

2023 学年第二学期罗南中学八年级数学 练习 2

(测试时间 90 分钟 满分 150 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题. 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效.
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出解答的主要步骤.

一、选择题 (本大题共有 6 题, 每题 4 分, 满分 24 分)

1. 函数 $y = (k-2)x + 3$ 是一次函数, 则 k 的取值范围是 ()

- A. $k > 2$ B. $k < 2$ C. $k = 2$ D. $k \neq 2$

【答案】D

【解析】

【分析】此题主要考查了一次函数的定义, 一次函数 $y = kx + b$ 的定义条件是: k 、 b 为常数, $k \neq 0$, 自变量次数为 1. 根据一次函数定义可得 $k - 2 \neq 0$, 再解不等式即可.

【详解】解: 由题意得: $k - 2 \neq 0$,

解得: $k \neq 2$,

故选: D.

2. 一次函数 $y = 2x - 1$ 的图象经过 ()

- A. 第一、二、三象限 B. 第一、三、四象限
C. 第一、二、四象限 D. 第二、三、四象限

【答案】B

【解析】

【分析】根据一次函数的性质即可判断该一次函数的图象经过哪些象限.

【详解】 $\because k = 2 > 0$, $b = -1 < 0$,

$\therefore y = 2x - 1$ 经过第一、三、四象限.

故选: B.

【点睛】本题考查了一次函数的性质, 准确记忆一次函数的性质是解题的关键.

3. 下列方程中, 有实数根的方程是 ()

- A. $x^2 + 3 = 0$

B. $x^3 + 3 = 0$

C. $\frac{1}{x^2 - 3} = 0$

D. $\sqrt{x} + 3 = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】根据分式方程和无理方程的解法如果能求得方程的解说明方程有实数解，一元二次方程有实数根只需得到其根的判别式为非负数.

【详解】解：A、即 $x^2 = -3$ ，因为实数的平方 ≥ 0 ，故本选项错误；

B、 $x^3 = -3$ 即 $x = -\sqrt[3]{3}$ ，有解，故本选项正确；

C、分式分母不为 0，所以本题无解，故本选项错误；

D、即 $\sqrt{x} = -3$ ，实数的算术平方根为大于 0，故本选项错误；

故选 B.

【点睛】本题考查了无理方程，涉及到了实数的平方 ≥ 0 ，负数由立方根，注意区别.

4. 已知向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，则 ()

A. $\vec{a} = \vec{b}$

B. $\vec{a} = -\vec{b}$

C. $\vec{a} \parallel \vec{b}$

D. 以上都有可能

【答案】D

【解析】

【分析】利用单位向量的定义和性质直接判断即可.

【详解】解：若向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ，

可得： $\vec{a} = \vec{b}$ ，或 $\vec{a} = -\vec{b}$ ，或 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，

故选：D.

【点睛】此题考查平面向量问题. 解题时要认真审题，注意单位向量、零向量、共线向量的定义和性质的合理运用.

5. 事件“关于 y 的方程 $a^2y + y = 1$ 有实数解”是()

A. 必然事件

B. 随机事件

C. 不可能事件

D. 以上都不对

【答案】A

【解析】

【分析】根据根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的值的符号就可以判断下列方程有无实数解，再判断属于哪类事件即可。

【详解】 $\because \Delta=1-4a^2(-1)=4a^2+1>0$ ，原方程一定有实数解。

$\therefore$ 方程 $a^2y+y=1$ 有实数解是必然事件。

故选 A。

【点睛】考查了随机事件的意义与一元二次方程的根的判别式，一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系：

(1) $\Delta>0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根；(2) $\Delta=0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根；(3) $\Delta<0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根。

6. 下列命题中，假命题是 ()

- A. 两组对角分别相等的四边形是平行四边形；
- B. 有一条对角线与一组邻边构成等腰三角形的平行四边形是菱形；
- C. 有一组邻边相等且互相垂直的平行四边形是正方形；
- D. 一组邻边互相垂直，两组对边分别平行的四边形是矩形。

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了平行四边形、菱形、正方形、矩形的判定，熟练掌握各个判定定理是解题的关键。根据平行四边形、菱形、正方形、矩形的判定逐个进行判断即可。

- 【详解】解：A、两组对角分别相等的四边形是平行四边形，A 为真命题，不符合题意；
- B、有一条对角线与一组邻边构成等腰三角形的平行四边形不是菱形，B 为假命题，符合题意；
- C、有一组邻边相等且互相垂直的平行四边形是正方形，C 为真命题，不符合题意；
- D、一组邻边互相垂直，两组对边分别平行的四边形是矩形，D 为真命题，不符合题意；
- 故选：B。

二、填空题 (本大题共 12 题，每题 4 分，满分 48 分)

7. 已知函数 $f(x)=\sqrt{2}x+1$ ，那么 $f(\sqrt{2})=$ _____。

【答案】3

【解析】

【分析】根据自变量与函数值的对应关系，即可得到答案。

【详解】解： $\because f(x)=\sqrt{2}x+1$ ，

$$\therefore f(\sqrt{2})=\sqrt{2}\times\sqrt{2}+1=2+1=3,$$

故答案为：3。

【点睛】 本题考查了函数值，利用自变量与函数值的对应关系是解题的关键.

