

初二数学

一、选择题

1. 下列方程组中，是二元二次方程组的是（ ）

A. $\begin{cases} x+y=4 \\ \sqrt{x}=9 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x+y=5 \\ 8-3z^2=5x \end{cases}$ C. $\begin{cases} xy=7 \\ x=16 \end{cases}$ D. $\begin{cases} \frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=2 \\ y=x-3 \end{cases}$

【答案】C

【解析】

【分析】 本题考查了二元二次方程组的定义，解题的关键是掌握“组成二元二次方程组的两个方程应共含有两个未知数，且未知数的项最高次数都应是二次的整式方程。”据此逐个判断即可。

【详解】解：A、 $\begin{cases} x+y=4 \\ \sqrt{x}=9 \end{cases}$ 不是整式方程组，故不是二元二次方程组，不符合题意；

B、 $\begin{cases} x+y=5 \\ 8-3z^2=5x \end{cases}$ 含有3个未知数，故不是二元二次方程组，不符合题意；

C、 $\begin{cases} xy=7 \\ x=16 \end{cases}$ 是二元二次方程组，符合题意；

D、 $\begin{cases} \frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=2 \\ y=x-3 \end{cases}$ 不是整式方程组，故不是二元二次方程组，不符合题意；

故选：C.

2. 下列选项中正确的是（ ）

A. 方程 $\sqrt{x+4} = -3$ 有实数根

B. 方程 $\frac{2}{x-2} + \frac{x}{2-x} = 0$ 的解是 $x=2$

C. 方程 $x^3 + 2 = 0$ 有实数根

D. 方程 $(x-1)(y+1) = 0$ 只有一个解

【答案】C

【解析】

【分析】 本题考查了理方程，分式方程，整式方程是否有实数根，熟练掌握相关知识点是解题的关键。根据无理方程，分式方程，整式方程是否有实数根逐项分析判断即可

【详解】解：A、 $\because \sqrt{x+4} \geq 0$,

$\therefore \sqrt{x+4} = -3$ 没有实数根，故A不正确，不符合题意；

B、当 $x=2$ 时， $x-2=0$,

$\therefore x=2$ 不是原分式方程的解, 故 B 不正确, 不符合题意;

C、 $\because x^3+2=0$,

$\therefore x^3=-2$, 解得: $x=\sqrt[3]{-2}$, 故 C 正确, 符合题意;

D、 $(x-1)(y+1)=0$,

解得: $x=1$ 或 $y=-1$, 故 D 不正确, 不符合题意;

故选: C.

3. 方程组 $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x+m \end{cases}$ 有两组不同的实数解, 则 ()

- A. $m \geq -\frac{1}{4}$ B. $m > -\frac{1}{4}$ C. $-\frac{1}{4} < m < \frac{1}{4}$ D. 以上答案都不对

【答案】B

【解析】

【分析】将 $y=x^2$ 与 $y=x+m$ 函数联立, 根据解的个数求解即可.

【详解】方程组 $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x+m \end{cases}$ 有两组不同的实数解, 两个方程消去 y 得, $x^2-x-m=0$, 需要 $\Delta > 0$, 即 $1+4m > 0$, 所以 $m > -\frac{1}{4}$, 故选 B.

【点睛】本题考查了二元二次方程, 用到的知识点是加减消元法解方程组, 根的判别式、解一元二次方程等知识, 关键是根据根的判别式求出 m 的值.

4. 下列函数中, 函数值 y 随自变量 x 的值增大而增大的是 ()

- A. $y = -\frac{2}{x}$ B. $y = 2x^2$ C. $y = 2(x-1) - 3x$ D. $y = -3 + x$.

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了一次函数, 二次函数, 反比例函数的增减性, 熟练掌握相关函数的增减性是解题的关键.

根据一次函数, 二次函数, 反比例函数的增减性, 逐个判定即可.

【详解】解: A、 $\because k=-2$,

$\therefore$ 在每一象限内, y 随 x 的增大而增大, 故 A 不符合题意;

B、 $\because y=2x^2$,

$\therefore$ 该二次函数开口向上, 对称轴为 y 轴,

∴当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大, 当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小, 故 B 不符合题意;

