长 $= \frac{1}{2}$ (上底 + 下底),

$$\therefore 2 \times 8 + 2 \text{ 腰长} = 30,$$

$$\therefore \text{腰长} = 7\text{cm},$$

故答案为: 7.

【点睛】本题考查了等腰梯形的周长和中位线定理, 解题关键在于掌握相关性质定理.

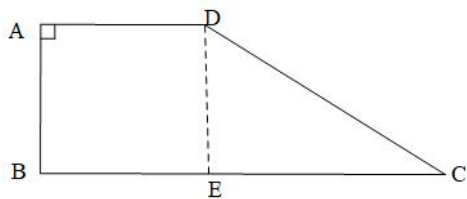
10. 直角梯形的两腰的比为 $1:2$, 则它的内角中锐角的度数为 $\underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】 30°

【解析】

【分析】作出直角梯形的高, 得到一个矩形和一个直角三角形, 利用比值可得出 $CD = 2DE$, 再根据含 30° 度角的直角三角形性质, 可知 $\angle DCE$ 的度数, 从而得出答案.

【详解】解: 如图, 作 $DE \perp BC$ 于点 E ,



$\because$ 梯形 $ABCD$ 是直角梯形,

$$\therefore \angle A = \angle B = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABED$ 是矩形, $\triangle CDE$ 是直角三角,

$$\therefore DE = AB,$$

$$\therefore AB : CD = 1 : 2,$$

$$\therefore DE : DC = 1 : 2,$$

$$\text{即 } CD = 2DE$$

$$\therefore \angle DCE = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DCB = 30^\circ,$$

$\therefore$ 直角梯形的内角中锐角的度数为 30° ,

故答案为 30° .

【点睛】 本题考查直角梯形及含 30° 度角的直角三角形的性质; 作出梯形的高是解决本题的难点; 利用 $CD = 2DE$ 得到 $\angle DCE$ 的度数是解决本题的关键.

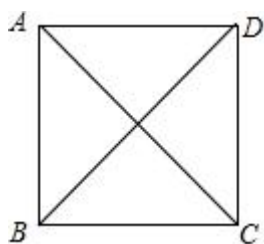
11. 已知正方形的一条对角线长为 $2\sqrt{2}$ cm, 则该正方形的面积为_____cm².

【答案】 4

【解析】

【分析】 根据正方形性质, 由对角线长可求边长, 即可求面积.

【详解】 解: 如图,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形

$$\therefore AB = BC, \angle ABC = 90^\circ$$

$$\therefore AC = 2\sqrt{2} \text{ cm},$$

$$\therefore AB = \frac{\sqrt{2}}{2} AC = 2 \text{ cm},$$

$$\therefore S_{\text{正方形 } ABCD} = AB^2 = 2^2 = 4 \text{ (cm}^2\text{)}$$

故答案为: 4.

【点睛】 本题考查了正方形性质, 正方形面积, 等腰直角三角形直角边与斜边的关系等, 本题也可直接利

用正方形面积等于对角线平方的一半进行计算.

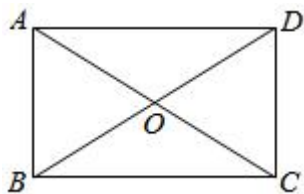
12. 一个矩形的一条对角线与一条边的夹角是 60° , 若这条对角线长 8cm , 则这个矩形的较小的一条边长 _____ cm .

【答案】4

【解析】

【分析】根据矩形的性质可知 $\angle BAD = 90^\circ$, 结合 $\angle ABO = 60^\circ$, 可得 $\angle ADB = 30^\circ$, 由 30° 所对的直角边等于斜边的一半可求.

【详解】解: 如图, 由题意可知, $BD = 8\text{cm}$, $\angle ABD = 60^\circ$



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle BAD = 90^\circ$,

$\because \angle ABD = 60^\circ$,

$\therefore \angle ADB = 30^\circ$

$\therefore AB = \frac{1}{2} BD = 4\text{cm}$,

即: 这个矩形的较小的一条边长 $AB = 4\text{cm}$.

故答案为: 4.

【点睛】本题主要考查对矩形的性质, 等边三角形的性质和判定, 勾股定理等知识点的理解和掌握, 能求出 AB 的长是解此题的关键.

