

八年级数学练习

一、单项选择题

1. 下列四个函数中，为一次函数的是 ()

A. $y = x^2 - 2x$

B. $y = \frac{1}{x} + 1$

C. $y = -2x$

D. $y = kx + 1$ (k 为常数)

【答案】C

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的定义，根据形如 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 为一次函数，进行逐一分析作答.

【详解】 解： A、 $y = x^2 - 2x$ ，不符合 $y = kx + b$ ($k \neq 0$)，故该选项是错误的；

B、 $y = \frac{1}{x} + 1$ ，不符合 $y = kx + b$ ($k \neq 0$)，故该选项是错误的；

C、 $y = -2x$ ，符合 $y = kx + b$ ($k \neq 0$)，故该选项是正确的；

D、 $y = kx + 1$ (k 为常数)，不符合 $y = kx + b$ ($k \neq 0$)，故该选项是错误的；

故选：A.

2. 下列方程中，有实数根的是 ()

A. $\sqrt{x-1} + 2 = 0$

B. $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}$

C. $x^2 - x + 1 = 0$

D. $x^3 + 1 = 0$

【答案】D

【解析】

【分析】 本题主要考查平方根、立方根、分式方程及一元二次方程的解法，熟练掌握各个运算是解题的关键；因此此题可根据利用平方根、立方根解方程、分式方程及一元二次方程的解法可进行求解.

【详解】 解： A、由 $\sqrt{x-1} \geq 0$ 可知 $\sqrt{x-1} + 2 = 0$ 无解，故不符合题意；

B、由 $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}$ 去分母得 $x = 1$ ，经检验当 $x = 1$ 时， $x - 1 = 0$ ，所以原方程无解，故不符合题意；

C、由 $x^2 - x + 1 = 0$ 可知： $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$ ，所以原方程无解，故不符合题意；

D、由 $x^3 + 1 = 0$ 可知 $x^3 = -1$ ，解得 $x = -1$ ，原方程有解，故符合题意；

故选 D.

3. 一个正多边形的每个外角都是 45° ，则这个多边形是 ()

A. 正方形

B. 正六边形

C. 正八边形

D. 正十边形

【答案】C

【解析】

【分析】利用 360° 除以外角的度数就是正多边形的边数.

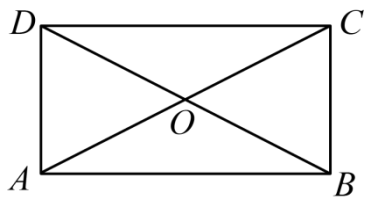
【详解】 $360^\circ \div 45^\circ = 8$.

故它是正八边形.

故选: C.

【点睛】本题主要考查了多边形的外角和定理, 理解任何多边形的外角和都是 360° 是关键.

4. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 下列结论中正确的是 ()



- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ B. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ C. $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{CO}$ D. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查向量的概念, 熟练掌握相等向量和相反向量是解题的关键; 因此此题可根据向量的相关概念及矩形的性质进行求解.

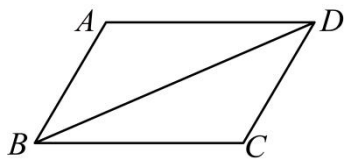
【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AO = OC = OD = OB, DC \parallel AB, AD \parallel BC, DC = AB, AD = BC,$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|, \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC};$

故选: D.

5. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 若添加一个条件, 能判断四边形 $ABCD$ 为平行四边形的是 ()



- A. $AD = BC$ B. $AB = CD$ C. $AB = AD$ D. $\angle ABD = \angle BDC$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的判定定理, 根据平行四边形的判定定理逐项分析判断即可求解.

【详解】解: A. 根据 $AB \parallel CD$, $AD = BC$, 不能判断四边形为平行四边形, 故该选项不正确, 不符合题意;

B. 由 $AB \parallel CD$, $AB = CD$, 根据一组对边平行且相等的四边形为平行四边形, 故该选项正确, 符合题

意;

C. 根据 $AB \parallel CD$, $AB = AD$, 不能判断四边形为平行四边形, 故该选项不正确, 不符合题意;

D. 根据 $AB \parallel CD$, $\angle ABD = \angle BDC$, 不能判断四边形为平行四边形, 故该选项不正确, 不符合题意;

故选: B.

