

初二年级第二学期数学能力挑战 2

一、填空题 (每空 2 分, 共 46 分)

1. (1) 方程 $\frac{27x^3}{8} = 1$ 的解是_____;
- (2) 方程 $(x-1)^4 - 16 = 0$ 的解是_____;
- (3) 方程 $\sqrt{1+x} \cdot \sqrt{2x-1} = 0$ 的解是_____;
- (4) 方程组 $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$ 的解是_____.

【答案】 ①. $x = \frac{2}{3}$ ②. $x_1 = 3, x_2 = -1$ ③. $x = \frac{1}{2} \text{ 或 } x = 0.5$ ④. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

或 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

【解析】

【分析】(1) 先求出 x^3 , 然后再开立方计算即可;

(2) 先整体求出 $(x-1)^2$, 再整体求出 $x-1$, 进而求得 x 即可;

(3) 先根据算术平方根的非负性列式求解即可;

(4) 先用代入法, 然后解一元二次方程即可解答.

【详解】解: (1) $\frac{27x^3}{8} = 1$

$$x^3 = \frac{8}{27}$$

$$x = \frac{2}{3},$$

故答案为: $x = \frac{2}{3}$;

$$(2) (x-1)^4 - 16 = 0$$

$$(x-1)^2 = 4$$

$$x-1 = \pm 2$$

$$x_1 = 3, x_2 = -1,$$

故答案为: $x_1 = 3, x_2 = -1$;

$$(3) \because \sqrt{1+x} \cdot \sqrt{2x-1} = 0$$

$$\therefore 1+x=0 \text{ 或 } 2x-1=0 \text{ 且 } 2x-1 \geq 0, 1+x \geq 0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 或 } x=\frac{1}{2} \text{ 且 } x \geq \frac{1}{2}$$

$$\therefore x=\frac{1}{2},$$

$$\text{故答案为: } x=\frac{1}{2};$$

$$(4) \begin{cases} x+y=3 \text{ ①} \\ xy=2 \text{ ②} \end{cases}$$

$$\text{由①可得 } x=3-y \text{ ③}$$

$$\text{将③代入 } xy=2 \text{ 可得: } y^2-3y+2=0$$

$$\text{解得 } y=1 \text{ 或 } y=2$$

$$\text{当 } y=1 \text{ 时, } x=2; \text{ 当 } y=2 \text{ 时, } x=1;$$

$$\text{所以该方程组的解为 } \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}.$$

$$\text{故答案为: } \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}.$$

【点睛】本题主要考查了立方根、算术平方根、平方根、解一元二次方程、二次根式有意义的条件，灵活运用相关知识点成为解答本题的关键。

2. 二元二次方程 $x^2 - 2xy - 8y^2 = 0$ 可以化成两个一次方程，那么这两个一次方程分别是_____或_____.

$$\text{【答案】} \quad \text{①. } x-4y=0 \quad \text{②. } x+2y=0$$

【解析】

【分析】把 $x^2 - 2xy - 8y^2 = 0$ 看作是关于 x 的一元二次方程，方程左边进行因式分解得到 $(x-4y)(x+2y)=0$ ，于是得到两个一次方程： $x-4y=0$ 或 $x+2y=0$.

$$\text{【详解】解: } \because x^2 - 2xy - 8y^2 = 0,$$

$$\therefore (x-4y)(x+2y) = 0,$$

$$\therefore x-4y=0 \text{ 或 } x+2y=0.$$

$$\text{故答案为: } x-4y=0; x+2y=0.$$

【点睛】本题考查解一元二次方程-因式分解法：把一元二次方程变形为一般式，再把方程左边进行因式分解，然后把方程转化为两个一元一次方程，解这两个一元一次方程得到原方程的解。

3. 八边形的内角和等于_____度, 外角和等于_____度, 共有_____条对角线.

【答案】 ①. 1080 ②. 360 ③. 20

【解析】

【分析】根据多边形的内角和公式, 多边形的外角和定理, 对角线条数即可得到结果.

【详解】八边形的内角和是 $180^\circ \times (8-2) = 1080^\circ$, 任意多边形外角和 360° , 八边形的对角线有 $\frac{8 \times (8-3)}{2} = 20$ 条,

故答案为 1080, 360, 20

【点睛】本题考查多边形的内角和, 外角和, 对角线的知识, 解答本题的关键是熟练掌握 n 边形的内角和公式: $180^\circ \times (n-2)$; 任意多边形的外角和均为 360° , 与边数无关; 多边形

对角线条数为 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条.

4. 已知 n 边形的内角和为 1800° , 那么 n 的值为_____.

【答案】 12

【解析】

【分析】根据多边形的内角和公式求解即可.

【详解】由题意可得: $(n-2) \times 180^\circ = 1800^\circ$,

解得 $n = 12$,

故答案为: 12.