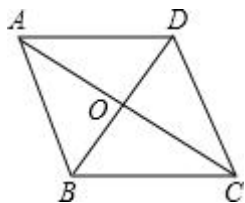
13. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 5, 其中一条对角线长为 6, 则该菱形的另一条对角线长是_____.

【答案】8

【解析】

【分析】根据菱形的性质利用勾股定理求得另一条对角线.

【详解】解: 如图, 当 $BD = 6$ 时,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AC \perp BD$, $AO = CO$, $BO = DO = 3$,

$$\because AB=5,$$

$$\therefore AO=\sqrt{AB^2-OB^2}=4,$$

$$\therefore AC=8,$$

故答案为：8.

【点睛】本题主要考查了菱形的性质和勾股定理，解题的关键是掌握菱形的性质.

14. 在直角梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = 3$ ， $CD = 6$ ，则 $\angle D$ 的度数是 ____.

【答案】 150° 或 30°

【解析】

【分析】根据题意，由于题中条件没有提到具体图形，作图分两种情况：①如图 1 中，过 D 作 $DE \perp BC$ 于 E ，求出四边形 $ABED$ 是矩形，根据矩形的性质得出 $\angle ADE = 90^\circ$ ， $AB = DE = 3$ ，解直角三角形求出 $\angle C$ ，即可得出答案. ②如图 2 中，过点 C 作 $CE \perp AD$ 于 E ，同法可得 $\angle D = 30^\circ$.

【详解】解：①如图 1 中，过 D 作 $DE \perp BC$ 于 E ，则 $\angle DEC = \angle DEB = 90^\circ$ ，

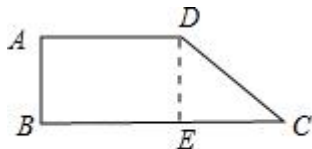


图1

$$\because AD \parallel BC, \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABED$ 是矩形，

$$\therefore \angle DEC = 90^\circ, AB = DE = 3,$$

$$\because CD = 6,$$

$$\therefore \sin C = \frac{DE}{CD} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle C = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle EDC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ;$$

②如图 2 中，过点 C 作 $CE \perp AD$ 于 E ，

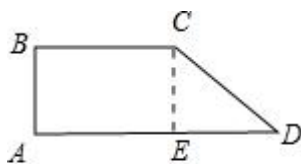


图2

$$\because AD \parallel BC, \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABED$ 是矩形,

$$\therefore \angle DEC = 90^\circ, AB = CE = 3,$$

$$\therefore CD = 6,$$

$$\therefore \sin D = \frac{CE}{CD} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle D = 30^\circ,$$

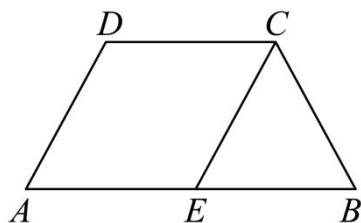
综上所述: $\angle D$ 的度数是 30° 或 150° ,

故答案为: 150° 或 30° .

【点睛】 本题考查了矩形的性质和判定, 直角梯形, 解直角三角形等知识点, 解此题的关键是学会用分类讨论的思想思考问题, 学会添加常用辅助线, 构造直角三角形解决问题.

15. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 点 E 在 AB 上, $EC \parallel AD$, 则

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BE} = \underline{\hspace{2cm}}$$



【答案】 $\overrightarrow{BC}$

【解析】

【分析】 根据向量的线性运算法则和梯形的性质解答.

【详解】 解: $\because$ 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 点 E 在 AB 上, $EC \parallel AD$,

$$\therefore \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{CD},$$

$$\therefore \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BE}$$

$$= -\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BE}$$

$$= \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC}$$

$$= \overrightarrow{BC},$$

故答案为: $\overrightarrow{BC}$.

【点睛】 本题考查了向量的线性运算, 掌握向量的加法运算法则是解答本题的关键.

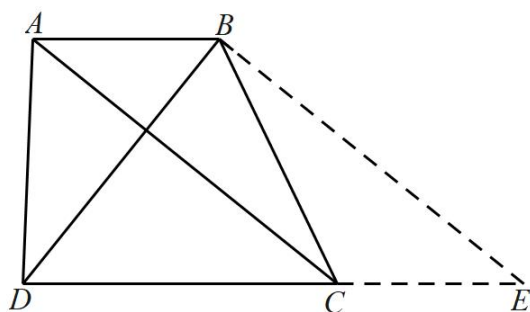
16. 梯形 $ABCD$, $AB \parallel CD$, 对角线互相垂直, 若 $AC = 12, BD = 5$ 该梯形的中位线长_____.

