

新黄浦实验学校 2022 学年第二学期第二次阶段练习

八年级数学学科卷

(考试时间 90 分钟, 满分 100 分)

一、选择题

1. 一次函数 $y = (k-1)x + k$ 中, y 随着 x 的增大而减小, 那么 k 的取值范围是 ()

- A. $k < 0$ B. $k < 1$ C. $k > 0$ D. $k > 1$

【答案】B

【解析】

【分析】根据已知条件“一次函数 $y = (k-1)x + k$ 中, y 随着 x 的增大而减小”可推知 $k-1 < 0$, 即 $k < 1$

【详解】一次函数 $y = (k-1)x + k$ 中, y 随着 x 的增大而减小,

$\therefore k-1 < 0$, 即 $k < 1$

综上所述, k 的取值范围是 $k < 1$

故选 B

【点睛】此题考查一次函数图象与系数的关系, 解题关键在于分析出 $k-1$ 的值是正负

2. 下列方程中, 有实数根的方程是 ()

- A. $x^2 + 3 = 0$
B. $x^3 + 3 = 0$
C. $\frac{1}{x^2 - 3} = 0$
D. $\sqrt{x} + 3 = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】根据分式方程和无理方程的解法如果能求得方程的解说明方程有实数解, 一元二次方程有实数根只需得到其根的判别式为非负数.

【详解】解: A、即 $x^2 = -3$, 因为实数的平方 ≥ 0 , 故本选项错误;

B、 $x^3 = -3$ 即 $x = -\sqrt[3]{3}$, 有解, 故本选项正确;

C、分式分母不为 0, 所以本题无解, 故本选项错误;

D、即 $\sqrt{x} = -3$, 实数的算术平方根为大于 0, 故本选项错误;

故选 B.

【点睛】 本题考查了无理方程，涉及到了实数的平方 ≥ 0 ，负数由立方根，注意区别.

3. 用换元法解分式方程 $\frac{2x}{x-1} - \frac{5x-5}{x} + 3 = 0$ 时，如果设 $\frac{x}{x-1} = y$ ，那么原方程可化为 ()

- A. $2y^2 + 3y - 5 = 0$; B. $2y^2 - 5y + 3 = 0$; C. $y^2 + 3y - 5 = 0$; D. $y^2 - 5y + 3 = 0$.

【答案】 A

【解析】

【分析】 把 $\frac{x}{x-1} = y$ 代入原方程，得出 $2y - \frac{5}{y} + 3 = 0$ ，再进行整理即可.

【详解】 解：整理 $\frac{2x}{x-1} - \frac{5x-5}{x} + 3 = 0$ ，得

$$\frac{2x}{x-1} - 5\left(\frac{x-1}{x}\right) + 3 = 0,$$

把 $\frac{x}{x-1} = y$ 代入方程得：

$$2y - \frac{5}{y} + 3 = 0,$$

整理得： $2y^2 + 3y - 5 = 0$,

故选 A.

【点睛】 本题考查了解分式方程，解题的关键是熟练掌握利用换元法，把一个式子做为整体进行替换，将分式方程化简为一元二次方程.

4. 在梯形 ABCD 中，AD//BC，AB = CD，那么下列结论中正确的是 ().

- A. $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 是相等向量; B. $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 是相等向量;
C. $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 是相反向量; D. $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 是平行向量.

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据相等向量、相反向量、平行向量的定义解答即可.

【详解】 解：A、AB=CD，但 AB 不平行于 CD， $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$ ，故本选项错误；

B、AD//BC，AB=CD，AC=BD，但 AC 不平行于 BD， $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD}$ ，故本选项错误；

C、AD//BC， $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 不一定是相反向量，故本选项错误；

D、AD//BC， $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{CB}$ 是平行向量，故本选项正确.

故答案为：D.

【点睛】本题考查了平面向量的相关知识，掌握相等向量、相反向量、平行向量的定义是解答本题的关键.

5. 甲、乙两同学同时从学校出发，步行 10 千米到某博物馆，已知甲每小时比乙多走 1 千米，结果乙比甲晚 20 分钟，设乙每小时走 x 千米，则所列方程正确的是 ()

A. $\frac{10}{x+1} - \frac{10}{x} = 20$ B. $\frac{10}{x} - \frac{10}{x+1} = 20$ C. $\frac{10}{x+1} - \frac{20}{60} = \frac{10}{x}$ D. $\frac{10}{x} - \frac{20}{60} = \frac{10}{x+1}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意，等量关系为乙走的时间 - $\frac{20}{60}$ = 甲走的时间，根据等量关系式列写方程.