【点睛】本题考查了多边形的内角和, 解题的关键是熟练掌握多边形的内角和公式.

5. 从 n 边形的一个顶点出发画对角线, 可以将这个 n 边形分割成_____个三角形.

【答案】 $(n-2)$

【解析】

【分析】从 n 边形的一个顶点出发, 连接这个点与其余各顶点, 可以把一个多边形分割成 $(n-2)$ 个三角形, 据此即可解答.

【详解】解: 从 n 边形的一个顶点出发, 连接这个点与其余各顶点, 可以把一个多边形分割成 $(n-2)$ 个三角形.

故答案为: $(n-2)$.

【点睛】本题主要考查多边形的对角线, 掌握从 n 边形的一个顶点出发, 分别连接这个点与其余各顶点, 形成的三角形个数为 $n-2$ 是解答本题的关键.

6. 已知一个正多边形的一个内角是 120° , 则这个多边形的边数是_____.

【答案】6

【解析】

【分析】一个正多边形的每个内角都相等，根据内角与外角互为邻补角，因而就可以求出外角的度数. 根据任何多边形的外角和都是 360° 度，利用 360 除以外角的度数就可以求出外角的个数，即多边形的边数.

【详解】解： $\because$ 一个正多边形的一个内角是 120° ,

$\therefore$ 这个正多边形的一个外角为: $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$,

$\therefore$ 多边形的外角和为 360° ,

$\therefore 360^\circ \div 60^\circ = 6$,

则这个多边形是六边形.

故答案为: 6.

【点睛】考查了多边形内角与外角，根据外角和的大小与多边形的边数无关，由外角和求正多边形的边数，是常见的题目，需要熟练掌握.

7. 已知关于 x 的方程 $\frac{1}{x^2-4} = \frac{k}{x-2}$ 有增根，那么 $k =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】先去分母得 $1 = k(x+2)$ ，再把增根 $x = \pm 2$ 代入即可求得 k 值.

【详解】解: $\frac{1}{x^2-4} = \frac{k}{x-2}$,

去分母得: $1 = k(x+2)$,

由分式方程有增根，得到 $x^2 - 4 = 0$ ，即 $x = \pm 2$,

把 $x = 2$ 代入整式方程 $1 = k(x+2)$,

解得 $k = \frac{1}{4}$.

把 $x = -2$ 代入整式方程 $1 = k(x+2)$

无解.

故答案为: $\frac{1}{4}$.

【点睛】本题主要考查分式方程的解法及增根问题，解题的关键是熟知分式方程的解法.

8. 已知关于 x 的方程 $m + \sqrt{x-2} = 4$ 有实数解，那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \leq 4$ 且 $4 \geq m$

【解析】

【分析】根据二次根式的非负性，即可求解.

【详解】 $\because m + \sqrt{x-2} = 4$

$$\therefore \sqrt{x-2} = 4 - m$$

$$\therefore 4 - m \geq 0$$

$$\therefore m \leq 4$$

故答案为: $m \leq 4$

【点睛】本题考查二次根式的非负性，解题的关键是掌握二次根式值的特点.

9. 已知方程 $\sqrt{2t+x} = t$ 有一根为 $x=3$ ，那么 $t =$ _____.

【答案】3

【解析】

【分析】将 $x=3$ 代入 $\sqrt{2t+x} = t$ 求得 x 的值即可.

【详解】解：将 $x=3$ 代入 $\sqrt{2t+x} = t$ 可得: $\sqrt{2t+3} = t$

所以 $t^2 - 2t - 3 = 0$ ，解得 $t=3$ 或 $t=-1$

由 $\sqrt{2t+x} = t \geq 0$ ，则 $t=3$.

故答案为 3.

【点睛】本题主要考查了方程的根，使方程两边相等的未知数的值叫做方程的根.

10. 写出一个由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组，使它的解是 $\begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = -3 \end{cases}$;

$\begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 2 \end{cases}$ ，那么该方程组可以是_____.

【答案】 $\begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 6 \end{cases}$

【解析】

【分析】解答本题时，首先观察给出的两组解的特点，发现两组解中第一组中的 x 与第二组中的 y 互为相反数，第一组中的 y 与第二组中的 x 互为相反数，所以可以肯定的是无论哪组中的 x 与 y 的差都是 1，两组中的 x 与 y 的积都是 6，所以得到符合题意的一组方程组.

【详解】解：由题可得：

$$\because x_1 - y_1 = 1, \quad x_2 - y_2 = 1, \quad x_1 y_1 = 6, \quad x_2 y_2 = 6,$$

$$\therefore \begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 6 \end{cases},$$

故填: $\begin{cases} x-y=1 \\ xy=6 \end{cases}$.

【点睛】 本题考查了二元一次方程和一个二元二次方程, 熟练掌握其定义是解此题的关键.

11. 初二年级进行篮球比赛, 每个班都与其他班级比赛一场, 共进行 36 场比赛, 那么初二年级共有_____个班级.