【答案】 6.5

【解析】

【分析】 过点 B 作 $BE \parallel AC$ 交 DC 的延长线于点 E , 则四边形 $ABEC$ 是平行四边形, 再利用平行四边形的性质及勾股定理, 结合梯形中位线长公式计算即可

【详解】 如图: 过点 B 作 $BE \parallel AC$ 交 DC 的延长线于点 E , 则四边形 $ABEC$ 是平行四边形



$$\therefore AC = BE = 12, AB = CE,$$

$$\text{又} \because AC \perp BD, AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle DBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{梯形中位线长} = \frac{1}{2}(AB + CD) = \frac{1}{2}(CE + CD) = \frac{1}{2}DE,$$

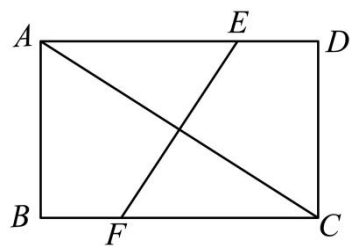
$$\therefore DE = \sqrt{BD^2 + BE^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13,$$

$$\therefore \text{梯形中位线长} = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2} \times 13 = 6.5,$$

故答案为: 6.5

【点睛】 本题主要考查了梯形的中位线长公式及平行四边形的判定和性质, 解答此题的关键是做出辅助线, 构造平行四边形和直角三角形, 将求梯形的中位线长转化为求直角三角形的斜边的问题来解决.

17. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 3, BC = 4$, 若将矩形折叠, 使点 C 和点 A 重合, 则折痕 EF 的长为_____.

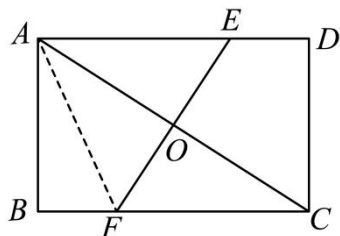


【答案】 $\frac{15}{4}$

【解析】

【分析】先连接 AF ，由于矩形关于 EF 折叠，所以 EF 垂直平分 AC ，那么就有 $AF = CF$ ，又 $ABCD$ 是矩形，那么 $AB = CD$ ， $AD = BC$ ，在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中，(设 $CF = x$)，利用勾股定理可求出 $CF = \frac{25}{8}$ ，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，利用勾股定理可求 $AC = 5$ ，在 $\text{Rt}\triangle COF$ 中再利用勾股定理可求出 $OF = \frac{15}{8}$ ，同理可求 $OE = \frac{15}{8}$ ，所以 $EF = OE + OF = \frac{15}{4}$ 。

【详解】解：连接 AF 。



$\because$ 点 C 与点 A 重合，折痕为 EF ，即 EF 垂直平分 AC ，

$\therefore AF = CF$ ， $AO = CO$ ， $\angle FOC = 90^\circ$ 。

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$\therefore \angle B = 90^\circ$ ， $AB = CD = 3$ ， $AD = BC = 4$ 。

设 $CF = x$ ，则 $AF = x$ ， $BF = 4 - x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，由勾股定理得 $AC^2 = BC^2 + AB^2 = 5^2$ ，且 O 为 AC 中点，

$\therefore AC = 5$ ， $OC = \frac{1}{2}AC = \frac{5}{2}$ 。

$\because AB^2 + BF^2 = AF^2$

$\therefore 3^2 + (4 - x)^2 = x^2$

$\therefore x = \frac{25}{8}$ 。

$\because \angle FOC = 90^\circ$ ，

$\therefore OF^2 = FC^2 - OC^2 = \left(\frac{25}{8}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{15}{8}\right)^2$

$\therefore OF = \frac{15}{8}$ ，

同理可求 $OE = \frac{15}{8}$ ，

即 $EF = OE + OF = \frac{15}{4}$ 。

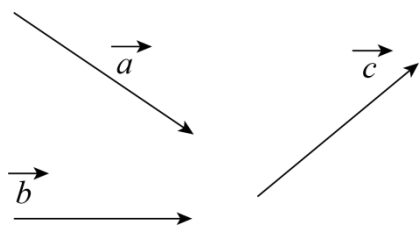
故答案为： $\frac{15}{4}$ 。

【点睛】该题主要考查了翻折变换的性质及其应用问题；解题的关键是作辅助线，灵活运用翻折变换的性

质、勾股定理等几何知识点来分析、判断、推理或解答.