8. 已知一次函数 $y = 1 - x$ ，则函数值 y 随自变量 x 的增大而_____.

【答案】 减小

【解析】

【分析】 本题考查了一次函数图象和性质，在 $y = kx + b$ 中，若 $k > 0$ ，则函数值 y 随自变量 x 的增大而增大，若 $k < 0$ ，则函数值 y 随自变量 x 的增大而减小，根据一次函数图象和性质即可解题.

【详解】 解： $\because$ 一次函数解析式为 $y = 1 - x$ ，且 $-1 < 0$ ，

$\therefore$ 函数值 y 随自变量 x 的增大而减小，

故答案为：减小.

9. 方程 $x^4 - 16 = 0$ 的根是_____.

【答案】 ± 2

【解析】

【分析】 根据平方根的定义,很容易求解,或者把方程左边因式分解,通过降次的方法也可以求解.

【详解】 $\because x^4 - 16 = 0$,

$\therefore (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2) = 0$,

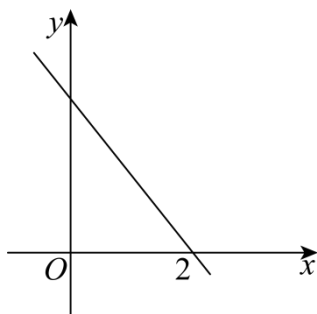
$\therefore x = \pm 2$,

$\therefore$ 方程 $x^4 - 16 = 0$ 的根是 $x = \pm 2$,

故答案为 ± 2 .

【点睛】 该题为高次方程，因此解决该题的关键，是需要把方程左边因式分解，从而达到降次的目的，把高次方程转化为低次方程，从而求解.

10. 如图，一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图像经过点 $(2, 0)$ ，则关于 x 的不等式 $kx + b > 0$ 的解集是_____.



【答案】 $x < 2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了利用一次函数图像解不等式，熟练掌握一次函数的图像与性质是解题关键. 根据

图像可知, 当 $x < 2$ 时, 函数 $y > 0$, 据此即可获得答案.

【详解】解: 由图像可知, 当 $x < 2$ 时, $y = kx + b > 0$,

$\therefore$ 关于 x 的不等式 $kx + b > 0$ 的解集是 $x < 2$.

故答案为: $x < 2$.

11. 用换元法解方程 $\frac{x}{x-1} + \frac{x-1}{3x} = \frac{5}{2}$, 若设 $y = \frac{x}{x-1}$, 则原方程可以化为关于 y 的整式方程是_____.

【答案】 $3y^2 - \frac{15}{2}y + 1 = 0$

【解析】

【分析】 本题考查了换元法解方程, 解题关键是熟练运用代入法进行换元, 准确化简方程.

把 $y = \frac{x}{x-1}$ 代入原方程, 去分母化简即可.

【详解】 设 $y = \frac{x}{x-1}$, 则原方程为: $y + \frac{1}{3y} = \frac{5}{2}$,

两边同时乘以 $3y$, 得: $3y^3 + 1 = \frac{15}{2}y$,

整得, 得: $3y^3 - \frac{15}{2}y + 1 = 0$.

故答案为: $3y^3 - \frac{15}{2}y + 1 = 0$.

12. 从 2、3、4 这三个数字中任选两个不同的数组成两位数, 在组成的所有两位数中, 能被 2 整除的概率是_____.

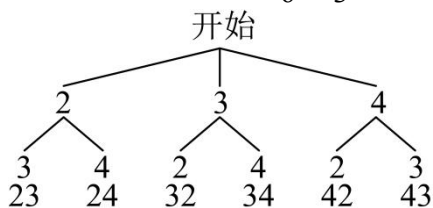
【答案】 $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 根据题意, 列出树状图, 得到所有的可能和满足条件的可能, 即可得到答案.

【详解】 解: 如图, 由树状图可知共有 6 种等可能的结果, 其中能被 2 整除的情况有 4 种,

$\therefore P(\text{能被 2 整除}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.



故答案为: $\frac{2}{3}$.

【点睛】 此题考查的是用列表法或树状图法求概率. 列表法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果, 适合于两步完成的事件; 树状图法适合两步或两步以上完成的事件.

13. 一个多边形的内角和是 720° ，则这个多边形的边数是_____.