【答案】 9

【解析】

【分析】 设这个学校初二年级共有 x 个班级, 根据该校初二年级共进行了 36 场比赛, 即可得出关于 x 的一元二次方程, 解之取其正值即可得出结论.

【详解】 解: 设这个学校初二年级共有 x 个班级,

依题意得: $\frac{1}{2}x(x-1)=36$,

整理得: $x^2-x-72=0$,

解得: $x_1=9$, $x_2=-8$ ($x=-8$ 不符合题意, 舍去).

答: 这个学校初二年级共有 9 个班级.

故答案为: 9.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的应用, 找准等量关系, 正确列出一元二次方程是解题的关键.

12. 某厂一月份产值为 2 万元, 以后每月产值的增长率都为 x , 且第一季度总产值为 10 万元, 那么可以列出方程是_____.

【答案】 $2+2(1+x)+2(1+x)^2=10$

【解析】

【分析】 由题意可求出二月份产值为 $2(1+x)$ 万元, 三月份产值为 $2(1+x)^2$ 万元. 再根据第一季度总产值为 10 万元即可列出方程.

【详解】 由题意可求出二月份产值为 $2(1+x)$ 万元,

$\therefore$ 三月份产值为 $2(1+x)^2$ 万元.

$\therefore$ 第一季度总产值为 10 万元,

$\therefore$ 可以列出方程是 $2+2(1+x)+2(1+x)^2=10$.

故答案为: $2+2(1+x)+2(1+x)^2=10$.

【点睛】 本题考查一元二次方程的实际应用. 理解题意, 找出等量关系, 列出等式是解题关键.

13. 已知直角三角形的一条直角边长度为 6, 另一条直角边长比斜边小 2; 那么这个直角三角形的周长为_____.

【答案】 24

【解析】

【分析】 设直角三角形的斜边长是 x , 则另一条直角边长是 $(x-2)$, 再根据勾股定理列方程求解即可.

【详解】 解: 设直角三角形的斜边长是 x , 则另一条直角边长是 $(x-2)$.

根据勾股定理, 得 $(x-2)^2 + 6^2 = x^2$, 解得: $x=10$,

则斜边长是 10, 另一条直角边为 8.

所以直角三角形的周长为 $10+8+6=24$

故答案为: 24

【点睛】 本题主要考查了勾股定理的应用, 根据勾股定理正确列出方程求解是解题关键.

14. 关于 x 的方程 $mx=1-n$ 无解, 那么 m 、 n 满足的条件是_____.

【答案】 $m=0$ 且 $n \neq 1$

【解析】

【分析】 根据方程 $mx=1-n$ 无解的条件即可解答.

【详解】 解: $\because mx=1-n$,

当 $m \neq 0$,

$$\therefore x = \frac{1-n}{m},$$

当 $m=0$, $1-n=0$ 时, 即 $n=1$;

此时方程有无数个解;

当 $m=0$, $1-n \neq 0$ 即 $n \neq 1$ 时,

此时, 方程无解;

综上: 关于 x 的方程 $mx=1-n$ 无解, $m=0$ 且 $n \neq 1$.

故答案为: $m=0$ 且 $n \neq 1$.

【点睛】 本题考查了一元整式方程的无解问题, 根据方程无解得出关于 m , n 的值是解题关键.

15. 若实数 x 、 y 满足 $\sqrt{x+y} \cdot (\sqrt{x+y} + 2) = 3$, 则 $x+y =$ _____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 设 $t = \sqrt{x+y}$, 将原方程变形, 进而解一元二次方程即可求得 t 的值, 进而求得 $x+y$

的值.

【详解】设 $t = \sqrt{x+y}$, 原方程为: $t(t+2) = 3$

$$\text{即 } t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$\text{解得: } t_1 = -3, t_2 = 1$$

$$\because t = \sqrt{x+y} > 0$$

$$\therefore t = 1$$

$$\therefore x + y = 1$$

故答案为: 1

【点睛】本题考查了无理方程及解一元二次方程, 掌握换元法是解题的关键.

$$16. \text{ 关于 } x, y \text{ 的方程组 } \begin{cases} kx^2 + 2y - 8 = 0 \\ y - x = 3 \end{cases} \text{ 有两个不相同的实数解, 则 } k \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\text{【答案】 } k > -\frac{1}{2} \text{ 且 } k \neq 0$$

【解析】

【分析】利用代入消元法可得出 $kx^2 + 2x - 2 = 0$, 再根据题意可知该方程有两个不相同的实数解, 结合一元二次方程根的判别式和一元二次方程的定义即得出 $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4k \times (-2) > 0$, 且 $k \neq 0$, 解出 k 的解集即可.