【详解】 $20\text{min} = \frac{20}{60}\text{h}$

根据等量关系式，方程为： $\frac{10}{x} - \frac{20}{60} = \frac{10}{x+1}$

故选：D

【点睛】本题考查列写分式方程，注意题干中的单位不统一，需要先换算单位.

6. 下列说法错误的是 ()

- A. 四个角都是直角的四边形是矩形
- B. 两个底角相等的梯形是等腰梯形
- C. 每组邻边都相等的四边形是菱形
- D. 一组对边平行一组对角相等的四边形是平行四边形

【答案】B

【解析】

【分析】根据矩形的判定，菱形的判定，平行四边形的判定，等腰梯形的判定进行分析即可.

【详解】A. 四个角都是直角的四边形是矩形，故 A 中说法正确，不符合题意；

B. 同一底边上的两个底角相等的梯形是等腰梯形，故 B 中说法错误，故本选项符合题意；

C. 每组邻边都相等实际是四条边都相等故为菱形，故 C 中说法正确，故本选项不符合题意；

D. 一组对边平行且一组对角相等可推出两组对角分别相等，是平行四边形，故 D 中说法正确，故本选项不符合题意；

故选：B.

【点睛】本题考查了矩形的判定，菱形的判定，平行四边形的判定，等腰梯形的判定，熟练掌握以上判定是解题的关键.

二、填空题

7. 方程 $2x^3 - 16 = 0$ 的解是_____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 求出 $x^3 = 8$ ，两边开立方根，即可求出 x .

【详解】 解： $2x^3 - 16 = 0$,

$$2x^3 = 16,$$

$$x^3 = 8,$$

$$x = 2,$$

故答案为： 2.

【点睛】 本题考查了高次方程的解法和立方根，关键是能由 $x^3 = 8$ 求出 x .

8. 方程 $\sqrt{x+2} = -x$ 的解是_____.

【答案】 $x = -1$.

【解析】

【分析】 把方程两边平方后求解，注意检验.

【详解】 把方程两边平方得 $x+2 = x^2$,

$$\text{整理得 } (x-2)(x+1) = 0,$$

$$\text{解得： } x = 2 \text{ 或 } -1,$$

经检验， $x = -1$ 是原方程的解.

故本题答案为： $x = -1$.

【点睛】 本题考查无理方程的求法，注意无理方程需验根.

9. 过点 $(-1, 3)$ 且与直线 $y = -x$ 平行的直线表达式为_____.

【答案】 $y = -x + 2$

【解析】

【分析】 根据直线相互平行的表达式特征是一次项系数相等得到与直线 $y = -x$ 平行的直线表达式为 $y = -x + b$ ，再根据该直线过 $(-1, 3)$ ，即可得到答案.

【详解】 解： $\because$ 过点 $(-1, 3)$ 的直线与直线 $y = -x$ 平行，

$\therefore$ 可设该直线为 $y = -x + b$ ，则 $3 = -(-1) + b$ ，解得 $b = 2$ ，

∴ 过点 $(-1, 3)$ 且与直线 $y = -x$ 平行的直线表达式为 $y = -x + 2$,

故答案为: $y = -x + 2$.

【点睛】 本题考查直线平行的特征及待定系数法求一次函数表达式, 熟记直线平行一次项系数相等是解决问题的关键.

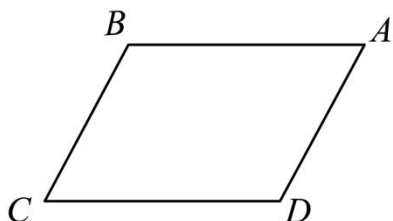
10. 已知平行四边形 $ABCD$ 中, 若 $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, 则 $\overrightarrow{DB} =$ _____. (用 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 表示)

【答案】 $\vec{b} - \vec{a}$

【解析】

【分析】 根据题意, 作出图形, 由向量减法运算的三角形法则即可得到答案.

【详解】 解: 如图所示:



根据向量减法运算的三角形法则可得 $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \vec{b} - \vec{a}$,

故答案为: $\vec{b} - \vec{a}$.