【答案】 6

【解析】

【分析】 本题主要考查了多边形内角和定理的应用，准确计算是解题的关键. 根据多边形内角和定理：

$(n-2) \times 180^\circ$ ，列方程解答出即可.

【详解】 解：设这个多边形的边数为 n ，

根据多边形内角和定理得，

$$(n-2) \times 180^\circ = 720^\circ,$$

解得 $n = 6$.

故答案为： 6.

14. 若梯形的一条底边长 8cm ，中位线长 10cm ，则它的另一条底边长是_____ cm .

【答案】 12

【解析】

【分析】 本题考查了梯形的中位线定理，只需根据梯形的中位线等于梯形两底和的一半进行计算即可.

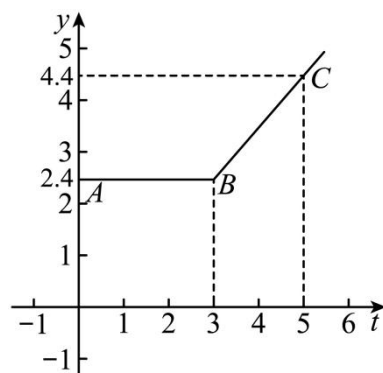
【详解】 解：设另一条底边为 x ，则 $8 + x = 2 \times 10$ ，

解得 $x = 12$.

即另一条底边的长为 12 .

故答案为： 12

15. 如图，折线 ABC 表示从甲地向乙地打电话所需的电话费 y （元）关于通话时间 t （分钟）的函数图象，则通话 7 分钟需要支付电话费_____元.



【答案】 6.4

【解析】

【分析】 用待定系数法求出直线 BC 的函数表达式，再求出当 $t=7$ 时的函数值即可.

【详解】 解：由图可知 $B(3, 2.4)$ ， $C(5, 4.4)$ ，

设直线 BC 的函数表达式为: $y=kt+b$,

将点 B 和点 A 的坐标代入得:

$$\begin{cases} 2.4 = 3k + b \\ 4.4 = 5k + b \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = 1 \\ b = -0.6 \end{cases},$$

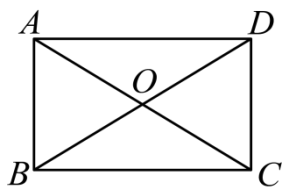
$\therefore$ 直线 BC 的函数表达式为: $y = t - 0.6$,

当 $t=7$ 时, $y=7-0.6=6.4$.

故答案为: 6.4.

【点睛】 本题主要考查了一次函数的实际应用, 熟练掌握一次函数的图象和性质, 根据函数图象求解一次函数表达式是解题的关键.

16. 如图, 矩形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 O , $\angle COB = 2\angle AOB$, $AB = 8$, 则 BC 的长是_____.



【答案】 $8\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 首先证明 $\triangle AOB$ 是等边三角形, 可以求得 AC 的长, 然后利用勾股定理求得 BC 的长.

【详解】 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AO = OC, BO = OD, AC = BD,$$

$$\therefore OA = OB,$$

$$\because \angle BOC = 2\angle AOB, \angle BOC + \angle AOB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形,

$$\therefore OA = OB = AB = 8,$$

$$\therefore AC = BD = 2AO = 16,$$

$$\text{则 } BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 8\sqrt{3}.$$

故答案是: $8\sqrt{3}$.

【点睛】 本题考查了矩形的性质, 等边三角形的性质和判定的应用和勾股定理的应用, 解决本题的关键是: 矩形的对角线相等且互相平分, 属于基础题.

17. 我们把对角线与一条底边相等的等腰梯形叫做“完美等腰梯形”. 若一个“完美等腰梯形”的对角线长

为 10，且该梯形的一个内角为 75° ，则这个梯形的高等于_____.

【答案】 5

【解析】

【分析】 本题考查了等腰三角形的性质，含 30° 度角直角三角形的特征，解题的关键是掌握等边对等角，含 30° 度角的直角三角形 30° 度角所对的边是斜边的一半.

根据题意画出图形，过点 D 作 $DH \perp BC$ 与点 H ，即可推出 $\angle C = \angle ADC = 75^\circ$ ，进而得出 $\angle DBH = 180^\circ - \angle BDC - \angle C = 30^\circ$ ，即可解答.

【详解】 解：如图：四边形 $ABCD$ 为等腰梯形， $BD = BC = 10, \angle C = 75^\circ$ ，

过点 D 作 $DH \perp BC$ 与点 H ，

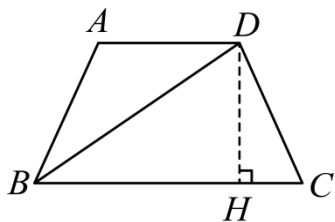
$$\because BD = BC,$$

$$\therefore \angle C = \angle BDC = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle DBH = 180^\circ - \angle BDC - \angle C = 30^\circ,$$

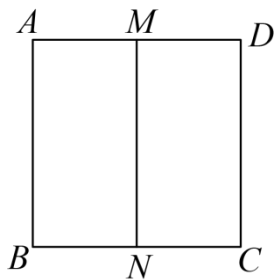
$$\therefore DH = \frac{1}{2}BD = 5,$$

故答案为：5.