三、简答题

18. 如图, 已知 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$, 求作:



(1) $\vec{a} + \vec{b}$;

(2) $\vec{a} - \vec{c}$

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

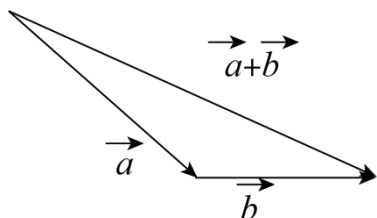
【解析】

【分析】(1) 根据平面向量的运算法则, 三角形法则表示出来即可;

(2) 根据平面向量的运算法则, 三角形法则表示出来即可.

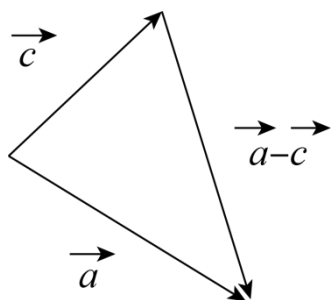
【小问 1 详解】

解: $\vec{a} + \vec{b}$ 表示如下:



【小问 2 详解】

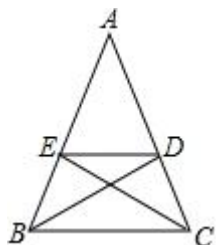
$\vec{a} - \vec{c}$ 表示如下:



【点睛】本题考查了平面向量的线性运算, 熟练掌握平面向量的运算法则是解答

本题的关键.

19. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, CE 和 BD 分别为两个底角的平分线. 求证: 四边形 $BCDE$ 是等腰梯形.

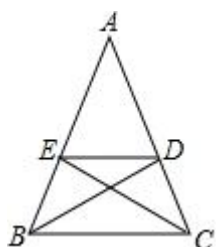


【答案】证明见解析

【解析】

【分析】由于 $AB = AC$, BD , CE 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, 利用等边对等角, 角平分线定义, 可得 $\angle ABC = \angle ACB$, $\angle DBC = \angle ECB$, 而 $BC = CB$, 利用 ASA 可证 $\triangle EBC \cong \triangle DCB$, 再利用全等三角形的性质可证 $BE = CD$, 根据三角形的内角和得到 $\angle AED = \angle ABC$ 得到 $DE \parallel BC$, 于是得到结论.

【详解】证明: 如图所示,



$\because AB = AC$, BD , CE 是 $\triangle ABC$ 的角平分线.

$\therefore \angle ABC = \angle ACB$,

$\therefore \angle DBC = \angle ECB$,

又 $\because BC = CB$,

$\therefore \triangle EBC \cong \triangle DCB$ (ASA),

$\therefore BE = CD$,

$\therefore AE = AD$,

$\therefore \angle AED = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle A)$,

$\therefore \angle ABC = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle A)$,

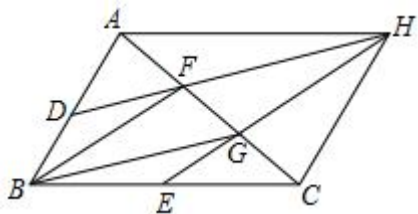
$\therefore \angle AED = \angle ABC$,

$\therefore DE \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $BCDE$ 是等腰梯形.

【点睛】本题考查了等腰梯形的判定, 等腰三角形的性质、角平分线的定义、全等三角形的判定和性质, 熟练掌握全等三角形的判定和性质定理是解题的关键.

20. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别是边 AB 、 BC 的中点, 点 F 、 G 是边 AC 的三等分点, DF 、 EG 的延长线相交于点 H .



- (1) 求证：四边形 $FBGH$ 是平行四边形；
- (2) 如果 AC 平分 $\angle BAH$ ，求证：四边形 $ABCH$ 是菱形.

【答案】(1) 证明见解析；

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 由三角形中位线知识可得 $DF \parallel BG$, $GH \parallel BF$, 根据平行四边形的判定的判定可得四边形 $FBGH$ 是平行四边形.