6. 某中学八年级举行15 km 春季远足活动, 两小组匀速前进, 第一小组的步行速度比第二小组快0.5 km/h,

第一小组比第二小组早0.7 h 到达目的地, 求两个小组的步行速度. 若设第二小组的步行速度为 x km/h, 则

可列出方程为 ()

A. $\frac{15}{x} - \frac{15}{x+0.5} = 0.7$

B. $\frac{15}{x+0.5} - \frac{15}{x} = 0.7$

C. $\frac{15}{x} - \frac{15}{x-0.5} = 0.7$

D. $\frac{15}{x-0.5} - \frac{15}{x} = 0.7$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题主要考查分式方程的应用, 解题的关键是理解题意; 因此此题可根据题意直接列出分式方程即可.

【详解】 解: 由题意得: 第一小组的步行速度为 $(x+0.5)$ km/h, 则:

列出方程为 $\frac{15}{x} - \frac{15}{x+0.5} = 0.7$;

故选 A.

二、填空题

7. 方程 $\frac{1}{2}x^4 - 8 = 0$ 的根是____

【答案】 $x = \pm 2$

【解析】

【分析】 本题考查了解高次方程, 能把高次方程转化成低次方程是解此题的关键. 移项, 系数化成1, 再两次开方即可.

【详解】 解: $\frac{1}{2}x^4 - 8 = 0$,

$$\frac{1}{2}x^4 = 8,$$

$$x^4 = 16,$$

开方得: $x^2 = 4$, 或 $x^2 = -4$ (舍去),

开方得: $x = \pm 2$,

故答案为: $x = \pm 2$.

8. 方程 $\frac{x^2 + 3x}{x + 3} = 0$ 的根是_____.

【答案】 $x = 0$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程, 根据解分式方程的步骤解答即可求解, 掌握解分式方程的步骤是解题的关键.

【详解】 解: 方程两边乘以 $x + 3$ 得, $x^2 + 3x = 0$,

解得 $x = 0$ 或 $x = -3$,

检验: 当 $x = 0$ 时, $x + 3 = 3 \neq 0$, 符合题意;

当 $x = -3$ 时, $x + 3 = 0$, 不合题意;

$\therefore$ 原分式方程的解为 $x = 0$,

故答案为: $x = 0$.

9. 方程 $\sqrt{2x-1}-1=0$ 的根是_____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题考查了利用算术平方根的定义求方程的解, 由方程 $\sqrt{2x-1}-1=0$ 可得 $\sqrt{2x-1}=1$, 根据算术平方根的定义即可到 $2x-1=1$, 解方程即可求解, 理解算术平方根的定义是解题的关键.

【详解】 解: $\because \sqrt{2x-1}-1=0$,

$$\therefore \sqrt{2x-1}=1,$$

$$\therefore 2x-1=1,$$

$$\therefore x=1,$$

故答案为: 1.

10. 一次函数 $y = -3x - 6$ 的图象与 x 轴的交点坐标是 _____.

【答案】 $(-2, 0)$

【解析】

【分析】 在解析式中, 令 $y=0$, 即可求得横坐标, 则与 x 轴的交点坐标即可求得.

【详解】 令 $y=0$, 得: $-3x-6=0$, 解得: $x=-2$,

则图象与 x 轴的交点坐标是: $(-2,0)$.

故答案为: $(-2,0)$.

【点睛】 本题考查了函数图象与坐标轴的交点的求法, 是需要熟记的内容.

11. 计算: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} =$ _____.

【答案】 $\vec{0}$

【解析】

【分析】 本题主要考查向量的线性运算, 熟练掌握向量的线性运算是解题的关键; 因此此题可根据向量的线性运算进行求解即可.

【详解】 解: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$;

故答案为 $\vec{0}$.

12. 某商品原价 100 元, 经过连续两次涨价后, 售价为 144 元, 设两次涨价的百分率相同, 则这个百分率是_____.

【答案】 20%

【解析】

【分析】 根据原价为 100 元, 连续两次涨价 x 后, 现价为 144 元, 根据增长率的求解方法, 列方程求 x .