18. 如图，在边长为 6 的正方形 $ABCD$ 中，点 M 、 N 分别是边 AD 、 BC 的中点， Q 是边 CD 上的一点，连接 MN 、 BQ ，将 $\triangle BCQ$ 沿着直线 BQ 翻折，若点 C 恰好与线段 MN 上的点 P 重合，则 PQ 的长等于

_____.



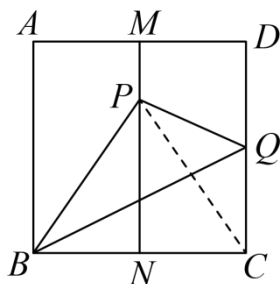
【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 先证明 $\triangle BCP$ 是等边三角形，得到 $\angle PBC = 60^\circ$ ，从而由折叠的性质得到

$\angle PBQ = \angle CBQ = \frac{1}{2} \angle PBC = 30^\circ$, $\angle BPQ = \angle BCD = 90^\circ$, 设 $PQ = x (x > 0)$, 则 $BQ = 2x$, 在 $\text{Rt}\triangle BPQ$ 中, 利用勾股定理列出方程求解即可.

【详解】解: 根据题意, 画图如下:



在边长为 6 的正方形 $ABCD$ 中, 点 M 、 N 分别是边 AD 、 BC 的中点,

$\therefore BC = PB = 6$, MN 垂直平分 BC , $\angle BCD = 90^\circ$,

$\therefore BC = PB = CP$,

$\therefore \triangle BCP$ 是等边三角形,

$\therefore \angle PBC = 60^\circ$,

由折叠的性质可得: $\angle PBQ = \angle CBQ = \frac{1}{2} \angle PBC = 30^\circ$, $\angle BPQ = \angle BCD = 90^\circ$

设 $PQ = x (x > 0)$, 则 $BQ = 2x$,

在 $\text{Rt}\triangle BPQ$ 中, $PB^2 + PQ^2 = BQ^2$, 即 $6^2 + x^2 = (2x)^2$,

解得: $x = 2\sqrt{3}$,

即: $PQ = 2\sqrt{3}$.

【点睛】本题主要考查了折叠的性质, 等边三角形的判定与性质, 含 30° 度角的直角三角形的性质, 垂直平分线的性质, 勾股定理等知识, 根据题意画出图形是解题的关键. 折叠是一种对称变换, 它属于轴对称, 根据轴对称的性质, 折叠前后图形的形状和大小不变, 位置变化, 对应边和对应角相等.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 78 分)

19 解方程: $3 - \sqrt{2x - 3} = x$

【答案】 $x = 2$

【解析】

【分析】先移项, 两边平方, 然后整理求得 x 的值, 最后进行检验即可.

【详解】解: 原方程化为: $3 - x = \sqrt{2x - 3}$

两边平方, 得 $(3-x)^2 = 2x-3$,

整理, 得 $x^2 - 8x + 12 = 0$,

解得 $x_1 = 2, x_2 = 6$,

经检验: $x_1 = 2$ 是原方程的根, $x_2 = 6$ 是原方程的增根,

$\therefore$ 原方程的根为 $x = 2$.

【点睛】 本题主要考查解一元二次方程, 二次根式的性质, 解此题的关键在于熟练掌握其知识点.

20. 解方程组
$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}.$$

【答案】
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

【解析】

【分析】 由②变形得 $x = y + 1$ ③, 再③代入①得 $(y+1)^2 - (y+1)y - 2y^2 = 1$, 解出 $y_1 = 0$ 或 $y_2 = \frac{1}{2}$, 然后再分别代入③, 解出 x 的值即可得到方程组的解.

【详解】 解:
$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 1 \text{ ①} \\ x - y = 1 \text{ ②} \end{cases}$$

由②得 $x = y + 1$ ③

把③代入①得 $(y+1)^2 - (y+1)y - 2y^2 = 1$

$$\therefore y(2y-1) = 0,$$

$$\therefore y = 0 \text{ 或 } 2y - 1 = 0,$$

$$\therefore y_1 = 0 \text{ 或 } y_2 = \frac{1}{2},$$

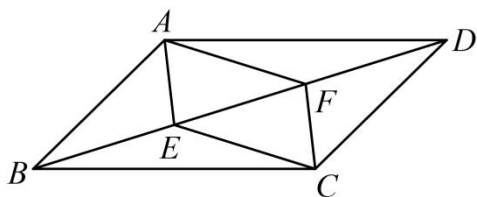
分别把 $y_1 = 0$ 和 $y_2 = \frac{1}{2}$ 代入③得

$$\therefore x_1 = 1 \text{ 或 } x_2 = \frac{3}{2},$$

综上所述, 原方程组的解为
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

【点睛】 本题主要考查了二元一次方程组和解高次方程的应用，把高次方程组转化为二元一次方程组是解此题的关键.