【点睛】 本题考查向量的加法运算, 熟练掌握向量运算法则是解决问题的关键.

11. 关于 y 的方程 $b(y - 2) = 2$ ($b \neq 0$) 的解是_____.

【答案】 $y = \frac{2b + 2}{b}$

【解析】

【详解】 试题分析: 根据一元一次方程的解法, 只要先去括号, 再移项, 合并同类项, 化系数为 1, 从而得到方程的解.

解: 去括号得, $by - 2b = 2$,

移项得, $by = 2b + 2$,

∵ $b \neq 0$,

∴ 方程两边同除以 b 得, $y = \frac{2b + 2}{b}$.

故答案为 $y = \frac{2b + 2}{b}$.

考点: 解 一元一次方程.

12. 若十边形的每个内角都相等, 则该十边形每个内角度数为_____.

【答案】 144° ##144 度

【解析】

【分析】 根据题意可知，该多边形是正多边形，从而由多边形外角和为 360° ，每个内角都相等，结合互补即可得到答案.

【详解】 解： $\because$ 十边形的每个内角都相等，

$\therefore$ 这个十边形是等边十边形，则由多边形外角和为 360° 可得每一个外角为 $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$ ，

$\therefore$ 由邻补角定义可得该十边形每个内角度数为 $180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$ ，

故答案为： 144° .

【点睛】 本题考查正多边形的判定与性质，熟记多边形外角和为 360° 是解决问题的关键.

13. 顺次连接三角形三边的中点所构成的三角形周长为 16，那么原来的三角形周长是_____.

【答案】 32

【解析】

【分析】 根据三角形的中位线定理知：三条中位线围成的三角形的各边是对应原三角形各边的一半，结合题意，通过计算即可得到答案.

【详解】 解： 根据题意可知，原三角形的周长 $= 2 \times 16 = 32$

故答案为： 32.

【点睛】 本题考查了三角形中位线的知识，解题的关键是熟练掌握三角形中位线的性质，从而完成求解.

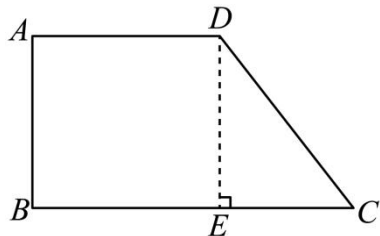
14. 直角梯形一腰长为 12cm ，此腰与一底的夹角是 30° ，那么另一腰长是_____ cm .

【答案】 6

【解析】

【分析】 根据题意，作出图形，过 D 作 $DE \perp BC$ ，由含 30° 的直角三角形边的关系即可得到答案.

【详解】 解： 过 D 作 $DE \perp BC$ ，如图所示：



$\because CD = 12\text{cm}$ ， $\angle C = 30^\circ$ ，

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中， $DE = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} \times 12 = 6\text{cm}$ ，

故答案为： 6.

【点睛】本题考查直角梯形性质及含 30° 的直角三角形边的关系，熟记含 30° 的直角三角形 30° 所对的边是斜边的一半是解决问题的关键.

15. 已知梯形的中位线长为 10cm ，高为 5cm ，则此梯形的面积为_____ cm^2 .

【答案】50

【解析】

【分析】根据中位线性质可知梯形（上底+下底） $=2\times 10=20\text{cm}$ ，再由梯形面积公式代值求解即可得到答案.

【详解】解： $\because$ 梯形的中位线长为 10cm ，高为 5cm ，

$\therefore$ 由梯形中位线性质可知（上底+下底） $=2\times 10=20\text{cm}$ ，

$\therefore$ 此梯形的面积为 $\frac{1}{2}$ （上底+下底） $\times$ 高 $=\frac{1}{2}\times 20\times 5=50\text{cm}^2$ ，

故答案为：50.

【点睛】本题考查梯形中位线性质及梯形面积公式，熟记梯形中位线性质及梯形面积公式是解决问题的关键.

16. 若关于 x 的方程 $\frac{x-8}{x-7}-\frac{k}{7-x}=8$ 有增根，则 k 的值是_____.

【答案】1

【解析】

【详解】分析：首先根据分式方程的解法求出 x 的值，然后根据增根得出 k 的值.

详解：两边同乘以 $(x-7)$ 可得： $x-8+k=8(x-7)$ ，解得： $x=\frac{48+k}{7}$ ，

$\because$ 方程有增根， $\therefore x=7$ ，即 $\frac{48+k}{7}=7$ ，解得： $k=1$.