C、∵ $y = 2(x-1) - 3x = -x - 2$,

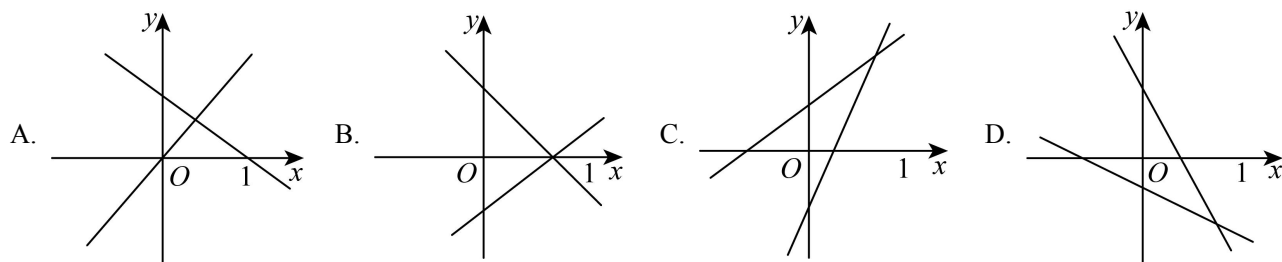
∴ y 随 x 的增大而减小, 故 C 不符合题意;

D、∵ $k = 1 > 0$,

∴ y 随 x 的增大而增大, 故 D 符合题意;

故选: D.

5. 当 $a < 0$, $b > 0$ 函数 $y = ax + b$ 与 $y = bx + a$ 在同一平面直角坐标系中的图象大致是 ()



【答案】 B

【解析】

【分析】 根据一次函数图像与各项系数关系, 分别判断 $y = ax + b$ 与 $y = bx + a$ 所过的象限, 最后得出结论.

【详解】 解: ∵ $a < 0$, $b > 0$

∴ $y = ax + b$ 经过一、二、四象限

$y = bx + a$ 经过一、三、四象限

∴ 选 B

故答案是: B.

【点睛】 本题主要考查一次函数图形与性质, 掌握和正确应用图像与系数关系是解题的关键.

6. 甲乙两地间公路长 300 千米, 为适应经济发展, 甲地通往乙地的客车的速度比原来每小时增加了 40 千米, 时间缩短了 1.5 小时. 若设客车原来的速度为每小时 x 千米, 则下列方程中符合题意的是 ()

A. $\frac{300}{x-40} = \frac{300}{x} + 1.5$

B. $\frac{300}{x} = \frac{300}{x-40} + 1.5$

C. $\frac{300}{x} = \frac{300}{x+40} + 1.5$

D. $\frac{300}{x+40} = \frac{300}{x} + 1.5$

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据从实际问题抽象出分式方程, 根据时间缩短了 1.5 小时列方程即可.

【详解】 解: 由题意, 得

$$\frac{300}{x} = \frac{300}{x+40} + 1.5.$$

故选 C.

二、填空题

7. 若函数 $y = (m+2)x^{m^2+2m-2} - m$ 是一次函数, 且 y 随着 x 的增大而增大, 则 $m =$ _____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数的定义和增减性, 解一元二次方程, 解题的关键是掌握一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$, 当 $k > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大, 反之, y 随 x 的增大而减小. 先根据一次函数的定义, 得出 $m+2 \neq 0, m^2+2m-2=1$, 求出 m 的值, 再根据增减性, 得出 $m > -2$, 即可得出结论.

【详解】 解: $\because$ 函数 $y = (m+2)x^{m^2+2m-2} - m$ 是一次函数,

$$\therefore m+2 \neq 0, m^2+2m-2=1,$$

$$\text{解得: } m_1 = -3, m_2 = 1,$$

$\because y$ 随着 x 的增大而增大,

$$\therefore m+2 > 0,$$

$$\text{解得: } m > -2,$$

$$\therefore m = 1,$$

故答案为: 1.

8. 一个多边形的内角和是 2880° , 则这个多边形是 _____ 边形.

【答案】 18

【解析】

【分析】 本题考查了多边形的内角和公式, 熟记多边形的内角和公式为 $(n-2) \times 180^\circ$ 是解答本题的关键. 根据多边形内角和公式列方程求解即可.

【详解】 解: 设这个多边形是 n 边形, 根据题意, 得

$$(n-2) \times 180^\circ = 2880^\circ,$$

$$\therefore n = 18.$$

故答案为: 18.

9. 方程 $x^3 - 3x^2 - 4x = 0$ 的根是 _____.

【答案】 $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 4$

【解析】

【分析】 本题考查了解高次方程，通过因式分解化为低次方程求解即可.

【详解】 解: $\because x^3 - 3x^2 - 4x = 0$,

$$\therefore x(x^2 - 3x - 4) = 0,$$

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4) = 0,$$

解得 $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 4$.

故答案为: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 4$.

10. 方程: $\frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{x-3}$ 的根为_____.

【答案】 $x = -3$

【解析】

【分析】 先去分母，把分式方程化为整式方程，再解出整式方程，然后检验，即可求解.