21. 如图，点 E 、 F 在平行四边形 $ABCD$ 的对角线 BD 上，且 $EB = DF$ ，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ， $FC = c$.



- (1) 填空：图中与 $\overrightarrow{BF}$ 互为相反向量的向量是_____；
- (2) 填空： $\vec{b} - \vec{a} =$ _____.
- (3) 求作： $\vec{b} + \vec{c}$. (不写作法，保留作图痕迹，写出结果)

【答案】 (1) $\overrightarrow{FB}$ 和 $\overrightarrow{DE}$

(2) $\overrightarrow{BD}$

(3) 见详解

【解析】

【分析】 本题主要考查了向量的知识，熟练掌握相量的定义是解题关键.

- (1) 证明 $BF = ED$ ，结合向量的定义，即可获得答案；
- (2) 由三角形法则，即可获得答案；
- (3) 根据三角形法则作图即可.

【小问 1 详解】

解： $\because EB = DF$ ，

$\therefore EB + EF = DF + EF$ ，即 $BF = ED$ ，

$\therefore$ 图中与 $\overrightarrow{BF}$ 互为相反向量的向量是 $\overrightarrow{FB}$ 和 $\overrightarrow{DE}$.

故答案为： $\overrightarrow{FB}$ 和 $\overrightarrow{DE}$ ；

【小问 2 详解】

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore AB = DC$ ， $AB \parallel DC$ ，

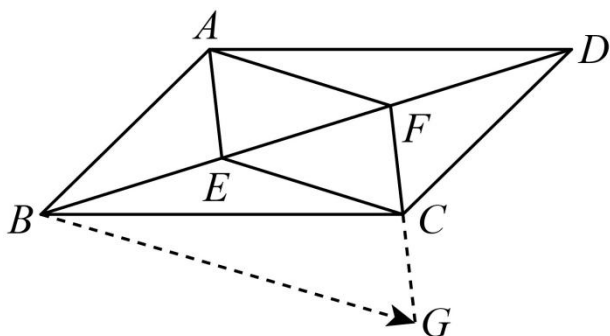
$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \vec{b} + (-\vec{a}) = \vec{b} - \vec{a}$ ，

$\therefore \vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{BD}$.

故答案为: $\overrightarrow{BD}$;

【小问 3 详解】

如图, $\overrightarrow{BG}$ 即为所求作的向量.



22. 小明在普通商场中用 96 元购买了一种商品, 后来他在网上发现完全相同的这一商品在网上购买比普通商场中每件少 2 元, 他用 90 元在网上再次购买这一商品, 比上次在普通商场中多买了 3 件. 问小明在网上购买的这一商品每件几元?

【答案】小明在网上购买的这一商品每件 6 元

【解析】

【分析】设小明在网上购买的这一商品每件 x 元, 小明在普通商场中用 96 元购买了一种商品, 后来他在网上发现完全相同的这一商品在网上购买比普通商场中每件少 2 元, 他用 90 元在网上再次购买这一商品, 比上次在普通商场中多买了 3 件根据此可列方程求解.

【详解】设小明在网上购买的这一商品每件 x 元.

$$\frac{90}{x} - \frac{96}{x+2} = 3,$$

$$x^2 + 4x - 60 = 0,$$

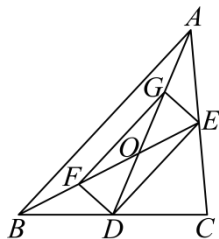
$$x_1 = -10, x_2 = 6.$$

经检验它们都是原方程的根, 但 $x = -10$ 不符合题意.

答: 小明在网上购买的这一商品每件 6 元.

【点睛】本题考查分式方程的应用, 设出价格, 根据件数作为等量关系列方程求解.

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 、 BE 分别是边 BC 、 AC 上的中线, AD 与 BE 交于点 O , 点 F 、 G 分别是 BO 、 AO 的中点, 连接 DE 、 EG 、 GF 、 FD .



