

2022 学年度第二学期八年级数学学科

2023. 5

(满分 100 分 时间 60 分钟)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 满分 18 分)

1. 下列函数中是一次函数的是 ()

A. $y = \frac{2}{x} + 2$

B. $y = -x$

C. $y = x^2 + 2$

D. $y = \sqrt{x}$

【答案】 B

【解析】

【分析】依据一次函数的定义进行解答即可, 一次函数的定义: 一般地, 形如 $y = kx + b$ ($k \neq 0$, k 、 b 是常数) 的函数, 叫做一次函数.

【详解】解: A. $y = \frac{2}{x} + 2$, 自变量的次数不为 1, 不是一次函数, 故 A 选项不符合题意;

B. $y = -x$ 是一次函数, 故 B 选项符合题意;

C. $y = x^2 + 2$, 自变量的次数不为 1, 故 C 不符合题意;

D. $y = \sqrt{x}$, 自变量的次数不为 1, 故 D 选项不符合题意;

故选: B.

【点睛】本题考查一次函数的定义, 掌握一次函数的定义是解题的关键.

2. 方程 $x^3 - x = 0$ 的根是 ()

A. 0, -1

B. -1, +1

C. 0, +1

D. -1, 0, +1

【答案】 D

【解析】

【分析】把方程进行因式分解得到 $x(x+1)(x-1) = 0$, 据此求解即可.

【详解】解: $\because x^3 - x = 0$,

$$\therefore x(x^2 - 1) = 0,$$

$$\therefore x(x+1)(x-1) = 0,$$

解得 $x = 0$ 或 $x = \pm 1$,

故选 D.

【点睛】本题主要考查了利用因式分解法解高次方程, 正确对方程进行因式分解是解题的关键.

3. 如果矩形的一边与对角线的夹角是 50° ，则两条对角线相交所成的锐角的度数为 ()

A. 50°

B. 60°

C. 70°

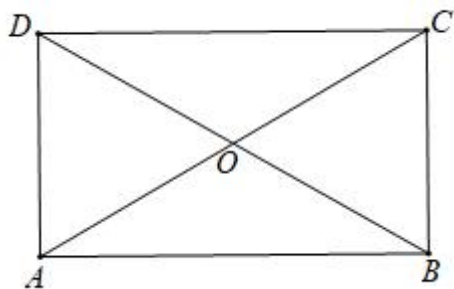
D. 80°

【答案】D

【解析】

【分析】根据矩形的性质和等边对等角，进行求解即可.

【详解】解：如图，矩形 $ABCD$, $\angle ADB = 50^\circ$,



则: $OA = OB = OC = OD$, $\angle ADC = 90^\circ$,

$\therefore \angle OAD = \angle ODA = 50^\circ$, $\angle OCD = \angle ODC = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$,

$\therefore \angle AOD = 180^\circ - 2 \times 50^\circ = 80^\circ$, $\angle COD = 180^\circ - 2 \times 40^\circ = 100^\circ$,

$\therefore$ 两条对角线相交所成的锐角的度数为 80° ;

故选 D.

【点睛】本题考查矩形的性质，等腰三角形的判定和性质. 熟练掌握矩形的对角线相等且平分，是解题的关键.

4. 下列各式错误的是 ()

A. $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$

B. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

C. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

D. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

【答案】A

【解析】

【分析】根据向量的线性计算，逐一进行判断即可.

【详解】解：A、 $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ ，故选项错误，符合题意；

B、 $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ，故选项正确，不符合题意；

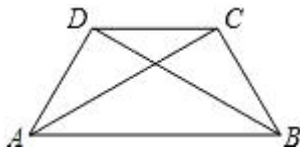
C、 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ，故选项正确，不符合题意；

D、 $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ ，故选项正确，不符合题意；

故选 A.

【点睛】 本题考查向量的线性计算. 熟练掌握相关运算法则, 是解题的关键.

5. 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AD=DC=CB$, $AC \perp BC$, 那么下列结论不正确的是 ()



A. $AC=2CD$

B. $DB \perp AD$

C. $\angle ABC=60^\circ$

D. $\angle DAC=\angle CAB$

【答案】 A

【解析】

【分析】 A、根据三角形的三边关系即可得出 A 不正确；B、通过等腰梯形的性质结合全等三角形的判定与性质即可得出 $\angle ADB=90^\circ$ ，从而得出 B 正确；C、由梯形的性质得出 $AB \parallel CD$ ，结合角的计算即可得出 $\angle ABC=60^\circ$ ，即 C 正确；D、由平行线的性质结合等腰三角形的性质即可得出 $\angle DAC=\angle CAB$ ，即 D 正确. 综上所述即可得出结论.