【详解】 解: $\frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{x-3}$,

去分母得: $x^2 = 9$,

解得: $x = \pm 3$,

当 $x = 3$ 时, $x - 3 = 0$,

$\therefore x = 3$ 是原方程的增根;

当 $x = -3$ 时, $x - 3 \neq 0$,

$\therefore$ 原方程的解为 $x = -3$.

故答案为: $x = -3$

【点睛】 本题主要考查了解分式方程，熟练掌握解分式方程的基本步骤，并注意检验是解题的关键.

11. 方程 $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-2} = 0$ 的解是_____.

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】 两边平方得出关于 x 的整式方程，解之求得 x 的值，再根据二次根式有意义的条件得出符合方程的 x 的值，可得答案.

【详解】解： $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-2} = 0$

两边平方得 $(x-2)(x-1) = 0$,

则 $x-2=0$ 或 $x-1=0$,

解得： $x=2$ 或 $x=1$,

$$\text{又} \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$$

解得： $x \geq 2$,

$\therefore x=2$,

故答案为： $x=2$.

【点睛】

本题主要考查无理方程，解无理方程的基本思想是把无理方程转化为有理方程来解，在变形时要注意根据方程的结构特征选择解题方法常用的方法有：乘方法，配方法，因式分解法，设辅助元素法，利用比例性质法等.

12. 分式方程 $x^2 + \frac{4}{x^2} = 3\left(x + \frac{2}{x}\right)$ ，如果设 $x + \frac{2}{x} = y$ ，原方程则化为整式方程为_____.

【答案】 $y^2 - 4 = 3y$

【解析】

【分析】 本题考查的是利用换元法解分式方程，掌握整体换元的思想是解本题的关键. 根据完全平方公式得出 $\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 = x^2 + 4 + \frac{4}{x^2} = y^2$ ，即可解答.

【详解】 解： 设 $x + \frac{2}{x} = y$,

$$\text{则} \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 = x^2 + 4 + \frac{4}{x^2} = y^2,$$

$$\therefore x^2 + \frac{4}{x^2} = y^2 - 4,$$

$\therefore$ 原方程则化为整式方程为 $y^2 - 4 = 3y$,

故答案为： $y^2 - 4 = 3y$.

13. 方程组 $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$ 的解是_____.

【答案】 $\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 5 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 0 \end{cases}$

【解析】

【分析】 本题考查了解一元二次方程，解二元一次方程组.

将①代入②，得出关于 x 的一元二次方程，求出 x 的值，再将 x 的值代入①，求出 y 的值即可.

【详解】 解： $\begin{cases} y = x + 1 \text{①} \\ y = x^2 - 2x - 3 \text{②} \end{cases}$,

把①代入②得： $x + 1 = x^2 - 2x - 3$,

整理得： $x^2 - 3x - 4 = 0$,

解得： $x = 4$ 或 $x = -1$,

把 $x = 4$ 代入①得： $y = 5$,

把 $x = -1$ 代入①得： $y = 0$,

$\therefore$ 原方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 5 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 0 \end{cases}$.

14. 方程组 $\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{1}{y} = 6 \\ \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = -3 \end{cases}$ 的解为_____.

【答案】 $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

【解析】

【分析】 本题考查了解方式方程组，用换元法求解即可.

【详解】 解： 设 $\frac{1}{x} = a, \frac{1}{y} = b$,

则原方程组可化为 $\begin{cases} 4a + b = 6 \text{①} \\ a - 2b = -3 \text{②} \end{cases}$,

① $\times 2 +$ ②，得

$9a = 9$,

$\therefore a = 1$,

把代入①, 得

$$4+b=6,$$

$$\therefore b=2,$$

$$\therefore \frac{1}{x}=1, \frac{1}{y}=2,$$

$$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\text{经检验} \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \text{符合题意.}$$

$$\text{故答案为: } \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

15. 当 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 关于 x 的方程 $\frac{5+m}{x-2} = \frac{1}{x-2} - 1$ 会产生增根.

【答案】 -4

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程, 分式方程的增根, 解题的关键是掌握使分式方程分母为 0 的未知数的值, 是分式方程的增根. 先去分母, 将分式方程化为整式方程, 得出 $x = -2 - m$, 再根据增根的定义, 即可求出 m .

$$\text{【详解】 解: } \frac{5+m}{x-2} = \frac{1}{x-2} - 1,$$

$$5+m=1-x+2,$$

$$x=-2-m,$$

当 $x-2=0$ 时, 原方程会产生增根,

即当 $x=2$ 时, 原方程会产生增根,

$$\therefore -2-m=2,$$

解得: $m=-4$.