(1) 求证: $FG \parallel DE$;

(2) 若 $AC = BC$, 求证: 四边形 $EDFG$ 是矩形.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据点 F 、 G 分别是 BO 、 AO 的中点, 得到 $FG \parallel AB$, 由 AD 、 BE 分别是边 BC 、 AC 上的中线, 得到 $DE \parallel AB$, 即可证明 $FG \parallel DE$;

(2) 根据第一问结论, 可得 $FG \parallel DE$, $FG = DE$, 即证得四边形 $EDFG$ 是平行四边形, 根据 $AC = BC$, 证得 $\triangle BAE \cong \triangle ABD$, 得到 $\angle ABE = \angle BAD$, 结合 $FG \parallel AB$, 得到 $GO = FO$, 再根据平行四边形对角线互相平分, 得到 $GD = EF$, 即证明四边形 $EDFG$ 是矩形.

【小问 1 详解】

$\because$ 点 F 、 G 分别是 BO 、 AO 的中点

$$\therefore FG \parallel AB, \quad FG = \frac{1}{2} AB$$

$\because AD$ 、 BE 分别是边 BC 、 AC 上的中线

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线

$$\therefore DE \parallel AB, \quad DE = \frac{1}{2} AB$$

$$\therefore FG \parallel DE, \quad FG = DE.$$

【小问 2 详解】

$\because AD$ 、 BE 分别是边 BC 、 AC 上的中线

$$\therefore AE = \frac{1}{2} AC, \quad BD = \frac{1}{2} BC$$

$\because AC = BC$,

$$\therefore AE = BD, \quad \angle BAE = \angle ABD$$

$$\text{在 } \triangle BAE \text{ 与 } \triangle ABD \text{ 中, } \begin{cases} AB = AB \\ \angle BAE = \angle ABD \\ AE = BD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BAE \cong \triangle ABD (\text{SAS})$$

$$\therefore \angle ABE = \angle BAD$$

$\because FG \parallel AB$,

$$\therefore \angle GFO = \angle ABE, \quad \angle FGO = \angle BAD$$

$$\therefore \angle GFO = \angle FGO,$$

$$\therefore GO = FO$$

$$\therefore FG \parallel DE, \quad FG = DE$$

$\therefore$ 四边形 $EDFG$ 是平行四边形

$\therefore GD, FE$ 互相平分

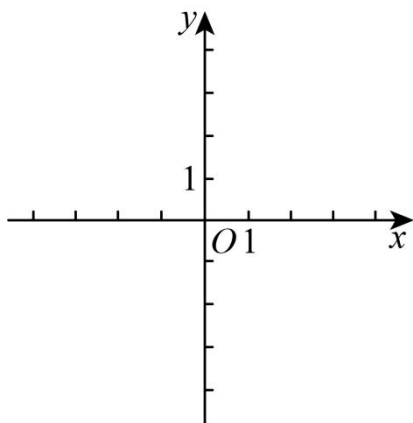
$$\therefore GD = 2GO, \quad EF = 2FO$$

$$\therefore GD = EF.$$

$\therefore$ 四边形 $EDFG$ 是矩形.

【点睛】 本题考查了三角形中位线的性质，平行线的判定和性质，三角形全等的判定和性质，等腰三角形的性质，平行四边形的判定和性质，矩形的判定，熟练掌握相关性质和判定是解题的关键.

24. 已知平面直角坐标系 xOy (如图), 过点 $(4, 6)$ 的直线 $y = kx + 3$ 与 y 轴交于点 A , 将此直线向下平移 $\frac{5}{2}$ 个单位, 所得到的直线 l 与 y 轴交于点 B .



(1) 求直线 l 的表达式;

(2) 点 C 位于第一象限且在直线 l 上, 点 D 在直线 $y = kx + 3$ 上, 如果以点 A, B, C, D 为顶点的四边形是菱形, 求点 C 的坐标.

【答案】 (1) $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

(2) C 的坐标为 $\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{4}\right)$ 或 $(2, 2)$

【解析】

【分析】 本题考查了求一次函数解析式，一次函数的平移，菱形的性质，解题的关键是熟练掌握用待定系数法求解函数解析式的方法和步骤，一次函数的平移规律，以及菱形四边相等，对边互相平行，对角线互相垂直平分.

(1) 先求出 k 的值, 再根据一次函数平移规律, 即可得出直线 l 的解析式;

(2) 先求出点 A 和点 B 的坐标, 再进行分类讨论: ①若 AB 为菱形的一边, 则 $AB \parallel CD$, $AB = BC$,

设 $C\left(t, \frac{3}{4}t + \frac{1}{2}\right)$, $t > 0$, 得出 $AB = \frac{5}{2}$, $BC^2 = \frac{25}{16}t^2$, 列出方程求出 t 的值即可; ②若 AB 为菱形的对角

线, 则 AB 与 CD 互相垂直平分, 设 $C\left(t, \frac{3}{4}t + \frac{1}{2}\right)$, $t > 0$, 根据中点坐标公式列出方程求解即可.