【详解】 解： A、 $\because AD=DC$,

$\therefore AC < AD+DC=2CD$, A 不正确;

B、 $\because$ 在梯形 $ABCD$ 中, $AD=CB$,

$\therefore$ 梯形 $ABCD$ 为等腰梯形,

$\therefore \angle DAB=\angle CBA$.

在 $\triangle DAB$ 和 $\triangle CBA$ 中,

$\because AD=BC, \angle BAD=\angle CBA, AB=BA$

$\therefore \triangle DAB \cong \triangle CBA$ (SAS),

$\therefore \angle ADB=\angle BCA$.

$\because AC \perp BC$,

$\therefore \angle ADB=\angle BCA=90^\circ$,

$\therefore DB \perp AD$, B 成立;

C、 $\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle CDB=\angle ABD, \angle ABC+\angle DCB=180^\circ$,

$\because DC=CB$,

$\therefore \angle CDB=\angle CBD=\angle ABD$,

$\therefore \angle ACB=90^\circ$,

$$\therefore \angle CDB = \angle CBD = \angle ABD = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 60^\circ, \text{ C 正确};$$

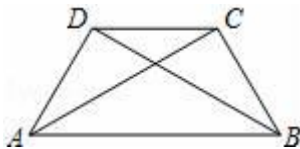
$$\text{D、} \because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle DCA = \angle CAB,$$

$$\therefore AD = DC,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle DCA = \angle CAB, \text{ D 正确}.$$

故选 A.



【点睛】本题考查了梯形的性质、平行线的性质、等腰三角形的性质以及全等三角形的判定与性质，解题的关键是逐项分析四个选项的正误。本题属于中档题，稍显繁琐，但好在该题为选择题，只需由三角形的三边关系得出 A 不正确即可。

6. 在平行四边形、矩形、菱形、等腰梯形中任选两个图形，那么下列事件中为不可能事件的是（ ）

A. 这两个图形都是中心对称图形

B. 这两个图形都不是中心对称图形

C. 这两个图形都是轴对称图形

D. 这两个图形都是轴对称图形又是中心对称图形

【答案】B

【解析】

【分析】根据事件的分类，以及平行四边形，矩形，菱形，等腰梯形的对称性，进行判断即可。

【详解】解： $\because$ 平行四边形是中心对称图形，矩形和菱形既是轴对称图形，又是中心对称图形，等腰梯形是轴对称图形，

$\therefore$ A、C、D 均为随机事件，不符合题意；B、是不可能事件，符合题意；

故选 B.

【点睛】本题考查事件的分类，平行四边形、矩形、菱形、等腰梯形的对称性。熟练掌握平行四边形是中心对称图形，矩形和菱形既是轴对称图形，又是中心对称图形，等腰梯形是轴对称图形，是解题的关键。

二、填空题（本大题共 12 题，每题 3 分，满分 36 分）

7. 一次函数 $y = -2x + 4$ 的图象与坐标轴所围成的三角形面积是_____.

【答案】4

【解析】

【分析】结合一次函数 $y = -2x + 4$ 的图象可以求出图象与 x 轴的交点为 $(2, 0)$ ，以及与 y 轴的交点为 $(0, 4)$ ，可求得图象与坐标轴所围成的三角形的面积。

【详解】令 $y=0$ ，则 $x=2$ ；令 $x=0$ ，则 $y=4$ ，

$\therefore$ 一次函数 $y=-2x+4$ 的图象与 x 轴的交点为 $(2, 0)$ ，与 y 轴的交点为 $(0, 4)$ 。

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4.$$

故答案为：4

【点睛】本题考查了一次函数图象与坐标轴的交点坐标。关键令 $y=0$ ，可求直线与 x 轴的交点坐标；令 $x=0$ ，可求直线与 y 轴的交点坐标。

8. 将一次函数 $y=2x-2$ 的图像向上平移 5 个单位后，所得图像的函数表达式为_____。

【答案】 $y=2x+3$

【解析】

【分析】直接利用一次函数平移规律“上加下减”进而得出即可。

【详解】解： $\because$ 一次函数 $y=2x-2$ 的图像向上平移 5 个单位，

$\therefore$ 所得图像的函数表达式为： $y=2x-2+5=2x+3$

故答案为： $y=2x+3$

【点睛】本题考查了一次函数平移，掌握平移规律是解题的关键。

9. 关于 x 的方程 $ax=b$ 有无数解，则 a 、 b 满足的条件是_____。

【答案】 $a=b=0$

【解析】

【分析】就方程的系数 a 、 b 进行考虑即可求解。

【详解】解：当 $a \neq 0$ 时，方程 $ax=b$ 有唯一解；当 $a=0$ ， $b \neq 0$ 时，方程 $ax=b$ 无解；当 $a=b=0$ 时，方程 $ax=b$ 有无数解；