(2) 连接 BH , 交 AC 于点 O , 利用平行四边形的对角线互相平分可得 $OB = OH$, $OF = OG$, 又 $AF = CG$, 所以 $OA = OC$. 再根据对角线互相平分的四边形是平行四边形得证四边形 $ABCH$ 是平行四边形, 再根据一组邻边相等的平行四边形是菱形即可求解.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 点 F 、 G 是边 AC 的三等分点,

$$\therefore AF = FG = GC,$$

即点 F 为 AG 的中点,

又 $\because$ 点 D 是边 AB 的中点,

$\therefore DF$ 为 $\triangle ABG$ 的中位线,

$$\therefore DH \parallel BG,$$

同理: $EH \parallel BF$,

$\therefore$ 四边形 $FBGH$ 是平行四边形;

【小问 2 详解】

如图, 连接 BH , 交 AC 于点 O ,

$\because$ 四边形 $FBGH$ 是平行四边形,

$$\therefore BO = HO, FO = GO.$$

又 $\because AF = FG = GC$,

$$\therefore AF + FO = GC + GO. \text{ 即: } AO = CO.$$

$\therefore$ 四边形 $ABCH$ 是平行四边形.

$$\therefore AH \parallel BC.$$

$$\therefore \angle HAC = \angle BCA.$$

$$\because AC \text{ 平分 } \angle BAH,$$

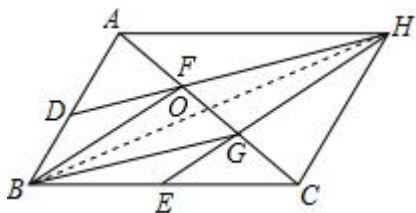
$$\therefore \angle HAC = \angle BAC.$$

$$\therefore \angle BAC = \angle BCA.$$

$$\therefore AB = BC.$$

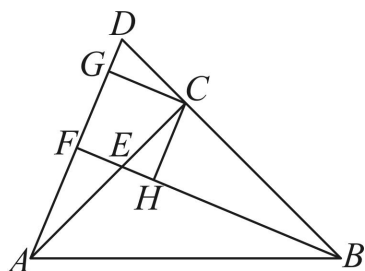
又 $\because$ 四边形 $ABCH$ 是平行四边形,

$\therefore$ 四边形 $ABCH$ 是菱形.



【点睛】 本题考查菱形的判定，平行四边形的判定和性质．注意运用三角形的中位线的知识．

21. 已知：如图，在中 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$ ，点 E 在边 AC 上，延长 BC 至 D 点，使 $CE = CD$ ，延长 BE 交 AD 于 F ，过点 C 作 $CG \parallel BF$ ，交 AD 于点 G ，在 BE 上取一点 H ，使 $\angle HCE = \angle DCG$ ．



(1) 求证： $\triangle BCE \cong \triangle ACD$ ；

(2) 求证：四边形 $FHCG$ 是正方形．

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据已知条件利用两边及夹角对应相等得到三角形全等．

(2) 由 (1) 证得 $\triangle BCE \cong \triangle ACD$ ，得到对应角相等，利用 $\angle AFE = \angle BCE = 90^\circ$ ，推出 $\angle BFG = 90^\circ$ ，根据 $CG \parallel BF$ ，证得 $\angle CGF = \angle AFE = 90^\circ$ ，因为 $\angle HCE = \angle DCG$ ，得到 $\angle GCH = \angle ACD = 90^\circ$ ，推出四边形 $FHCG$ 是矩形，通过三角形全等作出一组邻边相等，即可证得结果．

【小问 1 详解】

解： $\because \angle ACB = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle ACD = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\because AC = BC, CE = CD,$$

在 $\triangle BCE$ 与 $\triangle ACD$ 中,

$$\begin{cases} AC=BC \\ \angle ACD=\angle ACB, \\ CE=CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BCE \cong \triangle ACD;$$

【小问 2 详解】

$$\because \triangle BCE \cong \triangle ACD,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle EBC,$$

$$\because \angle AEF = \angle CEB,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle BCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BFG = 90^\circ,$$

$$\because CG \parallel BF,$$

$$\therefore \angle CGF = \angle AFE = 90^\circ,$$

$$\because \angle HCE = \angle DCG,$$

$$\therefore \angle GCH = \angle ACD = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $FHCG$ 是矩形,

在 $\triangle CDG$ 与 $\triangle CEH$ 中,

$$\begin{cases} \angle CGD = \angle CHE = 90^\circ \\ \angle HCE = \angle DCG \\ CE = CD \end{cases},$$

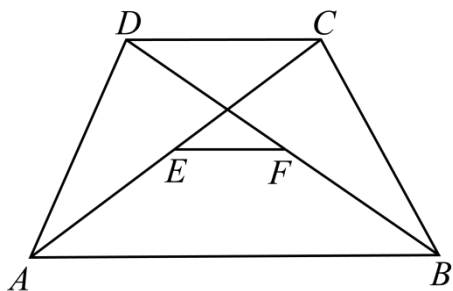
$$\therefore \triangle CDG \cong \triangle CEH,$$

$$\therefore CG = CH,$$

$\therefore$ 四边形 $FHCG$ 是正方形.