$$\text{【详解】解: } \begin{cases} kx^2 + 2y - 8 = 0 \text{ ①} \\ y - x = 3 \text{ ②} \end{cases},$$

$$\text{由②得: } y = x + 3 \text{ ③},$$

$$\text{将③代入①得: } kx^2 + 2(x+3) - 8 = 0,$$

$$\text{整理, 得: } kx^2 + 2x - 2 = 0$$

$$\because \text{关于 } x, y \text{ 的方程组 } \begin{cases} kx^2 + 2y - 8 = 0 \\ y - x = 3 \end{cases} \text{ 有两个不相同的实数解,}$$

$$\therefore kx^2 + 2x - 2 = 0 \text{ 有两个不相同的实数解,}$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4k \times (-2) > 0, \text{ 且 } k \neq 0,$$

$$\therefore k > -\frac{1}{2} \text{ 且 } k \neq 0.$$

$$\text{故答案为: } k > -\frac{1}{2} \text{ 且 } k \neq 0.$$

【点睛】本题考查解方程组, 根据一元二次方程的解得情况求参数, 一元二次方程的定义. 掌握一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根的判别式为 $\Delta = b^2 - 4ac$, 且当 $\Delta > 0$ 时, 该方

程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ 时，该方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，该方程没有实数根是解题关键.

17. 若实数 x 满足 $\frac{2x^2+2}{x} - \frac{5x}{x^2+1} = 3$ ，那么 $\frac{x}{x^2-4x+1} =$ _____.

【答案】 $-\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】先将原方程化为 $2\left(x + \frac{1}{x}\right) - \frac{5}{x + \frac{1}{x}} = 3$ ，再令 $y = x + \frac{1}{x}$ ，进一步将原方程化为

$2y - \frac{5}{y} = 3$ ，解方程求出 y 的值，即可得到 $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ ，即可求出原式的值.

【详解】解： $\therefore \frac{2x^2+2}{x} - \frac{5x}{x^2+1} = 3$

$\therefore 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - \frac{5}{x + \frac{1}{x}} = 3$

令 $y = x + \frac{1}{x}$ ，则原方程为 $2y - \frac{5}{y} = 3$ ，整理得： $2y^2 - 3y - 5 = 0$

解得： $y_1 = \frac{5}{2}$ ， $y_2 = -1$ （不符合题意，舍去）

$\therefore x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$

$\therefore \frac{x}{x^2-4x+1} = \frac{1}{x-4+\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{5}{2}-4} = -\frac{2}{3}$

故答案为： $-\frac{2}{3}$

【点睛】本题考查了分式方程和一元二次方程的解法，解题关键是熟练掌握分式方程和一元二次方程的解法.

二、选择题

18. 下列方程有实数解的是（ ）

A. $\sqrt{2x^2+1} = 0$ B. $\sqrt{x-2} + x = 1$ C. $\sqrt{x-3} + 4 = 0$ D.

$\sqrt{2x+3} = -x$

【答案】D

【解析】

【分析】根据二次根式的值的特点及解一元二次方程，即可求解.

【详解】A、 $\because \sqrt{2x^2+1}=0$ ， $\therefore 2x^2+1=0$ $\therefore$ 该方程无解；故此选项错误；

B、 $\because \sqrt{x-2}+x=1$ ， $\therefore \sqrt{x-2}=1-x$ ，方程整理得： $x-2=(1-x)^2$ ，该方程无解；故此选项错误；

C、 $\because \sqrt{x-3}+4=0$ ， $\therefore \sqrt{x-3}=-4$ $\therefore$ 该方程无解；故此选项错误；

D、 $\because \sqrt{2x+3}=-x$ ， $\therefore 2x+3=x^2$ ，解得： $x=3$ 或 $x=-1$ ；故此选项正确

【点睛】本题考查含二次根式的方程的求解，解题的关键是掌握含二次根式的方程的求解方法.

19. 方程组 $\begin{cases} (x-1)(y+3)=0 \\ y^2=x \end{cases}$ 的实数解的个数是 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】C

【解析】

【分析】把 $y^2=x$ 代入原方程，再化简成 $(y+1)(y-1)(y+3)=0$ ，解方程即可求解.

【详解】解： $\because y^2=x$

$$\therefore (x-1)(y+3)=0$$

$$\therefore (y^2-1)(y+3)=0$$

$$\therefore (y+1)(y-1)(y+3)=0$$

$$\therefore y+1=0 \text{ 或 } y-1=0 \text{ 或 } y+3=0$$

$$\therefore y=-1 \text{ 或 } y=1 \text{ 或 } y=-3$$

故选 C

【点睛】本题考查了因式分解解方程，解题关键是熟练掌握平方差公式和解方程.