【详解】 解: 设这个百分率是 x ,

依题意有: $100(1+x)^2 = 144$,

$1+x = \pm 1.2$,

解得: $x_1 = 20\%$, $x_2 = -2.2$ (舍去),

答: 这个百分率是 20%.

故答案为: 20%.

【点睛】 此题主要考查了一元二次方程的应用, 解题关键是根据增长率的求解公式列出方程.

13. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle B = 2\angle A$, 则 $\angle D$ 的度数为_____.

【答案】 120° ## 120 度

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形的性质, 掌握平行四边形的性质是解题的关键.

由平行四边形的性质可得 $\angle A + \angle B = 180^\circ$, $\angle B = \angle D$, 即可求解.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ, \angle B = \angle D,$$

$$\because \angle B = 2\angle A,$$

$$\therefore \angle A = 60^\circ, \angle B = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle D = 120^\circ,$$

故答案为: 120° .

14. 菱形周长 40cm, 一条对角线长 12cm, 另一条对角线为 _____ cm.

【答案】 16

【解析】

【分析】 根据题意作出相应图形, 然后利用菱形的性质得出 $AB=BC=CD=AD=10\text{cm}$, $AO=CO=6\text{cm}$, 再利用勾股定理求解即可.

【详解】 解: 如图所示, 四边形 $ABCD$ 为菱形, 对角线 AC 长为 12cm,

$\therefore$ 菱形周长为 40cm,

$$\therefore AB=BC=CD=AD=10\text{cm},$$

$$\text{又} \because AC=12\text{cm},$$

$$\therefore AO=CO=6\text{cm},$$

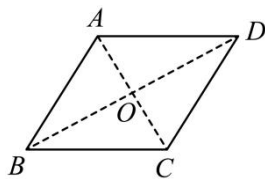
在 $Rt\triangle AOB$ 中,

$$BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = 8\text{ cm},$$

$$\therefore BD=2BO=16\text{cm},$$

$\therefore$ 另一条对角线长 16cm,

故答案为: 16.



【点睛】 题目主要考查菱形的性质及勾股定理解三角形, 理解题意作出相应图形, 然后运用菱形的性质是解题关键.

15. 当 $m =$ _____, 方程 $\frac{3}{x} + \frac{6}{x-1} = \frac{x+m}{x(x-1)}$ 会产生增根.

【答案】 -3 或 5

【解析】

【分析】用含 m 的代数式表示 x 的值，通过 $x=0$ 或 $x=1$ 时为增根求 m 的值.

【详解】解：方程两边同时乘以 $x(x-1)$ 得，

$$3(x-1) + 6x = x + m,$$

$\therefore$ 方程有增根，

$$\therefore x=0 \text{ 或 } x=1,$$

$$\text{把 } x=0 \text{ 代入 } 3(x-1) + 6x = x + m,$$

$$\text{解得 } m=-3,$$

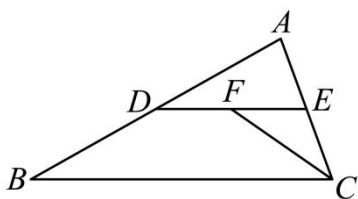
$$\text{把 } x=1 \text{ 代入 } 3(x-1) + 6x = x + m,$$

$$\text{解得 } m=5,$$

故答案为：-3 或 5.

【点睛】本题考查分式方程增根问题，解题关键是将原式化简，分别代入 x 为增根的值.

16. 如图， DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线， $\angle ACB$ 的角平分线交 DE 于点 F ，若 $AC=6$ ， $BC=14$ ，则 DF 的长为 ____.



【答案】4

【解析】

【分析】本题考查了三角形的中位线定理，等腰三角形的判定，角平分线的性质，能熟记三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半是解决问题的关键，根据三角形的中位线得出 $DE=7$ ， $DE \parallel BC$ ，求出 $CE=3$ ，根据平行线的性质得出 $\angle CFE = \angle BCF$ ，根据角平分线的定义得出 $\angle BCF = \angle ECF$ ，得到 $\angle ECF = \angle CFE$ ，根据等腰三角形的判定得出 $EF = CE = 3$ ，即可求出 DF .