点睛：本题主要考查的是解分式方程以及增根的问题，属于基础题型. 解决这个问题的关键就是解出方程的解，根据增根得出答案.

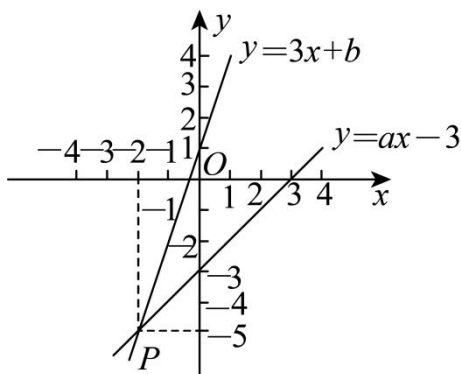
17. 已知函数 $y=3x+b$ 和 $y=ax-3$ 的图像交于 $P(-2,-5)$ ，且 $a>0$ ， $b>0$ ，则可得不等式 $3x+b>ax-3$ 的解集是_____.

【答案】 $x>-2$

【解析】

【分析】先画函数图像，再根据 $y=3x+b$ 的图像对应的点在函数 $y=ax-3$ 的图像上面所对应的自变量取值范围即可解答.

【详解】解：如图：



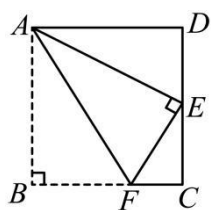
从函数图像可得，当 $x > -2$ 时，函数 $y = 3x + b$ 的图像对应的点在函数 $y = ax - 3$ 的图像上面.

$\therefore$ 不等式 $3x + b > ax - 3$ 的解集为 $x > -2$.

故答案为: $x > -2$.

【点睛】 本题主要考查了一次函数与一元一次不等式的综合，正确画出函数图像并掌握数形结合思想是解答本题的关键.

18. 如图，四边形 ABCD 为矩形纸片，把纸片 ABCD 折叠，使点 B 恰好落在 CD 边的中点 E 处，折痕为 AF，若 $CD=6$ ，则 AF 等于_____.



【答案】 $4\sqrt{3}$

【解析】

【详解】 分析：由图形折叠的性质得到 $BF=EF$, $AE=AB$, 再由 E 是 CD 的中点可求出 ED 的长, 再求出 $\angle EAD$ 的度数, 设 $FE=x$, 则 $AF=2x$, 在 $\triangle AFE$ 中利用勾股定理即可求解.

详解：由折叠的性质得 $BF=EF$, $AE=AB$,

$\because CD=6$, E 为 CD 中点,

$\therefore ED=3$,

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中,

$\therefore AE=AB=CD=6$,

$\therefore DE=\frac{1}{2}AE$,

$\therefore \angle EAD=30^\circ$,

$\therefore \angle FAE=\frac{1}{2}(90^\circ-30^\circ)=30^\circ$,

在 $Rt\triangle AFE$ 中,

设 $FE=x$, 则 $AF=2x$,

根据勾股定理得,

$$AF^2 = AE^2 + EF^2,$$

$$\text{即 } (2x)^2 = 6^2 + x^2,$$

解得, $x_1=2\sqrt{3}$, $x_2=-2\sqrt{3}$ (舍去).

$$\therefore AF=2x=4\sqrt{3}.$$

故答案为 $4\sqrt{3}$.

点睛: 本题考查了矩形、直角三角形的性质、轴对称的性质、勾股定理等知识. 借助图形中的数量转化并利用勾股定理建立方程是解题的关键.

三、解答题

19. 已知一次函数的图像经过点 $(2, -3)$, 在 y 轴上的截距是 5, 求这个一次函数的解析式.

【答案】 $y = -4x + 5$

【解析】

【分析】 直接利用待定系数法求解即可.

【详解】 解: 设这个一次函数的解析式为 $y = kx + 5$,

$\because$ 一次函数的图像经过点 $(2, -3)$,

$$\therefore -3 = 2x + 5, \text{ 解得: } x = -4,$$

$$\therefore y = -4x + 5.$$

答: 这个一次函数的解析式为 $y = -4x + 5$.

【点睛】 本题考查了待定系数法求一次函数的解析式, 理解截距的是解题的关键.