20. 甲乙两队要限期完成某工程，甲队独做提前 2 天完成，乙队独做要延期 5 天，现在两队合作 3 天后余下的由乙队独做，正好如期完工，设工程期限为 x 天，那么可列方程为 ()

A. $\frac{3}{x+2} + \frac{x}{x-5} = 1$

B. $\frac{3}{x-2} = \frac{x}{x-5}$

C. $\frac{3}{x-2} + \frac{x}{x+5} = 1$

D. $\frac{3}{x-2} + \frac{x}{x+5} = x$

【答案】C

【解析】

【分析】设工作总量为 1，工程期限为 x 天，可得甲、乙两工程队的工作效率，然后根据等量关系“两队合作 3 天后余下的由乙队独做，正好如期完工”即可列出方程。

【详解】解：设工作总量为 1，工程期限为 x 天，那么甲工程队的工作效率为： $\frac{1}{x-2}$

，乙工程队的工作效率为： $\frac{1}{x+5}$ 。

根据题意，所列方程为： $3\left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+5}\right) + \frac{1}{x+5}(x-3) = 1$

化简得 $\frac{3}{x-2} + \frac{x}{x+5} = 1$ 。

故选：C。

【点睛】本题主要考查了由实际问题抽象出分式方程，读懂题意，设出未知数，找出合适的等量关系是解答本题的关键。

21. 如果 $x > 0$ ， $y > 0$ ，且 $3x - 2y = \sqrt{xy}$ ，那么 $\frac{y}{x}$ 的值是（ ）

- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{9}{4}$

【答案】A

【解析】

【分析】先给 $3x - 2y = \sqrt{xy}$ 左右平方得到 $9x^2 + 4y^2 - 12xy = 0$ ，再给方程左右同除 x^2 可得 $4\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 12\left(\frac{y}{x}\right) + 9 = 0$ ，进而求得 $\frac{y}{x} = 1$ 或 $\frac{y}{x} = \frac{3}{2}$ ；然后分 $\frac{y}{x} = 1$ 和 $\frac{y}{x} = \frac{3}{2}$ 两种情况，分别代入 $3x - 2y$ ，根据算术平方根的非负性检验即可解答。

【详解】解： $3x - 2y = \sqrt{xy}$

$$9x^2 + 4y^2 - 12xy = xy$$

$$9x^2 + 4y^2 - 13xy = 0$$

$$9 + 4\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 13\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

$$4\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 13\left(\frac{y}{x}\right) + 9 = 0$$

$$\text{解得：}\frac{y}{x} = 1 \text{ 或 } \frac{y}{x} = \frac{9}{4}$$

当 $\frac{y}{x} = 1$ 时，即 $x = y$ ， $3x - 2x = x > 0$ ，符合题意；

当 $\frac{y}{x} = \frac{9}{4}$ 时, 即 $3x = \frac{4}{3}y$, $\frac{4}{3}y - 2y = -\frac{2}{3}y < 0$, 不符合题意;

所以 $\frac{y}{x} = 1$.

故选 A.

【点睛】本题主要考查了无理方程的解法, 将无理方程转化为整式方程, 可能会出现增根, 挖掘出隐含条件 $3x - 2x > 0$ 是正确解答本题的关键.

三、解答题

22. 解关于 x 的方程 $ax^2 = 2x^2 + 4$

【答案】当 $a \leq 2$ 时, 无解; 当 $a > 2$ 时, $x_1 = \frac{2\sqrt{a-2}}{a-2}$, $x_2 = \frac{-2\sqrt{a-2}}{a-2}$

【解析】

【分析】原方程可整理为 $(a-2)x^2 = 4$, 即可分类讨论: ①当 $a \leq 2$ 时, 原方程不成立, 即此时无解; ②当 $a > 2$ 时, 利用直接开平方法解方程即可.

【详解】解: $ax^2 = 2x^2 + 4$,

$$(a-2)x^2 = 4.$$

分类讨论: ①当 $a \leq 2$ 时, 则 $a-2 \leq 0$,

$$\because x^2 \geq 0,$$

$$\therefore (a-2)x^2 \leq 0,$$

则 $(a-2)x^2 = 4$ 不成立, 即此时无解;

$$\text{②当 } a > 2 \text{ 时, 则 } x^2 = \frac{4}{a-2},$$

$$\therefore x_1 = \frac{2\sqrt{a-2}}{a-2}, \quad x_2 = \frac{-2\sqrt{a-2}}{a-2}.$$

综上所述: 当 $a \leq 2$ 时, 无解; 当 $a > 2$ 时, $x_1 = \frac{2\sqrt{a-2}}{a-2}$, $x_2 = \frac{-2\sqrt{a-2}}{a-2}$.

【点睛】本题主要考查平方的非负性, 解一元二次方程, 分母有理化. 利用分类讨论的思想是解题关键.

23. 解方程 $\frac{2}{2-x} + \frac{5x-2}{x^2-4} = 1$

【答案】 $x = 1$

【解析】

【分析】先把分式方程去分母转化为整式方程, 求出整式方程的解, 最后再检验即可.