【详解】解： $\because DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线， $AC=6$ ， $BC=14$ ，

$$\therefore DE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 14 = 7, \quad AE = CE = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 6 = 3, \quad DE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle CFE = \angle BCF,$$

$$\because CF \text{ 平分 } \angle ACB,$$

$$\therefore \angle BCF = \angle ECF,$$

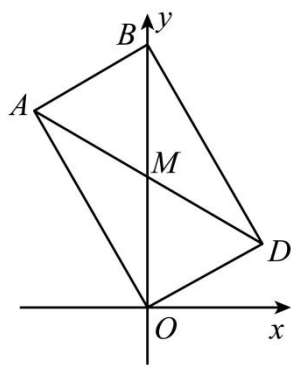
$$\therefore \angle ECF = \angle CFE,$$

$$\therefore EF = CE = 3,$$

$$\therefore DF = DE - EF = 7 - 3 = 4,$$

故答案为：4.

17. 如图：在直角坐标系里点 $B(0,4)$ ，已知 $ABDO$ 为矩形， $\angle DBO = 30^\circ$ ，则点 A 坐标为_____.



【答案】 $(-\sqrt{3}, 3)$

【解析】

【分析】过点 A 作 $AC \perp y$ 轴于点 C ，根据矩形的性质可知 $BM = OM = 2$ ， $AM = BM$ ，由 $\angle DBO = 30^\circ$ 推出 $\angle AMB = 60^\circ$ ，可知 $\triangle ABM$ 是等边三角形，从而推出 CM 、 AC 的长，最后根据 AC 与 CO 的长得出点 A 的坐标.

【详解】解：过点 A 作 $AC \perp y$ 轴于点 C ，

$$\therefore B(0, 4),$$

$$\therefore OB = 4.$$

$\therefore$ 四边形 $ABDO$ 为矩形

$$\therefore AM = BM = DM = \frac{1}{2}OB = 2,$$

$$\therefore \angle BDM = \angle DBO = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AMB = \angle BDM + \angle DBO = 60^\circ$$

$\therefore \triangle ABM$ 是等边三角形.

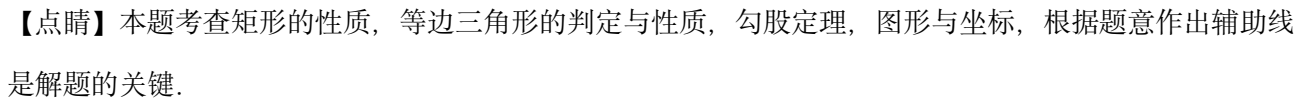
又 $\therefore AC \perp y$ 轴，

$$\therefore CM = \frac{1}{2}BM = 1,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AM^2 - CM^2} = \sqrt{3}, CO = CM + OM = 3,$$

$$\therefore \text{点 } A \text{ 坐标为 } (-\sqrt{3}, 3).$$

故答案为： $(-\sqrt{3}, 3)$.



【解析】

在 ADE 和 $\triangle CDG$ 中,

$$\therefore \begin{cases} AD = CD \\ \angle ADE = \angle CDG \\ DE = DG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDG (\text{SAS})$$

$$\therefore AE = CG$$

$$\therefore DE + CF + CG = EF + CF + AE$$

当 $EF + CF + AE = AC$ 时, 最小,

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore d_1 + d_2 + d_3 \text{ 的最小值为 } 2\sqrt{2},$$

故答案为: $2\sqrt{2}$.

三、简答题

19. 解方程: $x - \sqrt{x-2} = 4$

【答案】 $x=6$

【解析】

【分析】 用换元法求解, 设 $\sqrt{x-2} = y$. 先求 y , 再求 x , 结果需检验.

【详解】 解: 将原方程变形为:

$$x - 2 - \sqrt{x-2} - 2 = 0,$$

$$\text{设 } \sqrt{x-2} = y,$$

$$\text{原方程化为 } y^2 - y - 2 = 0,$$

$$\text{解得 } y_1 = 2, \quad y_2 = -1,$$

$$\text{当 } y = 2 \text{ 时, } \sqrt{x-2} = 2, \text{ 得 } x = 6,$$

$$\text{当 } y = -1 \text{ 时, } \sqrt{x-2} = -1 \text{ 无解.}$$

检验: 把 $x = 6$ 代入原方程, 适合.