【点睛】 本题考查了全等三角形的判定与性质，正方形的判定，等腰直角三角形的性质，平行线的性质，找准全等三角形是解题的关键.

22. 如图，在等腰梯形 $ABCD$ 中， $AB \parallel DC$ ， $AD = BC$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ， AC 平分 $\angle DAB$ ， E 、 F 是对角线 AC 、 BD 的中点，且 $EF = a$ ，求梯形 $ABCD$ 的面积.



【答案】 $3\sqrt{3}a^2$

【解析】

【分析】由等腰梯形性质和平行线性质得出 $\angle DCA = \angle DAC$ ，求出 $AB = 2BC = 2DC$ ，设 $CD = x$ ，则 $AB = 2x$ ，连接 DE ，并延长 DE 交 AB 于 M ，证 $\triangle DEC \cong \triangle MEA$ (ASA) 推出 $DC = AM = x$ ， $DE = EM$ ，求出 $EF = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}(AB - AM)$ ，即可求出 x ，过点 C 作 $CN \perp AB$ 于 N ，求出 CN 进而求出梯形面积即可。

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，

$$\therefore \angle DAB = \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\because AB \parallel DC,$$

$$\therefore \angle DCA = \angle CAB,$$

$$\because AC \text{ 平分 } \angle DAB,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle CAB = \frac{1}{2} \angle DAB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle DCA,$$

$$\therefore AD = CD,$$

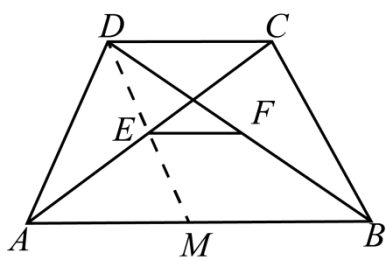
$$\because \angle CBA = 60^\circ, \angle CAB = 30^\circ$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore AB = 2BC = 2AD = 2DC,$$

$$\text{设 } CD = x, \text{ 则 } AB = 2x,$$

如图，连接 DE ，并延长 DE 交 AB 于 M ，



在 $\triangle DEC$ 和 $\triangle MEA$ 中,

$$\begin{cases} \angle DCE = \angle MAE \\ CE = AE \\ \angle DEC = \angle MEA \end{cases},$$

$$\therefore \triangle DEC \cong \triangle MEA (\text{ASA}),$$

$$\therefore DC = AM = x, \quad DE = EM,$$

$$\because DF = BF,$$

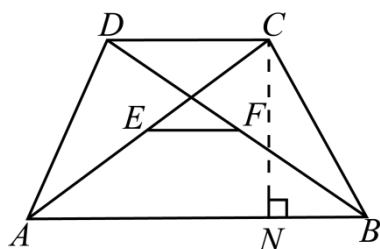
$$\therefore EF = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}(AB - AM),$$

$$\because EF = a,$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}(2x - x) \text{ 即 } x = 2a,$$

$$\text{即 } BC = AD = DC = 2a, \quad AB = 4a,$$

如图, 过点 C 作 $CN \perp AB$ 于 N ,



$$\because BC = 2a, \quad \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BCN = 30^\circ,$$

$$\therefore BN = \frac{1}{2}BC = a,$$

$$\therefore CN = \sqrt{BC^2 - BN^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3}a,$$

$$\therefore \text{梯形面积} = \frac{1}{2}(DC + AB) \times CN = \frac{1}{2}(2a + 4a) \times \sqrt{3}a = 3\sqrt{3}a^2.$$

【点睛】 本题主要考查的是等腰梯形的性质以及梯形的面积公式, 三角形全等的判定与性质, 勾股定理, 角平分线的相关计算, 含 30° 角的直角三角形的性质, 正确作出辅助线是解答本题的关键.