故答案为: -4 .

16. 某学生计划每天平均看书若干页, 则在预定日期可看完 300 页的书, 读了 15 天后, 改变计划每天多读 6 页, 结果比预定日期提前 2 天读完, 设该学生原计划每天读 x 页, 则可列方程: $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $15x + (x+6) \times \left(\frac{300}{x} - 15 - 2 \right) = 300$

【解析】

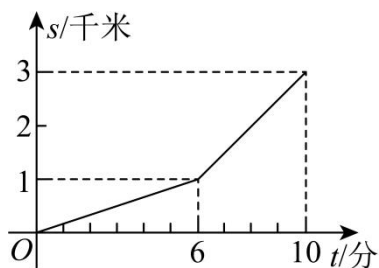
【分析】 本题考查分式方程的应用，解题的关键是找出合适的等量关系，列出方程．设他原计划平均每天读 x 页书，则他需要 $\frac{300}{x}$ 天读完，根据改变计划后结果比预定日期提前 2 天读完可列出关于 x 的方程．

【详解】 解：设他原计划平均每天读 x 页书，根据题意得：

$$15x + (x+6) \times \left(\frac{300}{x} - 15 - 2 \right) = 300,$$

故答案为： $15x + (x+6) \times \left(\frac{300}{x} - 15 - 2 \right) = 300.$

17. 明明骑自行车去上学时，经过一段先上坡后下坡的路，在这段路上所走的路程 S （单位：千米）与时间 t （单位：分）之间的函数关系如图所示．放学后如果按原路返回，且往返过程中，上坡速度相同，下坡速度相同，那么他回来时，走这段路所用的时间为_____分钟．



【答案】 14

【解析】

【分析】 此题考查了从函数图象获取信息，关键是正确理解图象所表示的意义，求出上下坡的速度．根据图象计算出上坡速度和下坡路程，然后根据放学后如果按原路返回，且往返过程中，上坡速度相同，下坡速度相同，再结合路程可得答案．

【详解】 解：根据函数图象可得：上坡速度为 $1 \div 6 = \frac{1}{6}$ （千米/分），

下坡速度为 $2 \div (10-6) = \frac{1}{2}$ （千米/分），

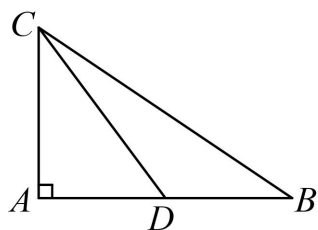
放学后如果按原路返回，且往返过程中，上坡速度相同，下坡速度相同，

那么他回来时，上坡路程为 2 千米，速度为 $\frac{1}{6}$ 千米/分，下坡路程为 1 千米，速度为 $\frac{1}{2}$ 千米/分，

因此走这段路所用的时间为 $2 \div \frac{1}{6} + 1 \div \frac{1}{2} = 14.$

故答案为：14.

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle CAB = 90^\circ$, $AB = 6$, $AC = 4$, CD 是 $\triangle ABC$ 的中线, 将 $\triangle ABC$ 沿直线 CD 翻折, 点 B' 是点 B 的对应点, 点 E 是线段 CD 上的点, 如果 $\angle CAE = \angle BAB'$, 那么 CE 的长是__.



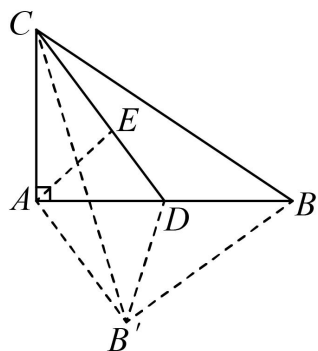
【答案】 3.2

【解析】

【分析】 本题主要考查了旋转的性质、相似三角形的判定与性质、勾股定理等知识点, 证得 $\triangle ACE \sim \triangle ABB'$ 得到 $\angle AEC = \angle AB'B = 90^\circ$ 是解题的关键.

根据旋转的性质可得 $\angle BCD = \angle DCB'$, $\angle CBD = \angle CDB'$, $AD = DB = DB'$ 进而可得 $\angle AB'B = 90^\circ$, 然后证明 $\triangle ACE \sim \triangle ABB'$ 可得 $\angle AEC = \angle AB'B = 90^\circ$, 最后根据勾股定理即可解答.