【小问 1 详解】

解: 由 $y = kx + 3$ 过点 $(4, 6)$, 得 $6 = 4k + 3$,

解得 $k = \frac{3}{4}$,

$\therefore$ 直线 $y = kx + 3$ 的解析式为 $y = \frac{3}{4}x + 3$;

$\therefore$ 直线 l 是直线 $y = \frac{3}{4}x + 3$ 下移 $\frac{5}{2}$ 个单位所得,

$\therefore$ 直线 l 的表达式为 $y = \frac{3}{4}x + 3 - \frac{5}{2} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$;

【小问 2 详解】

解: 把 $x = 0$ 代入 $y = \frac{3}{4}x + 3$ 得: $y = 3$,

$\therefore A(0, 3)$,

把 $x = 0$ 代入 $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$ 得: $y = \frac{1}{2}$,

$\therefore B\left(0, \frac{1}{2}\right)$,

①若 AB 为菱形的一边, 则 $AB \parallel CD$,

$\therefore$ 点 C 在第一象限,

$\therefore$ 点 D 只能在点 C 上方的直线 $y = kx + 3$ 上, 此时 $AB = BC$,

设 $C\left(t, \frac{3}{4}t + \frac{1}{2}\right)$, $t > 0$,

$\therefore A(0, 3)$, $B\left(0, \frac{1}{2}\right)$

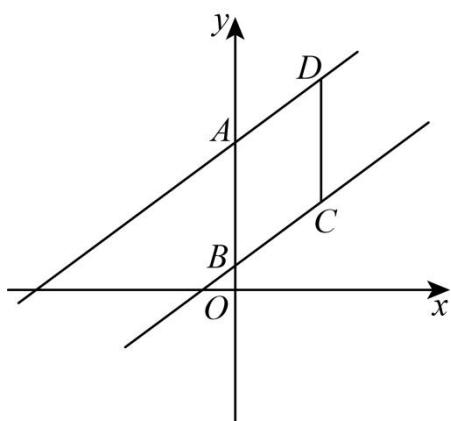
$\therefore AB = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, $BC^2 = t^2 + \left(\frac{3}{4}t + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{16}t^2$,

$\therefore \frac{25}{16}t^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$,

$\therefore t > 0$,

$$\therefore t = 2$$

$$\therefore C(2, 2).$$



②若 AB 为菱形的对角线，则 AB 与 CD 互相垂直平分，

$\therefore$ 点 C 位于第一象限且在直线 l 上，

$\therefore$ 直线 CD 与直线 $y = kx + 3$ 在第二象限的交点即为点 D ，

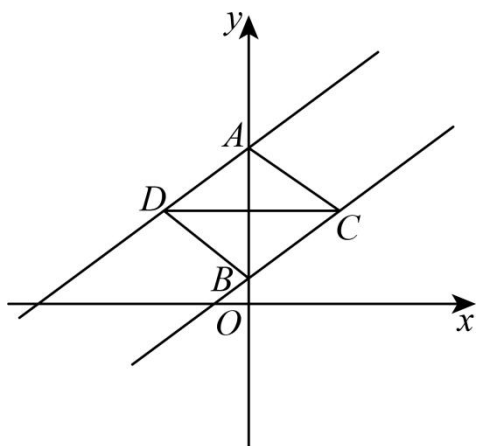
此时设 $C\left(t, \frac{3}{4}t + \frac{1}{2}\right)$, $t > 0$,

$$\therefore A(0, 3), \quad B\left(0, \frac{1}{2}\right),$$

$$\therefore \frac{3}{4}t + \frac{1}{2} = \frac{3 + \frac{1}{2}}{2},$$

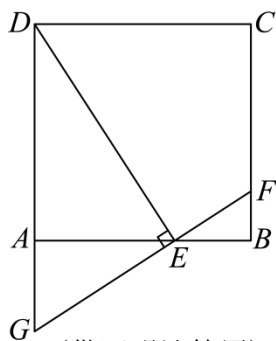
$$\therefore t = \frac{5}{3},$$

$$\therefore C\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{4}\right)$$

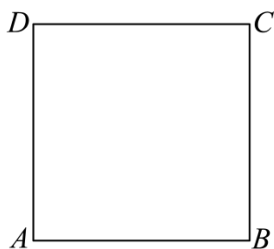


综上, C 的坐标为 $(\frac{5}{3}, \frac{7}{4})$ 或 $(2, 2)$.

25. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E 在边 AB 上 (点 E 与点 A 、 B 不重合), 过点 E 作 $FG \perp DE$, FG 与边 BC 相交于点 F , 与边 DA 的延长线相交于点 G .