$\therefore$ 原方程的解是 $x = 6$.

【点睛】 本题考查了无理方程, 在解无理方程是最常用的方法是两边平方法及换元法, 本题用了换元法.

20. 解方程: $\frac{3}{x^2 - 3x} + \frac{1}{3 - x} = 1.$

【答案】 $x = -1$

【解析】

【分析】 本题主要考查分式方程及一元二次方程的解法，熟练掌握分式方程及一元二次方程的解法是解题的关键；先去分母，然后再进行求解即可．

【详解】解： $\frac{3}{x^2-3x} + \frac{1}{3-x} = 1$

去分母得： $3-x = x^2-3x$ ，

移项、合并同类项得： $x^2-2x-3=0$ ，

解得： $x_1=-1, x_2=3$ ，

经检验：当 $x=-1$ 时， $x^2-3x \neq 0$ ，

当 $x=3$ 时， $x^2-3x=0$ ，

∴ 原分式方程的解为 $x=-1$ ．

21. 解方程组： $\begin{cases} x^2-5xy-6y^2=0 \\ x^2-4xy+4y^2=1 \end{cases}$ ．

【答案】 $\begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{4} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{1}{4} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases}$

【解析】

【分析】 将每个方程因式分解，降次化为两个一次方程，解出重新组合的方程组即可得到答案．

【详解】解： $x^2-5xy-6y^2=0$ 可化为 $(x-6y)(x+y)=0$ ，

∴ $x-6y=0$ 或 $x+y=0$ ，

$x^2-4xy+4y^2=1$ 可化为 $(x-2y+1)(x-2y-1)=0$ ，

∴ $x-2y+1=0$ 或 $x-2y-1=0$ ，

原方程组相当于以下四个方程组：

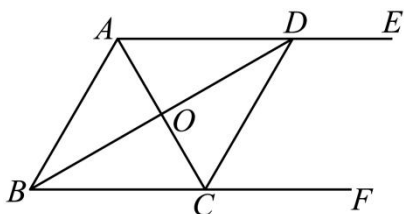
$$\begin{cases} x-6y=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases} \text{①}, \begin{cases} x-6y=0 \\ x-2y-1=0 \end{cases} \text{②}, \begin{cases} x+y=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases} \text{③}, \begin{cases} x+y=0 \\ x-2y-1=0 \end{cases} \text{④}$$

解得①②③④分别得： $\begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{4} \end{cases}$, $\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{1}{4} \end{cases}$, $\begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}$, $\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases}$ ，

$$\therefore \text{原方程组的解是: } \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

【点睛】本题考查解二元二次方程组，将每个二次方程因式分解，降次化为两个一次方程是解题的关键.

22. 如图，已知 $AE \parallel BF$ ， AC 平分 $\angle BAE$ 交 BF 于点 C ， BD 平分 $\angle ABF$ ，交 AE 于点 D ， AC 、 BD 交于点 O ，连接 CD 。



(1) 设 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{OD} = \vec{b}$ 。试用向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 表示下列向量： $\overrightarrow{OB} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\overrightarrow{OC} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\overrightarrow{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\overrightarrow{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 如果 $\angle BAD = 120^\circ$ ， $|\overrightarrow{AB}| = 1$ ，那么 $|\overrightarrow{BD}| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】(1) $-\vec{b}$ ， $-\vec{a}$ ， $-\vec{a} - \vec{b}$ ， $\vec{b} - \vec{a}$

(2) $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 根据向量的和差并结合图形即可解答；

(2) 先说明 $\triangle ABC$ 为等边三角形，再解直角三角形可得 $|\overrightarrow{BO}| = \sin 60^\circ \cdot |\overrightarrow{AB}| = \frac{\sqrt{3}}{2} |\overrightarrow{AB}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，最后根据

$|\overrightarrow{BD}| = 2|\overrightarrow{BO}|$ 即可解答。

【小问 1 详解】

解： $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OD} = -\vec{b}$ ， $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} = -\vec{a}$ ， $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\vec{a} - \vec{b}$ ， $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{b} - \vec{a}$ 。