【详解】 解: 如图: $\because \triangle CDB'$ 是由 $\triangle CDB$ 翻折,



$$\therefore \angle BCD = \angle DCB', \angle CBD = \angle CB'D, AD = DB = DB',$$

$$\therefore \angle DBB' = \angle DB'B,$$

$$\because 2\angle DCB + 2\angle CBD + 2\angle DBB' = 180^\circ$$

$$\therefore \angle DCB + \angle CBD + \angle DBB' = 90^\circ,$$

$$\because \angle CDA = \angle DCB + \angle CBD,$$

$$\therefore \angle CDA + \angle DBB' = 90^\circ,$$

$$\because \angle ACD + \angle CDA = 90^\circ$$

$$\therefore \angle DBB' = \angle ACD,$$

$$\because AD = DB = DB' = 3,$$

$$\therefore \angle DB'B = 90^\circ,$$

$$\because \angle ACE = \angle ABB', \angle CAE = \angle BAB',$$

$$\therefore \triangle ACE \sim \triangle ABB',$$

$$\therefore \angle AEC = \angle DB'B = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle AEC$ 中, $\because AC = 4, AD = 3,$

$$\therefore CD = \sqrt{AC^2 + AD^2} = 5,$$

$$\therefore \frac{1}{2} AC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AE,$$

$$\therefore AE = \frac{AC \cdot AD}{CD} = \frac{12}{5},$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ACE \text{ 中, } CE = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2} = 3.2.$$

故答案为: 3.2.

三、解方程 (组)

19. 解方程: $\frac{x+2}{x-2} - \frac{16}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}$

【答案】 $x = -5$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程和解一元二次方程, 解题的关键是熟练掌握解分式方程和解一元二次方程的方法和步骤. 先去分母, 将分式方程化为整式方程, 再进行求解即可.

【详解】 解: $\frac{x+2}{x-2} - \frac{16}{x^2-4} = \frac{1}{x+2},$

$$(x+2)^2 - 16 = x-2,$$

$$x^2 + 4x + 4 - 16 = x - 2,$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0,$$

$$(x+5)(x-2) = 0,$$

$$x+5=0, x-2=0,$$

$$x_1 = -5, x_1 = 2,$$

检验, 当 $x = -5$ 时, $x^2 - 4 \neq 0,$

$\therefore x = -5$ 是原方程的解,

当 $x = 2$ 时, $x^2 - 4 = 0,$

$\therefore x = 2$ 不是原方程的解.

20. 解方程: $\frac{1}{2x^2-3} - 8x^2 + 12 = 0$

【答案】 $x_1 = -\frac{\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = -\frac{\sqrt{7}}{2}$, $x_4 = \frac{\sqrt{7}}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了解分式方程，用换元法求解即可.

【详解】 解: 设 $2x^2 - 3 = a$,

则原方程变为 $\frac{1}{a} - 4a = 0$,

$\therefore 4a^2 = 1$,

$\therefore a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{2}$.

当 $2x^2 - 3 = -\frac{1}{2}$ 时, 解得 $x_1 = -\frac{\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

当 $2x^2 - 3 = \frac{1}{2}$ 时, 解得 $x_3 = -\frac{\sqrt{7}}{2}$, $x_4 = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

21. $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$

【答案】 $x = 20$

【解析】

【分析】 本题考查了解无理方程，掌握解无理方程的技巧和解一元二次方程是解题的关键.

根据方程的特点可以构造平方差公式，进而转化为一元二次方程，解一元二次方程即可，最后根据无理方程的特点，要进行检验.

【详解】 解: $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$ ①

设 $\sqrt{2x-4} + \sqrt{x+5} = k$ ②,

① $\times$ ②得: $2x-4-x-5=k$,

解得: $x = k+9$,

$\therefore k = x-9$

$\therefore \sqrt{2x-4} + \sqrt{x+5} = x-9$ ③,

①+③得: $2\sqrt{2x-4} = x-8$,

两边同时平方, 得: $4(2x-4) = (x-8)^2$,

整理得: $x^2 - 24x + 80 = 0$

解得: $x_1 = 20, x_2 = 4$,

检验, 当 $x = 20$ 时, $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$,

$\therefore x = 20$ 是原方程的解,

当 $x = 4$ 时, $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = -1$, 不符合题意, 舍去,

$\therefore$ 原方程的解为 $x = 20$.

22.
$$\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 16 \\ 9x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

【答案】 $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=2 \\ y=6 \end{cases}$.

【解析】

【分析】 本题考查了解二元二次方程组, 通过因式分解转化为二元一次方程组求解即可.