故关于 x 的方程 $ax=b$ 有无数解，则 a 、 b 满足的条件是 $a=b=0$ ；

故答案为： $a=b=0$ 。

【点睛】本题考查了一元一次方程 $ax=b$ 的解的情况，分类讨论是关键。

10. 已知关于 x 的分式方程 $\frac{x}{x-1} + \frac{k}{x-1} = \frac{x}{x+1}$ 有增根 $x=1$ ，则 $k=$ _____。

【答案】 -1

【解析】

【分析】先把分式方程化为整式方程得到 $(2+k)x+k=0$ ，然后把 $x=1$ 代入得 $2+k+k=0$ ，再解关于 k 的方程即可。

【详解】解：去分母得 $x(x+1)+k(x+1)=x(x-1)$,

整理得 $(2+k)x+k=0$,

把 $x=1$ 代入得 $2+k+k=0$, 解得 $k=-1$;

所以当 $k=-1$ 时, 原方程有增根 $x=1$.

故答案为 -1 .

【点睛】本题考查了分式方程的增根: 在分式方程变形时, 有可能产生不适合原方程的根, 即代入分式方程后分母的值为 0 或是转化后的整式方程的根恰好是原方程未知数的允许值之外的值的根, 叫做原方程的增根.

11. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}=\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\vec{0}$

【解析】

【分析】根据平行四边形法则进行求解即可.

【详解】解: $\because$ 平行四边形 $ABCD$,

$$\therefore \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$$

$$\therefore \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$$

$$=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC},$$

$$=\vec{0};$$

故答案为: $\vec{0}$.

【点睛】本题考查向量的线性计算. 熟练掌握相关运算法则, 是解题的关键.

12. 某校组织学生步行去相距 5 千米的科技馆春游, 返回时由于步行速度比去时每小时少 2 千米, 结果时间比去时多用了半小时, 如果设学生去时的步行速度是 x 千米/时, 则可根据题目列出方程 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{5}{x-2}-\frac{5}{x}=\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】设学生去时的步行速度是 x 千米/时, 则返回时步行的速度为 $(x-2)$ 千米/小时, 根据时间 = 路程 $\div$ 速度结合返回时比去时多用了半小时, 即可得出关于 x 的分式方程.

【详解】解: 设学生去时的步行速度是 x 千米/时, 则返回时步行的速度为 $(x-2)$ 千米/小时,

依题意, 得: $\frac{5}{x-2}-\frac{5}{x}=\frac{1}{2}$,

故答案是: $\frac{5}{x-2}-\frac{5}{x}=\frac{1}{2}$.

【点睛】 本题考查了由实际问题抽象出分式方程，找准等量关系，正确列出分式方程是解题的关键.

13. 如果一个正 n 边形的内角和小于外角和，那么 n 等于_____.

【答案】 3

【解析】

【分析】 根据任意多边形的外角都为 360° ，结合题意即可求解.

【详解】 解： $\because$ 任意多边形的外角都为 360° ， 如果一个正 n 边形的内角和小于外角和

$$\therefore (n-2) \times 180^\circ < 360^\circ$$

解得： $n < 4$

又 $\because n \geq 3$ 且 n 为正整数，

$$\therefore n = 3,$$

故答案为： 3.

【点睛】 本题考查了正多边形的内角和与外角和，熟练掌握正多边形的内角和与外角和是解题的关键.

14. 已知菱形边长为 6，一个内角为 60° ，则菱形的较长对角线的长是_____.

【答案】 $6\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 根据题意可判断菱形较短的对角线与两邻边构成等边三角形，再利用等边三角形的性质求出较长对角线的一半，问题即得解决.

【详解】 解： 如图， $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形， $AB=BC=6$ ， $\angle ABC=60^\circ$ ，

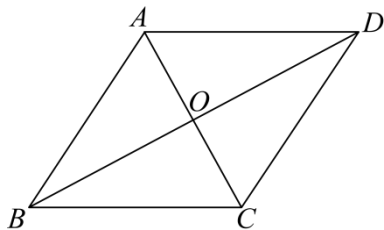
$\therefore AO=CO$ ， $BO=DO$ ， $AC \perp BD$ ， $\triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore AC=6, \quad AO = \frac{1}{2}AC = 3,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABO$ 中， $BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$ ，

$$\therefore BD=2BO=6\sqrt{3}.$$

故答案为 $6\sqrt{3}$.