故答案为： $-\vec{b}$ ， $-\vec{a}$ ， $-\vec{a} - \vec{b}$ ， $\vec{b} - \vec{a}$ 。

【小问 2 详解】

$\because AE \parallel BF$ ， $\angle BAD = 120^\circ$ ， AC 平分 $\angle BAE$ 交 BF 于点 C ，

$\therefore \angle ABC = 60^\circ$ ，

$\because AC$ 平分 $\angle BAE$ 交 BF 于点 C ，

$\therefore \angle BAC = \angle CAD = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形,

$\therefore BD \perp AC$,

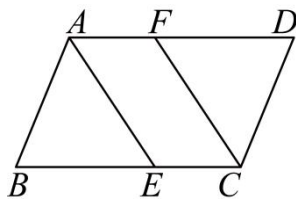
$$\therefore |\overrightarrow{BO}| = \sin 60^\circ \cdot |\overrightarrow{AB}| = \frac{\sqrt{3}}{2} |\overrightarrow{AB}| = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore |\overrightarrow{BD}| = 2|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{3}.$$

【点睛】 本题主要考查了向量的运算, 掌握向量的运算法则是解答本题的关键.

23. 如图, 点 E, F 分别在平行四边形 $ABCD$ 的边 BC, AD 上, 且 $AF = CE$.

求证: $\angle BAE = \angle DCF$.



【答案】 见解析

【解析】

【分析】 本题考查了平行四边形的性质, 全等三角形的判定与性质. 熟练掌握平行四边形的性质, 全等三角形的判定与性质是解题的关键.

证明 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ (SAS), 进而结论得证.

【详解】 证明: $\because$ 平行四边形 $ABCD$,

$$\therefore AB = CD, BC = AD, \angle B = \angle D,$$

$$\therefore AF = CE,$$

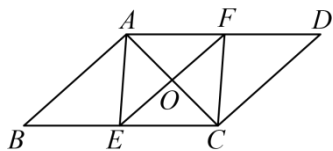
$$\therefore AD - AF = BC - CE, \text{ 即 } DF = BE,$$

$$\therefore AB = CD, \angle B = \angle D, BE = DF,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle BAE = \angle DCF.$$

24. 如图, 在 $ABCD$ 中, O 为 AC 的中点, 点 E, F 分别在 BC, AD 上, EF 经过点 O , $AE = AF$.



(1) 求证: 四边形 $AECF$ 为菱形;

(2) 若 E 为 BC 的中点, $AE = 3$, $AC = 4$. 求 AB 的长.

【答案】 (1) 证明见解析;

(2) $2\sqrt{5}$.

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形的性质、菱形的判定与性质，勾股定理，全等三角形的判定与性质，正确掌握相关性质内容是解题的关键.

(1) 先得出 $\angle AFO = \angle CEO$, $\angle FAO = \angle ECO$. 结合线段中点, 得出 $AO = CO$, 得证 $\triangle AOF \cong \triangle COE$, 根据一组邻边相等的平行四边形是菱形, 即可作答.

(2) 先得出 $OA = \frac{1}{2}AC = 2$, 结合菱形性质, 在 $\text{Rt}\triangle AOE$ 中, 由勾股定理得 $OE = \sqrt{AE^2 - OA^2}$, 代入数值进行计算, 即可作答.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC.$$

$$\therefore \angle AFO = \angle CEO, \angle FAO = \angle ECO.$$

$\because O$ 为 AC 的中点,

$$\therefore AO = CO.$$

$$\therefore \triangle AOF \cong \triangle COE.$$

$$\therefore AF = EC.$$

$$\because AF \parallel EC,$$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 为平行四边形.

$$\because AE = AF,$$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 为菱形.