【详解】 解: $\because \begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 16 \\ 9x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$,

$\therefore \begin{cases} (x-y)^2 = 16 \\ (3x-y)(3x+y) = 0 \end{cases}$,

$\therefore \begin{cases} x-y=4 \\ 3x+y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-y=4 \\ 3x-y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-y=-4 \\ 3x+y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-y=-4 \\ 3x-y=0 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=2 \\ y=6 \end{cases}$.

23. 解方程组:
$$\begin{cases} \frac{4}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 3 \\ \frac{5}{x+y} - \frac{3}{x-y} = 8 \end{cases}$$

【答案】 $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

【解析】

【分析】 本题考查了用换元法解分式方程, 利用换元法把分式方程化为整式方程是解决本题的关键, 注意检验.

设 $a = \frac{1}{x+y}$, $b = \frac{1}{x-y}$, 则将原 $\begin{cases} 4a+b=3 \text{ ①} \\ 5a-3b=8 \text{ ②} \end{cases}$, ① $\times 3$ +② 求出 a 的值, 再将 a 的值代入①, 求出 b 的

值, 进而得出 $\begin{cases} x+y=1 \text{ ③} \\ -x+y=1 \text{ ④} \end{cases}$, 即可求解.

【详解】解: 设 $a = \frac{1}{x+y}$, $b = \frac{1}{x-y}$,

$$\therefore \begin{cases} 4a+b=3 \text{ ①} \\ 5a-3b=8 \text{ ②} \end{cases},$$

① $\times 3$ +② 得: $17a=17$,

解得: $a=1$,

把 $a=1$ 代入①得: $4+b=3$,

解得: $b=-1$,

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{x+y}=1 \\ \frac{1}{x-y}=-1 \end{cases},$$

整理得: $\begin{cases} x+y=1 \text{ ③} \\ -x+y=1 \text{ ④} \end{cases}$,

③+④ 得: $2y=2$,

解得: $y=1$,

把 $y=1$ 代入③得: $x+1=1$,

解得: $x=0$,

$$\therefore \text{原方程组的解为} \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}.$$

四、解答题

24. 学校组织为贫困地区儿童捐资助学的活动, 其中甲班和乙班捐款总额分别为 1000 元和 900 元. 已知甲班比乙班少 5 名学生, 而甲班的人均捐款额比乙班的人均捐款额多 5 元. 问甲班和乙班各有多少名学生?

【答案】甲班有 40 名学生, 则乙班有 45 名学生.

【解析】

【分析】本题考查了分式方程的应用, 找出等量关系是解答本题的关键. 设甲班有 x 名学生, 则乙班有 $(x+5)$

名学生，根据甲班的人均捐款额比乙班的人均捐款额多 5 元列方程求解即可.

【详解】解：设甲班有 x 名学生，则乙班有 $(x+5)$ 名学生，由题意得

$$\frac{1000}{x} - \frac{900}{x+5} = 5,$$

解得 $x_1 = 40$, $x_2 = -25$ (舍去).

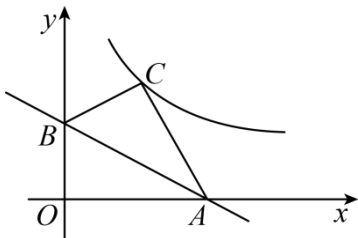
经检验 $x = 40$ 是原方程的解且符合题意,

$$40 + 5 = 45 \text{ 名}.$$

答：甲班有 40 名学生，则乙班有 45 名学生.

25. 如图，在平面直角坐标系中，直线 AB 分别与 x 轴正半轴、 y 轴正半轴交于点 A 、 B ， $OA = 3$ ， $OB = \sqrt{3}$ ，

将 $\triangle AOB$ 沿直线 AB 翻折，点 O 的对应点 C 恰好落在双曲线 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 上.



(1) 求 k 的值;

(2) 如果将 $\triangle ABC$ 绕 AC 的中点旋转 180° 得到 $\triangle PCA$.

①请直接写出点 P 的坐标;

②请判断点 P 是否在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 上，并说明理由.

【答案】(1) $k = \frac{9\sqrt{3}}{4}$

(2) ① P 点坐标为 $\left(\frac{9}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, ②点 P 在双曲线上，理由见解析

【解析】

【分析】本题考查了反比例函数综合，轴对称的性质，旋转的性质，熟练掌握相关性质定理是解题的关键.

(1) 根据翻折的性质得出 $\triangle AOB \cong \triangle ACB$ ，则 $BC = OB = \sqrt{3}$, $AC = AO = 3$ ，设 $C(x, y)$ ，得出

$AC^2 = (3-x)^2 + y^2 = 3^2$, $BC^2 = x^2 + (y-\sqrt{3})^2 = (\sqrt{3})^2$ ，联立求出 x 和 y 的值，再用待定系数法，即可求出 k 的值;

(2) ①设 AC 中点 D ，根据中点坐标公式得出 $D\left(\frac{9}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ ，设 P 点坐标 (a, b) ，根据中心对称的性质，

列出方程组, 求出 a 和 b 的值, 即可得出点 P 的坐标; ②求出当 $x = \frac{9}{2}$ 时, 的函数值, 即可判断.