(供证明计算用)



(供操作实验用)

(1) 由几个不同的位置, 分别测量 BF 、 AG 、 AE 的长, 从中你能发现 BF 、 AG 、 AE 的数量之间具有怎样的关系? 并证明你所得到的结论;

(2) 连接 DF , 如果正方形的边长为 2, 设 $AE = x$, $\triangle DFG$ 的面积为 y , 求 y 与 x 之间的函数解析式, 并写出函数的定义域;

(3) 如果正方形的边长为 2, FG 的长为 $\frac{5}{2}$, 求点 C 到直线 DE 的距离.

【答案】 (1) $BF + AG = AE$, 见解析

(2) $y = \frac{4+x^2}{2}$, $0 < x < 2$

(3) 点 C 到直线 DE 的距离为 $\frac{8}{5}$

【解析】

【分析】 (1) 过点 F 作 $FH \perp DA$, 垂足为 H , 易得四边形 $ABFH$ 是矩形, 可得 $FH = AB = DA$, $BF = AH$, 再证明 $\triangle FHG \cong \triangle DAE$, 由全等三角形的性质可得 $GH = AE$, 即 $HA + AG = AE$, 结合 $BF = HA$, 即可证明结论;

(2) 连接 DF , 结合全等三角形的性质以及勾股定理可得 $FG = DE = \sqrt{4+x^2}$, 根据三角形面积公式即可获得 y 与 x 之间的函数解析式, 并确定该函数解析式的定义域即可;

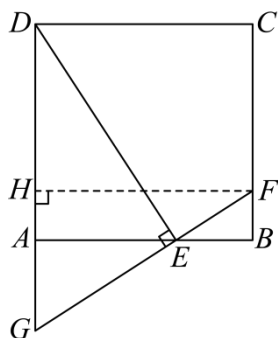
(3) 连接 CE , 首先确定 $S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}CD \cdot AD = 2$, 故可设点 C 到直线 DE 的距离为 h , 则有

$S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}DE \cdot h = 2$, 代入数值并求解, 即可获得答案.

【小问 1 详解】

解: $BF + AG = AE$, 证明如下:

过点 F 作 $FH \perp DA$ ，垂足为 H ，如下图，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore AB = AD$ ， $\angle DAB = \angle B = 90^\circ$ ，

$\because FH \perp DA$ ，

$\therefore \angle AHF = \angle DAB = \angle B = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABFH$ 是矩形，

$\therefore FH = AB = DA$ ， $BF = AH$ ，

$\because FG \perp DE$ ，

$\therefore \angle G + \angle ADE = \angle ADE + \angle AED = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle G = \angle AED$ ，

在 $\triangle FHG$ 和 $\triangle DAE$ 中，

$$\begin{cases} \angle DAE = \angle FHG = 90^\circ \\ \angle AED = \angle G \\ DA = FH \end{cases},$$

$\therefore \triangle FHG \cong \triangle DAE$ (AAS)，

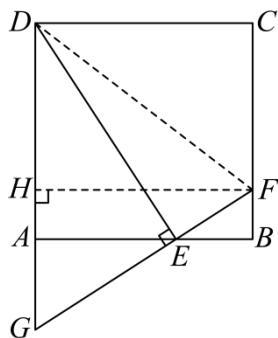
$\therefore GH = AE$ ，即 $HA + AG = AE$ ，

$\because BF = HA$ ，

$\therefore BF + AG = AE$ ；

【小问 2 详解】

连接 DF ，如下图，



由 (1) 可知, $\triangle FHG \cong \triangle DAE$,

$$\therefore FG = DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{4 + x^2},$$

$$\therefore S_{\triangle DGF} = \frac{1}{2} FG \cdot DE,$$

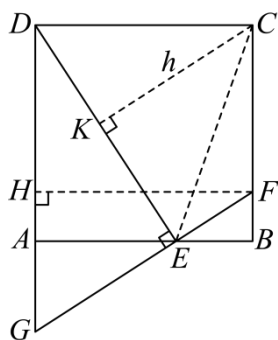
$$\therefore y \text{ 与 } x \text{ 之间的函数解析式为 } y = \frac{4 + x^2}{2},$$

$\therefore$ 点 E 在边 AB 上, 且点 E 与点 A 、 B 不重合,

$\therefore$ 该函数解析式的定义域为 $0 < x < 2$.

【小问 3 详解】

连接 CE , 如下图,



$$\therefore S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} CD \cdot AD = 2,$$

$$\therefore \text{可设点 } C \text{ 到直线 } DE \text{ 的距离为 } h, \text{ 则有 } S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} DE \cdot h = 2,$$

$$\therefore DE = FG = \frac{5}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} h = 2,$$

$$\therefore h = \frac{8}{5},$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 到直线 } DE \text{ 的距离为 } \frac{8}{5}.$$

【点睛】 本题主要考查了正方形的性质、矩形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、勾股定理、三角

形面积公式、一次函数的应用等知识，熟练掌握相关知识，正确作出辅助线是解题关键.