【小问 2 详解】

解: $\because O$ 为 AC 的中点, $AC = 4$,

$$\therefore OA = \frac{1}{2}AC = 2.$$

$\because$ 四边形 $AECF$ 为菱形,

$$\therefore AC \perp EF.$$

$$\therefore \angle AOE = 90^\circ.$$

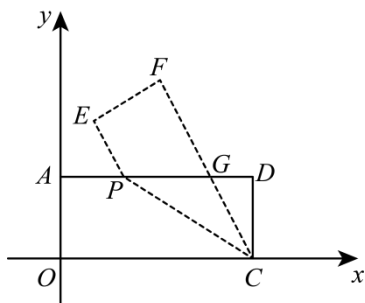
$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle AOE \text{ 中, 由勾股定理得 } OE = \sqrt{AE^2 - OA^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}.$$

$\because E$ 为 BC 的中点,

$$\therefore AB = 2OE = 2\sqrt{5}.$$

【点睛】本题考查了平行四边形的性质、菱形的判定与性质，勾股定理，全等三角形的判定与性质，正确掌握相关性质内容是解题的关键。

25. 如图，已知在平面直角坐标系中， $OADC$ 是矩形， $OA=2$ ， $OC=5$ ，点 P 是边 AD 边上一动点，连结 CP ，将四边形 $AOCP$ 沿 CP 所在直线翻折，落在 $EFCP$ 的位置，点 A 、 O 的对应点分别为点 E 、 F ，边 CF 与边 AD 的交点为点 G 。



(1) 当 P 坐标为 $(2,2)$ 时，求 G 点坐标和直线 CF 的解析式；

(2) 过 G 作 $GH \perp PC$ 交 OC 于 H ，若 $P(x,2)$ ， $H(y,0)$ ，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出它的定义域。

【答案】(1) $G\left(\frac{25}{6}, 2\right)$ ，直线 CF 为： $y = -\frac{12}{5}x + 12$

(2) $y = \frac{21-x^2}{10-2x} (0 \leq x \leq 3)$

【解析】

【分析】本题考查了折叠的性质，矩形的性质，一次函数的应用，勾股定理等知识点，熟练掌握折叠的性质、矩形的性质及勾股定理是解题的关键。

(1) 设 $PG = a$ ，先求出 $GD = 3 - a$ ，再根据勾股定理求出点 G 的坐标，由点 C 的坐标可求出直线 CF 的解析式；

(2) 由折叠的性质得出 $DG = 5 - (5 - y) - x = y - x$ ，利用勾股定理得出 $y = \frac{21-x^2}{10-2x}$

【小问 1 详解】

解：设 $PG = a$ ，

$\because$ 四边形 $OADC$ 是矩形，

$\therefore AD \parallel OC$ ，

$\therefore \angle GPC = \angle PCO$ ，

由折叠得： $\angle PCO = \angle PCG$ ，

$$\therefore \angle PCG = \angle GPC,$$

$$\therefore PG = GC = a,$$

$$\because OA = 2, \quad OC = 5, \quad P(2, 2),$$

$$\therefore PD = 5 - 2 = 3,$$

$$\therefore GD = 3 - a,$$

$$\text{在 Rt}\triangle GDC \text{ 中, } GD^2 + DC^2 = CG^2,$$

$$\therefore 2^2 + (3 - a)^2 = a^2,$$

$$\therefore a = PG = \frac{13}{6},$$

$$\therefore AG = 2 + \frac{13}{6} = \frac{25}{6},$$

$$\therefore G\left(\frac{25}{6}, 2\right),$$

$$\because C(5, 0),$$

设直线 CF 为: $y = kx + b (k \neq 0)$, 则

$$\begin{cases} 5k + b = 0 \\ \frac{25}{6}k + 6 = 2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -\frac{12}{5} \\ b = 12 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } CF \text{ 为: } y = -\frac{12}{5}x + 12.$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because P(x, 2), \quad H(y, 0),$$

$$\text{由对称性可知: } \angle OCP = \angle FCP, \quad OC = CF,$$

$$\because GH \perp PC,$$

$$\therefore CG = CH,$$

$$\therefore FG = OH = y, \quad AP = x,$$

$$\therefore CG = CF - FG = 5 - y,$$

$$\therefore PG = 5 - y,$$

$$\therefore DG = 5 - (5 - y) - x = y - x,$$

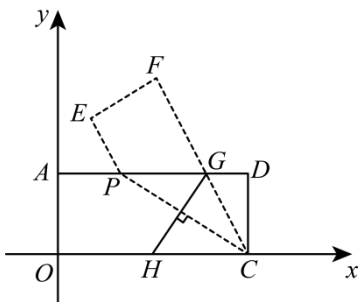
在 $\text{Rt}\triangle GDC$ 中, $CD^2 + DG^2 = CG^2$,