【小问 1 详解】

解: $\because \triangle AOB$ 沿直线 AB 翻折得到 $\triangle ACB$,

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle ACB,$$

$$\therefore BC = OB = \sqrt{3}, AC = AO = 3,$$

设 $C(x, y)$,

$$\because OA = 3, OB = \sqrt{3},$$

$$\therefore A(3, 0), B(0, \sqrt{3}),$$

$$\therefore AC^2 = (3-x)^2 + y^2 = 3^2, \quad BC^2 = x^2 + (y-\sqrt{3})^2 = (\sqrt{3})^2,$$

联立得:

$$\begin{cases} (3-x)^2 + y^2 = 3^2 \\ x^2 + (y-\sqrt{3})^2 = (\sqrt{3})^2 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases},$$

$$\therefore C\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\text{把 } C\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \text{ 代入 } y = \frac{k}{x} (k > 0) \text{ 得: } k = \frac{3}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4};$$

【小问 2 详解】

解: ①设 AC 中点为 D ,

$$\because A(3, 0), C\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 坐标横坐标 } x = \frac{3 + \frac{3}{2}}{2} = \frac{9}{4}, \text{ 点 } D \text{ 纵坐标 } y = \frac{0 + \frac{3\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore D\left(\frac{9}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right),$$

设 P 点坐标 (a, b) ,

$$\therefore B(0, \sqrt{3}),$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{a}{2} = \frac{9}{4} \\ \frac{b + \sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = \frac{9}{2} \\ b = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases},$$

$$\therefore P \text{ 点坐标为 } \left(\frac{9}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right);$$

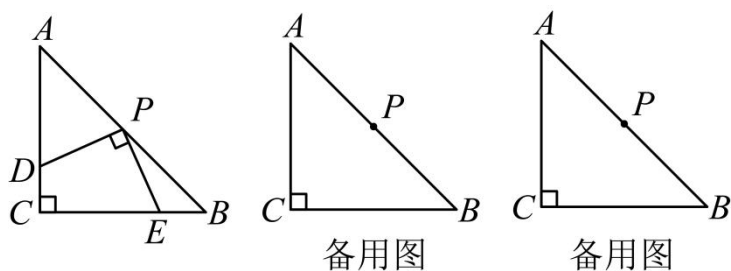
$$\text{②由①可知, } k = \frac{9\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore \text{双曲线的表达式为 } y = \frac{9\sqrt{3}}{4x},$$

$$\text{当 } x = \frac{9}{2} \text{ 时, } y = \frac{9\sqrt{3}}{4 \times \frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore$ 点 P 在双曲线上.

26. 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = BC = 4$, 斜边 AB 的中点为 P 点, 动点 D 、 E 分别在边 AC 、 CB 上, 且 $\angle DPE = 90^\circ$.



(1) 求证: $PD = PE$;

(2) 设 $CD = x$, $PE^2 = y$, 求 y 关于 x 的函数关系式及自变量 x 的取值范围;

(3) 若 $\triangle PBE$ 为等腰三角形, 请直接写出 CD 的长.

【答案】 (1) 见解析 (2) $y = x^2 - 4x + 8 (0 \leq x \leq 4)$

(3) 2 或 $2\sqrt{2}$ 或 4

【解析】

【分析】(1) 过点 P 作 $PF \perp AC$, $PG \perp BC$, 可得四边形 $FCGP$ 是矩形, 得到 $\angle FPG = 90^\circ$, 结合 $\angle DPE = 90^\circ$, 可得 $\angle DPF = \angle EPG$, 根据三角形中位线性质可得 $PF = \frac{1}{2}BC$, $PG = \frac{1}{2}AC$, 得到 $PF = PG$, 可得 $\triangle PDF \cong \triangle PEG$ (ASA), 得到 $PD = PE$;

(2) 根据中点性质可得 $CF = 2$, 结合 $CD = x$, 得到 $DF = 2 - x$, 可证矩形 $FCGP$ 是正方形, 得到 $PF = CF = 2$, 根据勾股定理得到 $PD^2 = DF^2 + PF^2 = x^2 - 4x + 8$, 根据 $PE = PD$, 得到 $y = x^2 - 4x + 8$ ($0 \leq x \leq 4$);