【详解】解： $\frac{2}{2-x} + \frac{5x-2}{x^2-4} = 1$

$$\frac{2}{2-x} - \frac{5x-2}{(2+x)(2-x)} = 1$$

方程两边同时乘以 $(2+x)(2-x)$ 得： $2(2+x) - (5x-2) = 4-x^2$,

化简，得： $x^2 - 3x + 2 = 0$,

解得： $x=1$ 或 $x=2$,

检验：把 $x=1$ 代入 $(2+x)(2-x) \neq 0$ ；把 $x=2$ 代入 $(2+x)(2-x) = 0$

$\therefore$ 原方程的解是 $x=1$.

【点睛】本题主要考查了解分式方程，掌握分式方程的基本步骤是解答本题的关键．解分式方程的检验是解答本题的易错点．

24. 解方程 $\sqrt{x+5} - \sqrt{2x+3} = 1$

【答案】 $x=-1$

【解析】

【分析】先对式子两边进行平方，然后把含有根号的式子移到方程的一边，再进行平方即可化成一元二次方程，解方程求得 x 的值，然后进行检验即可．

【详解】解：方程两边平方，得： $x+5+2x+3-2\sqrt{(x+5)(2x+3)} = 1$,

即 $3x+7 = 2\sqrt{(x+5)(2x+3)}$,

两边平方，得： $9x^2 + 42x + 49 = 8x^2 + 52x + 60$ ，化简得： $x^2 - 10x - 11 = 0$ ，即

$(x+11)(x-1) = 0$,

解得： $x=11$ 或 -1 .

经检验： $x=-1$ 是方程的根， -11 是增根．

则原方程的根是： $x=-1$.

【点睛】本题主要考查了无理方程的解法，在解无理方程是最常用的方法是两边平方法及换元法．

25. 解方程组 $\begin{cases} x+y=3 \\ 4x^2-4xy+y^2=1 \end{cases}$

【答案】 $\begin{cases} x=\frac{4}{3} \\ y=\frac{5}{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{7}{3} \end{cases}$

【解析】

【分析】对②中的式子进行变形，把原来的二元二次方程转化为两个二元一次方程组，解方程即可.

$$\text{【详解】} \begin{cases} x+y=3 \text{①} \\ 4x^2-4xy+y^2=1 \text{②} \end{cases}$$

由②得: $(2x-y)^2=1$

即: $2x-y=1$ 或 $2x-y=-1$

所以原方程组可化为两个二元一次方程组:

$$\begin{cases} x+y=3, \\ 2x-y=1; \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+y=3, \\ 2x-y=-1; \end{cases}$$

分别解这两个方程组，得原方程组的解是 $\begin{cases} x=\frac{4}{3} \\ y=\frac{5}{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{7}{3} \end{cases}$

【点睛】本题考查二元二次方程，对②中的式子进行变形，把原来的二元二次方程转化为两个二元一次方程组是解题的关键，需要学生掌握加减消元法.

26. 解方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ 6x^2+xy-y^2=0 \end{cases}$

$$\text{【答案】} \begin{cases} x_1=\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ y_1=-\frac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2=-\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ y_2=\frac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_3=\frac{\sqrt{10}}{5} \\ y_3=\frac{3\sqrt{10}}{5} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_4=-\frac{\sqrt{10}}{5} \\ y_4=-\frac{3\sqrt{10}}{5} \end{cases}$$

【解析】

【分析】由②得: $(3x-y)(2x+y)=0$ ，得出 $3x-y=0$ 或 $2x+y=0$ ，解得: $y=3x$ 或 $y=-2x$ ，分别代入①，解一元二次方程即可求解.

$$\text{【详解】解: } \begin{cases} x^2+y^2=4 \text{①} \\ 6x^2+xy-y^2=0 \text{②} \end{cases}$$

由②得: $(3x-y)(2x+y)=0$

$\therefore 3x-y=0$ 或 $2x+y=0$

解得: $y=3x$ 或 $y=-2x$,

当 $y=-2x$ 时，代入①得: $x^2+(-2x)^2=4$

解得: $x_1=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $x_2=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ y_1 = -\frac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ y_2 = \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

当 $y = 3x$ 时, 代入①得: $x^2 + (3x)^2 = 4$

$$\text{解得: } x_3 = \frac{\sqrt{10}}{5}, x_4 = -\frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\therefore \begin{cases} x_3 = \frac{\sqrt{10}}{5} \\ y_3 = \frac{3\sqrt{10}}{5} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_4 = -\frac{\sqrt{10}}{5} \\ y_4 = -\frac{3\sqrt{10}}{5} \end{cases},$$

$$\text{综上所述, 方程组的解为: } \begin{cases} x_1 = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ y_1 = -\frac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ y_2 = \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_3 = \frac{\sqrt{10}}{5} \\ y_3 = \frac{3\sqrt{10}}{5} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_4 = -\frac{\sqrt{10}}{5} \\ y_4 = -\frac{3\sqrt{10}}{5} \end{cases}.$$

【点睛】本题主要考查解二元二次方程组, 解高次方程的根本思想是化归思想, 解题的关键是: 次数较高可通过因式分解再代入等方法降幂求解即可.