$$\therefore (y - x)^2 + 2^2 = (5 - y)^2,$$

$$\therefore y = \frac{21 - x^2}{10 - 2x},$$

当 CF 与 CD 重叠时, G 与 D 重合, 此时 $AP = 5 - 2 = 3$,

$$\therefore y = \frac{21 - x^2}{10 - 2x} (0 \leq x \leq 3).$$



26. 在初中数学中, 四边形是一个重要的研究对象, 其中涵盖了丰富的知识. 研究如图 1 所示的四边形 $ABCD$, AC , BD 相交于点 E , 且 $AC \perp BD$, 我们将对该图形进行不同补充和改变, 请你利用所学的知识来探讨以下问题:

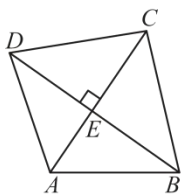


图1

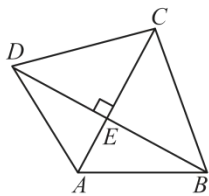


图2

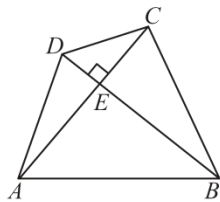


图3

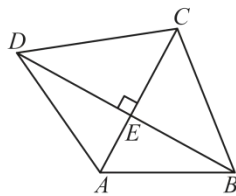


图4

- (1) 如图 2, 若 $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 4$, 求 AD 的长;
- (2) 如图 3, 若 $AC = BD = 5$, 求四边形 $ABCD$ 的面积;
- (3) 如图 4, 若 $AB = 3$, $BC = \sqrt{13}$, $CD = 4$, 直接写出 AD 的长.

【答案】 (1) 3;

(2) $\frac{25}{2}$;

(3) $2\sqrt{3}$.

【解析】

【分析】 (1) 由题意得到 $\triangle BCD$, $\triangle ABD$ 是等腰三角形即可求解;

(2) 四边形面积 $S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \times (DE + BE) = \frac{1}{2} AC \times BD$ 即可求解;

(3) 由勾股定理得到 $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$ 求可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because BC = CD$,

$\therefore \triangle BCD$ 是等腰三角形,

$\therefore AC \perp BD$,

$\therefore DE = BE$,

$\therefore AC$ 垂直平分 BD ,

$\therefore AD = AB = 3$.

【小问 2 详解】

解: $\because AC \perp BD$, $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AC \times DE$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \times BE$,

$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \times DE + \frac{1}{2} AC \times BE$

$= \frac{1}{2} AC \times (DE + BE)$

$= \frac{1}{2} AC \times BD$

$= \frac{1}{2} \times 5 \times 5$

$= \frac{25}{2}$.

【小问 3 详解】

解: $AC \perp BD$,

$\therefore \triangle ABE, \triangle BCE, \triangle CDE, \triangle ADE$ 都是直角三角形, 每个直角三角形都满足勾股定理,

$$\therefore \begin{cases} AE^2 + BE^2 = AB^2 \textcircled{1} \\ CE^2 + BE^2 = CB^2 \textcircled{2} \end{cases}, \begin{cases} CE^2 + DE^2 = CD^2 \textcircled{3} \\ AE^2 + DE^2 = AD^2 \textcircled{4} \end{cases},$$

①-②得 $AE^2 - CE^2 = AB^2 - BC^2$,

④-③得 $AE^2 - CE^2 = AD^2 - CD^2$,

$\therefore$ 上面两式左边相等, 右边也相等,

$\therefore AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$,

将 $AB = 3$, $BC = \sqrt{13}$, $CD = 4$ 代入上面等式,

解得 $AD = 2\sqrt{3}$ ，负值舍去.

【点睛】 本题考查了四边形综合，三角形面积的计算，等腰三角形的性质，勾股定理，垂直平分线的性质，掌握相关知识是解题的关键.