20. 解关于 x 的方程: $(a-1)x=3$.

【答案】 $x = \frac{3}{a-1}$

【解析】

【分析】 有题意可知 $a \neq 1$, 然后进行系数化成 1 可得.

【详解】 解: 由题意可知 $a \neq 1$ 时, 解得: $x = \frac{3}{a-1}$.

【点睛】 此题考查了解一元一次方程, 熟练掌握运算法则是解决本题的关键.

21. 解方程: $\frac{3}{x-1} + \frac{6}{1-x^2} = 1$

【答案】 $x=2$

【解析】

【分析】 先方程两边都乘 $(x+1)(x-1)$ 化成整式方程, 再解一元一次方程, 检验即可得答案.

【详解】 解: $\frac{3}{x-1} + \frac{6}{1-x^2} = 1$,

方程两边都乘 $(x+1)(x-1)$, 得 $3(x+1)-6=(x+1)(x-1)$,

整理得: $x^2-3x+2=0$,

解得 $x_1=1, x_2=2$,

经检验, $x=1$ 为原方程的增根 (舍去), $x=2$ 是方程的根

则原方程的根为 $x=2$.

【点睛】 本题考查了解分式方程, 熟练掌握分式方程的解法是解题关键, 注意: 解分式方程必须检验, 避免出现增根.

22. 解方程组: $\begin{cases} x^2-4y^2=4 \\ x-2y=1 \end{cases}$

【答案】 $\begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=\frac{3}{4} \end{cases}$

【解析】

【分析】 先利用平方差公式把①变形为 $(x+2y)(x-2y)=4$ ③, 从而得到 $x+2y=4$ ④, 然后由②+④可得 $x=\frac{5}{2}$, 再把 $x=\frac{5}{2}$ 代入②, 即可求解.

【详解】 解: $\begin{cases} x^2-4y^2=4 \text{ ①} \\ x-2y=1 \text{ ②} \end{cases}$,

由①得: $(x+2y)(x-2y)=4$ ③,

把②代入③得: $x+2y=4$ ④,

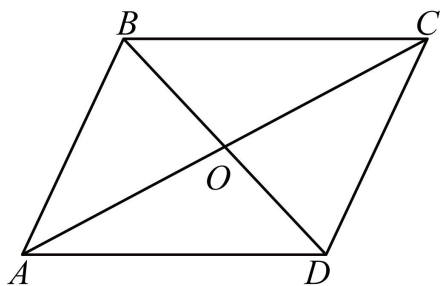
由②+④得: $x=\frac{5}{2}$,

把 $x=\frac{5}{2}$ 代入②, 得: $y=\frac{3}{4}$,

$$\therefore \text{原方程的解为} \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = \frac{3}{4} \end{cases}.$$

【点睛】 本题主要考查了解方程组，多项式的因式分解，根据题意，利用平方差公式把①变形为 $(x+2y)(x-2y)=4$ 是解题的关键.

23. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC, BD 交于点 O ，设 $\overrightarrow{AO} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BO} = \vec{b}$.



(1) 试用 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示下列向量 $\overrightarrow{BC} =$ _____, $\overrightarrow{CD} =$ _____;

(2) 求作 $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BC}$ (保留痕迹，写出结果，不写作法)

【答案】 (1) $\vec{b} + \vec{a}$, $-\vec{a} + \vec{b}$

(2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据平行四边形可得 $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CO} = -\overrightarrow{OC} = -\vec{a}$, 再根据 $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CD}$, 即可求解;

(2) 在 BC 的延长线上截取 $BC = CE$, 连接 OE 即可所求.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD} = \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{CO} = -\overrightarrow{OC} = -\vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC} = \vec{b} + \vec{a}, \quad \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CD} = -\vec{a} + \vec{b},$$

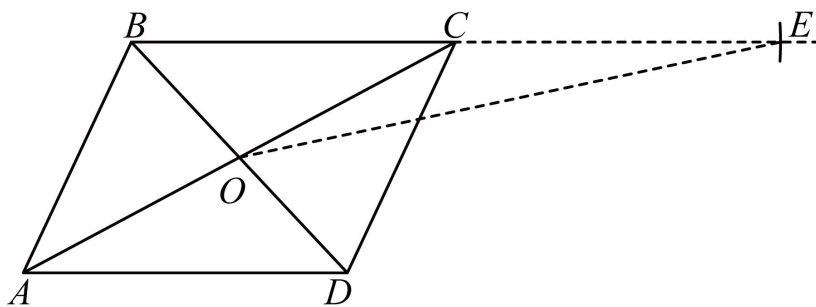
故答案为: $\vec{b} + \vec{a}$, $-\vec{a} + \vec{b}$;