(3) 连接 CP , 根据等腰直角三角形性质可得 $PC = PB$, $CP \perp AB$, 得到 $\angle CPD = \angle BPE$, 结合 $\angle PCD = \angle B$, 证得 $\triangle PCD \cong \triangle PBE$ (ASA), 可知 $\triangle PCD$ 是等腰三角形, 当 $PC = PD$ 时, 点 D 与点 A 重合, 可得 $CD = 4$; $CD = CP = 2\sqrt{2}$, 成立; 当 $DP = DC$ 时, $\angle DPC = \angle DCP = 45^\circ$, 可得 $\angle CDP = 90^\circ$, 点 D 与点 F 重合, 得到 $CD = 2$.

【小问 1 详解】

如图 1, 过点 P 作 $PF \perp AC$, $PG \perp BC$,

则 $\angle PFD = \angle PGE = 90^\circ$,

$\because \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $FCGP$ 是矩形,

$\therefore \angle FPG = 90^\circ$,

$\because \angle DPE = 90^\circ$,

$\therefore \angle DPF + \angle DPG = \angle EPG + \angle DPG = 90^\circ$,

$\therefore \angle DPF = \angle EPG$,

$\because P$ 是 AB 中点,

$\therefore AP = BP$,

$\because PF \parallel BC$,

$\therefore AF = CF$,

$\therefore PF = \frac{1}{2}BC$,

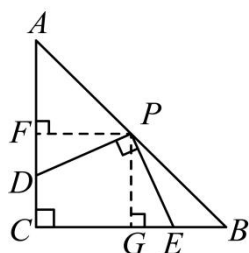
同理 $PG = \frac{1}{2}AC$,

$\because AC = BC$,

$\therefore PF = PG$,

$$\therefore \triangle PDF \cong \triangle PEG (\text{ASA}),$$

$$\therefore PD = PE;$$



【小问 2 详解】

图1

如图 1, $\because F$ 是 AC 中点, $AC = 4$,

$$\therefore CF = 2,$$

$$\therefore CD = x,$$

$$\therefore DF = 2 - x,$$

$$\therefore PF = PG,$$

$\therefore$ 矩形 $FCGP$ 是正方形,

$$\therefore PF = CF = 2,$$

$$\therefore PD^2 = DF^2 + PF^2 = (2 - x)^2 + 2^2 = x^2 - 4x + 8, \quad PE = PD,$$

$$\therefore y = PE^2 = PD^2 = x^2 - 4x + 8 \quad (0 \leq x \leq 4),$$

$$\text{即 } y = x^2 - 4x + 8 \quad (0 \leq x \leq 4);$$

【小问 3 详解】

如图 2, 连接 CP ,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ, \quad AC = BC = 4,$$

$$\therefore AB = \sqrt{2}AC = 4\sqrt{2},$$

$\therefore P$ 是 AB 中点,

$$\therefore PC = PB = \frac{1}{2}AB = 2\sqrt{2}, \quad CP \perp AB, \quad \angle ACP = \angle BCP = \frac{1}{2}\angle ACB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CPB = \angle DPE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CPD + \angle CPE = \angle BPE + \angle CPE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CPD = \angle BPE,$$

$$\therefore \angle PCD = \angle B = 45^\circ,$$

$$\therefore \triangle PCD \cong \triangle PBE (\text{ASA}),$$

∴当 $\triangle PBE$ 是等腰三角形时, $\triangle PCD$ 也是等腰三角形,

当 $PC = PD = 2\sqrt{2}$ 时, $\angle PCD = \angle PDC = 45^\circ$,

∴点 D 与点 A 重合,

∴ $CD = CA = 4$;

当 $CD = CP = 2\sqrt{2}$ 时, 成立;

当 $DP = DC$ 时, $\angle DPC = \angle DCP = 45^\circ$,

∴ $\angle CDP = 90^\circ$, 点 D 与点 F 重合,

∴ $CD = CF = 2$.

综上, CD 的长为: 2 或 $2\sqrt{2}$ 或 4.

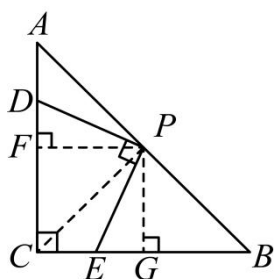


图2

【点睛】 本题主要考查了等腰直角三角形综合. 熟练掌握等腰直角三角形性质和判定, 三角形中位线判定和性质, 全等三角形判定和性质, 等腰三角形性质, 勾股定理理解直角三角形, 分类讨论, 是解决问题的关键.