27. 某商店以每件 20 元的价格购进一批文具盒, 然后以每只 30 元的价格出售, 结果每周可以售出 400 只, 后来经过市场调查发现: 当单价每提高 0.5 元, 每周销售量会少 10 只, 如果某一周销售这种文具盒的总利润是 4500 元, 那么这周每只文具盒的售价为多少元?

【答案】35 元

【解析】

【分析】设这周每只文具盒的售价为 x 元, 则每只文具盒的利润为 $(x - 20)$ 元, 销量为

$$\left[400 - \frac{(x - 30)}{0.5} \times 10 \right] \text{ 只, 根据总利润是 4500 元列出方程, 即可求解.}$$

【详解】解: 设这周每只文具盒的售价为 x 元,

$$\text{由题意知: } (x - 20) \left[400 - \frac{(x - 30)}{0.5} \times 10 \right] = 4500,$$

$$\text{整理得 } x^2 - 70x + 1225 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = x_2 = 35,$$

即这周每只文具盒的售价为 35 元.

【点睛】本题考查一元二次方程的实际应用, 找准等量关系, 列出一元二次方程是解题的关键.

28. 某厂家接到定制 5400 套防护服任务, 可以选择甲、乙两条流水线中的一条承担此任务, 已知乙流水线每天比甲流水线多加工 90 套防护服, 甲流水线加工这批防护服所花的时间比乙流水线多 10 天, 且甲、乙两条流水线每天的生产成本分别为 0.6 万元与 0.8 万元, 问厂家选择哪条流水线可使生产成本较小? 为什么?

【答案】乙流水线成本较小, 因为甲流水线成本 18 万元, 乙流水线成本 16 万元

【解析】

【分析】设甲流水线每天加工 x 套防护服, 则乙流水线每天加工 $(x+90)$ 套防护服, 再根据“甲流水线加工这批防护服所花的时间比乙流水线多 10 天”求得甲、乙每天的生产量, 再分别求出甲、乙的生产成本, 最后比较即可解答.

【详解】解: 设甲流水线每天加工 x 套防护服, 则乙流水线每天加工 $x+90$ 套防护服,

$$\text{则 } \frac{5400}{x} - 10 = \frac{5400}{x+90}, \text{ 解得: } x = 180 \text{ 或 } x = -270$$

经检验: $x = 180$ 是分式方程的根, 且符合题意; $x = -270$ 不符合题意舍去,

则乙流水线每天加工 270 套防护服

所以甲需要 $5400 \div 180 = 30$ 天, 乙需要 $5400 \div 270 = 20$ 天,

所以甲、乙两条流水线每天的生产成本分别为 18 万元和 16 万元.

所以乙流水线成本较小.

【点睛】本题主要考查了分式方程的应用, 审清题意、找准等量关系、列出分式方程是解答本题的关键.

附加题

29. 解方程 $\sqrt[3]{5+x} + \sqrt[3]{4-x} = 3$

【答案】 $x_1 = 3, x_2 = -4$

【解析】

【分析】设 $\sqrt[3]{5+x} = a, \sqrt[3]{4-x} = b$, 可得 $\begin{cases} a+b=3 \text{ ①} \\ a^3+b^3=9 \text{ ②} \end{cases}$, 进而解得 $a_1 = 1, a_2 = 2$, 则 $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$

或 $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$ 再分类讨论, 即可求解.

【详解】解: 设 $\sqrt[3]{5+x} = a, \sqrt[3]{4-x} = b$,

依题意, $\begin{cases} a+b=3 \text{ ①} \\ a^3+b^3=9 \text{ ②} \end{cases}$

② $\div$ ① 得: $a^2 - ab + b^2 = 3$

即 $(a+b)^2 - 3ab = 3 \text{ ③}$

①代入③得, $ab=2$ ④

①代入④得: $a(3-a)=2$,

解得: $a_1=1, a_2=2$

$$\therefore \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$$

若 $a=1$, 即 $\sqrt[3]{5+x}=1$, 则 $x=-4$,

若 $a=2$, 即 $\sqrt[3]{5+x}=2$, 则 $x=3$,

综上所述 $x_1=3$, $x_2=-4$

【点睛】 本题考查了解无理方程, 掌握立方和公式, 解一元二次方程是解题的关键.