【小问 2 详解】

解: 如图, OE 即为所求; 理由如下:

$$\because \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CE}, \quad \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC},$$

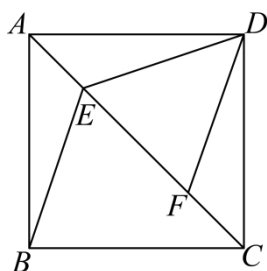
$$\therefore \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{OE}.$$



【点睛】 本题考查平行四边形的性质、

作图—线段、平面向量，熟练掌握相关知识是解题的关键.

24. 如图，四边形 $ABCD$ 是矩形， E 是对角线 AC 上一点， $EB = ED$ 且 $\angle CBE = \angle CDE$.



(1) 求证：四边形 $ABCD$ 是正方形；

(2) 若 F 是对角线 AC 上一点，且 $\angle ADE = \angle CDF$ ，求证： $BE \parallel DF$.

【答案】 (1) 证明见解析

(2) 证明见解析

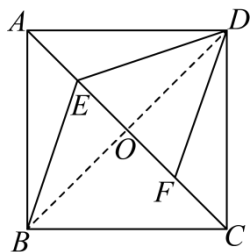
【解析】

【分析】 (1) 连接 BD ，由 $EB = ED$ ，则 $\angle OBE = \angle ODE$ ，然后证明 $CB = CD$ ，即可得到结论成立；

(2) 先证明 $\angle ABE = \angle CDF$ ，然后证明 $\angle OBE = \angle ODF$ ，即可得到结论成立.

【小问 1 详解】

证明：连接 BD ，如图：



$$\because EB = ED,$$

$$\therefore \angle OBE = \angle ODE,$$

$$\therefore \angle CBE = \angle CDE,$$

$$\therefore \angle CBE - \angle OBE = \angle CDE - \angle ODE,$$

$$\therefore \angle CBO = \angle CDO,$$

$$\therefore CB = CD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形;

【小问 2 详解】

证明: $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形

$$\therefore \angle ABO = \angle ADO,$$

$$\therefore \angle OBE = \angle ODE,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle ADE = \angle CDF,$$

$$\therefore \angle ABO = \angle CDO = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle OBE = \angle ODF,$$

$$\therefore BE \parallel DF;$$

【点睛】 本题考查了矩形的性质, 正方形的性质和判定, 解题的关键是熟练掌握所学的知识进行证明.

25. 甲乙两人各加工 30 个零件, 甲比乙少用 1 小时完成任务; 乙改进操作方法, 使生产效率提高了一倍, 结果乙完成 30 个零件的时间比甲完成 24 个零件所用的时间少 1 小时. 问甲乙两人原来每小时各加工多少个零件.

【答案】 6 个、5 个.

【解析】

【详解】 试题分析: 甲乙原来生产零件之间有一定的等量关系. 乙改进之后, 两者之间又存在一定的等量关系. 所以可以用二元一次方程组解答, 分别设甲乙原来每小时加工零件分别为 x, y 个, 根据题意列出方程.

解: 设甲乙两人原来每小时各加工零件分别为 x 个、 y 个,

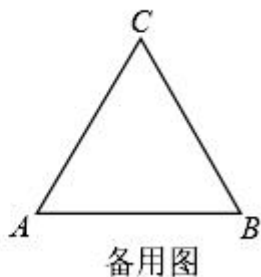
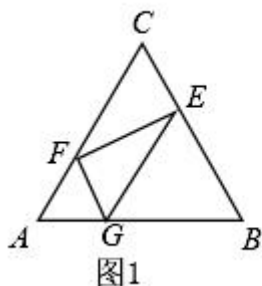
$$\text{由题意得, } \begin{cases} \frac{30}{y} - \frac{30}{x} = 1 \\ \frac{24}{x} - \frac{30}{2y} = 1 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = 6 \\ y = 5 \end{cases}.$$

经检验它是原方程的组解, 且符合题意.

答: 甲乙两人原来每小时各加工零件分别为 6 个、5 个.

26. 如图 1, $\triangle ABC$ 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形, 已知 G 是边 AB 上的一个动点 (G 点不与 A 、 B 点重合), 且 $GE \parallel AC$, $GF \parallel BC$, 若 $AG = x$, $S_{\triangle GEF} = y$.



- (1) 求 y 与 x 的函数关系式, 并写出函数定义域;
- (2) 点 G 在运动过程中, 能否使 $\triangle GEF$ 成为直角三角形, 若能, 请求出 AG 长度; 若不能, 请说明理由;
- (3) 点 G 在运动过程中, 能否使四边形 $GFEB$ 构成平行四边形, 若能, 直接写出 $S_{\triangle GEF}$ 的值; 若不能, 请说明由.

【答案】(1) $y = -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{3}{2}x$ ($0 < x < 2\sqrt{3}$)

(2) $AG = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ 或 $AG = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

(3) 能, $S_{\triangle GEF} = \frac{3}{4}\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 如图, 过点 F 作 $FD \perp GE$ 于点 D . 由题意易得 $\triangle AFG$, $\triangle BEG$ 都是等边三角形, 则可得 $\angle EGF = 60^\circ$ 及 FG 、 EG , 可求得 FD , 则可得 y 与 x 的关系;

(2) 点 G 在运动过程中, 能使 $\triangle GEF$ 成为直角三角形; 分两种情况考虑: $\angle EFG = 90^\circ$; $\angle FEG = 90^\circ$, 利用 30° 度角直角三角形的性质即可求得 AG 的值;

(3) 若四边形 $GFEB$ 构成平行四边形, 则 $\triangle CEF$ 是等边三角形, $\triangle FEG$ 是等边三角形, 由等边三角形的性质可求得 $\triangle FEG$ 的边长, 则可求得其面积.

【小问 1 详解】

如图, 过点 F 作 $FD \perp GE$ 于点 D .

$\because \triangle ABC$ 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形, 且 $GE \parallel AC$, $GF \parallel BC$,

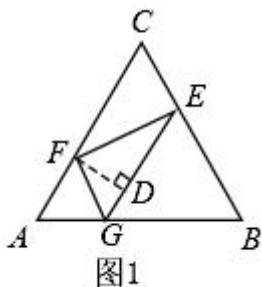
$\therefore \triangle AFG$ 是等边三角形, $\triangle BEG$ 是等边三角形,

$\therefore FG = AG = x$, $EG = BG = 2\sqrt{3} - x$, $\angle EGF = 60^\circ$,

∴ 在 $\text{Rt}\triangle FDG$ 中, $\angle DFG=30^\circ$,

$$\therefore DG = \frac{1}{2}FG = \frac{1}{2}x, \text{ 由勾股定理得: } FD = \sqrt{FG^2 - DG^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}EG \cdot FD = \frac{1}{2}(2\sqrt{3} - x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x = -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{3}{2}x \quad (0 < x < 2\sqrt{3});$$



【小问 2 详解】

当 $\angle EFG = 90^\circ$ 时,

$$\therefore \angle EGF = 60^\circ,$$

$$\therefore FG = \frac{1}{2}EG,$$

$$\text{即 } x = \frac{1}{2}(2\sqrt{3} - x), \text{ 解得: } x = \frac{2}{3}\sqrt{3};$$

当 $\angle FEG = 90^\circ$ 时,

$$\therefore \angle EGF = 60^\circ,$$

$$\therefore EG = \frac{1}{2}FG,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2}x = 2\sqrt{3} - x, \text{ 解得: } x = \frac{4}{3}\sqrt{3};$$

$$\text{综上所述: } AG = \frac{2}{3}\sqrt{3} \text{ 或 } AG = \frac{4}{3}\sqrt{3};$$

【小问 3 详解】

若四边形 $GFEB$ 构成平行四边形,

则 $\triangle CEF$ 是等边三角形, $\triangle FEG$ 是等边三角形,

$$\therefore EF = FG = AG = GB = \frac{1}{2}AB = \sqrt{3},$$

$$\text{由 (1) 知, } FD = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore S_{\triangle GEF} = \frac{1}{2}GE \cdot FD = \frac{1}{2}\sqrt{3} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}\sqrt{3}.$$

【点睛】 本题主要考查等边三角形的性质和直角三角形性质的综合运用, 注意分类讨论思想的运用.