30. 实数 a, b 使关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} xy-x^2=1 \\ xy^2+ax^2+bx+a=0 \end{cases}$ 有实数解 (x, y)

(1) 求证 $|y| \geq 2$;

(2) 求 a^2+b^2 的最小值;

【答案】 (1) 见解析 (2) $\frac{16}{5}$

【解析】

【分析】 (1) 根据 $xy-x^2=1$ 得: $x \neq 0$, $y = x + \frac{1}{x}$, 分 $x > 0$ 或 $x < 0$ 两种情况求出 y 的取值范围, 即可得出结论;

(2) 由 $xy-x^2=1$ 得: $x \neq 0$, $x^2+1=xy$, 得出 $y^2+ay+b=0$, 根据 $(a^2+b^2)(y^2+1)-(ay+b)^2=(a-by)^2 \geq 0$, 得出 $(a^2+b^2)(y^2+1) \geq (ay+b)^2$, 从而得出 $a^2+b^2 \geq y^2+1+\frac{1}{y^2+1}-2$, 再由 $y^2+1+\frac{1}{y^2+1}-2 \geq 5+\frac{1}{5}-2=\frac{16}{5}$, 得出结果即可.

【小问1详解】

证明: 由 $xy-x^2=1$ 得: $x \neq 0$, $y = x + \frac{1}{x}$,

当 $x > 0$ 时,

$$\therefore \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 \geq 0,$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} - 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 0,$$

$$\text{即 } x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

$$\therefore \text{当 } x > 0 \text{ 时, } y \geq 2;$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } -x > 0,$$

$$\therefore \left(\sqrt{-x} - \frac{1}{\sqrt{-x}} \right)^2 \geq 0,$$

$$\therefore -x + \frac{1}{-x} - 2\sqrt{-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{-x}} \geq 0,$$

$$\text{即 } -\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 \geq 0$$

$$\therefore -\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 2,$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} \leq -2$$

$$\therefore \text{当 } x < 0 \text{ 时, } y \leq -2;$$

$$\therefore |y| \geq 2;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: 由 } xy - x^2 = 1 \text{ 得: } x \neq 0, \quad x^2 + 1 = xy,$$

$$\text{由 } xy^2 + ax^2 + bx + a = 0 \text{ 得: } x(y^2 + b) + a(x^2 + 1) = 0,$$

$$\text{即 } x(y^2 + b) + axy = 0,$$

$$\therefore x(y^2 + ay + b) = 0,$$

$$\because x \neq 0,$$

$$\therefore y^2 + ay + b = 0,$$

$$\therefore y^2 + ay + b = 0 \text{ 有解, 且满足 } |y| \geq 2,$$

$$\therefore ay + b = -y^2,$$

$$\therefore (a^2 + b^2)(y^2 + 1) - (ay + b)^2$$

$$= a^2y^2 + a^2 + b^2y^2 + b^2 - (a^2y^2 + 2aby + b^2)$$

$$= a^2y^2 + a^2 + b^2y^2 + b^2 - a^2y^2 - 2aby - b^2$$

$$= a^2 - 2aby + b^2y^2$$

$$= (a - by)^2,$$

$$\because (a - by)^2 \geq 0,$$

$$\therefore (a^2 + b^2)(y^2 + 1) \geq (ay + b)^2,$$

$$\therefore a^2 + b^2 \geq \frac{(ay + b)^2}{y^2 + 1} = \frac{y^4}{y^2 + 1}$$

$$= \frac{(y^2 + 1)^2 - 2(y^2 + 1) + 1}{y^2 + 1}$$

$$= y^2 + 1 + \frac{1}{y^2 + 1} - 2,$$

$$\because |y| \geq 2,$$

$$\therefore y^2 + 1 \geq 5,$$

$$\text{令 } y^2 + 1 = z, \quad y^2 + 1 + \frac{1}{y^2 + 1} = w,$$

$$\text{则 } w = z + \frac{1}{z},$$

$\because$ 当 $z > 1$ 时, w 随 z 的增大而增大,

$\therefore$ 当 $y^2 + 1 = 5$ 时, $y^2 + 1 + \frac{1}{y^2 + 1}$ 有最小值,

$$\therefore y^2 + 1 + \frac{1}{y^2 + 1} - 2 \geq 5 + \frac{1}{5} - 2 = \frac{16}{5},$$

当 $|y| = 2$ 时, 等号成立,

$\therefore a^2 + b^2$ 有最小值 $\frac{16}{5}$, 当且仅当 $\begin{cases} a = by \\ |y| = 2 \end{cases}$ 时等号成立,

$$\text{又 } \because \begin{cases} y = x + \frac{1}{x} \\ y^2 + ay + b = 0 \end{cases},$$

$$\text{联立解得: } \begin{cases} y=2 \\ x=1 \\ a=-\frac{8}{5} \\ b=-\frac{4}{5} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} y=-2 \\ x=-1 \\ a=\frac{8}{5} \\ b=-\frac{4}{5} \end{cases},$$

综上所述, $a^2 + b^2$ 的最小值为 $\frac{16}{5}$.

【点睛】 本题主要考查了基本不等式的性质, 解高次方程组, 解题的关键是熟练掌握基本不等式性质.