【点睛】 本题考查了菱形的性质、等边三角形的判定和性质以及勾股定理等知识，属于常考题型，熟练掌握基本知识是解题关键.

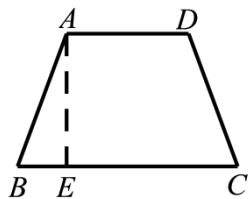
15. 一个等腰梯形, 它的上底是 12 厘米, 下底是 22 厘米, 高和上底一样长, 则这个等腰梯形的周长是_____厘米.

【答案】 60

【解析】

【分析】 设等腰梯形为 $ABCD$, $AD = 12$ 厘米, $BC = 22$ 厘米, 过点 A 作梯形的高 AE , 则 $AE = 12$ 厘米, 由勾股定理可求得腰长 AB , 从而可求得周长.

【详解】 解: 如图, 过点 A 作梯形的高 AE , E 为垂足,



则 $AE = AD = 12$ 厘米,

由等腰梯形的性质得: $BE = \frac{1}{2}(BC - AD) = 5$ 厘米,

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, 由勾股定理得 $AB = \sqrt{AE^2 + BE^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ (厘米)

$\therefore$ 等腰梯形的周长为: $12 + 22 + 2 \times 13 = 60$ (厘米)

故答案为: 60.

【点睛】 本题考查了等腰梯形的性质, 勾股定理, 由勾股定理求得腰长是关键.

16. 小聪和小明两个同学玩“石头, 剪刀、布”的游戏, 随机出手一次是平局的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 列表表示所有可能出现的结果, 再确定符合条件的结果, 根据概率公式计算即可.

【详解】 解: 列表如下:

	石头	剪子	布
石头	(石头, 石头)	(石头, 剪子)	(石头, 布)
剪子	(剪子, 石头)	(剪子, 剪子)	(剪子, 布)
布	(布, 石头)	(布, 剪子)	(布, 布)

一共有 9 种可能出现的结果, 每种结果出现的可能性相同, 出手相同的时候即为平局, 有 3 种, 所以随机

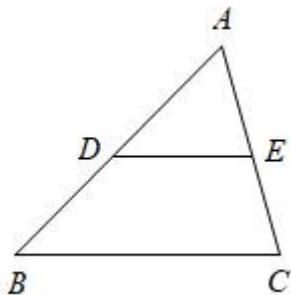
出手一次平局的概率是 $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$,

故答案为: $\frac{1}{3}$.

【点睛】 本题主要考查了列表求概率, 掌握概率计算公式是解题的关键.

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 分别是边 AB 、 AC 的中点, 已知 $DE=6\text{cm}$, 则

$BC=$ _____ cm .



【答案】 12

【解析】

【分析】 先说明 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线, 利用中位线性质可求得 BC 长.

【详解】 解: $\because D$ 、 E 分别是 AB 、 AC 的中点

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

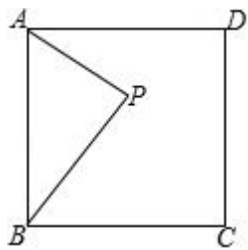
$\because DE=6\text{cm}$,

$\therefore BC=2DE=12\text{cm}$

故答案为: 12.

【点睛】 本题考查三角形中位线的性质, 注意三角形的中位线平行且等于对应三角形的第三边的一半.

18. 已知, 如图, P 是边长为5的正方形 $ABCD$ 内一点, $AP=3$, $BP=4$, 将 $\triangle ABP$ 绕点 B 旋转, 使 P 点落在直线 BC 上, 点 A 落在点 A' 上, 则线段 $A'C$ 的长度为_____.



【答案】 $\sqrt{10}$ 或 $3\sqrt{10}$ 或 $3\sqrt{10}$ 或 $\sqrt{10}$

【解析】

【分析】 由勾股定理证得 $\angle APB=90^\circ$, 由旋转的性质得到 $\triangle APB \cong \triangle A'P'B$, 进而求得 $P'C$, 由勾股定理即可求得结论.

【详解】 解: $\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为5,

$\therefore AB=BC=5$,

$$\because 3^2 + 4^2 = 5^2,$$

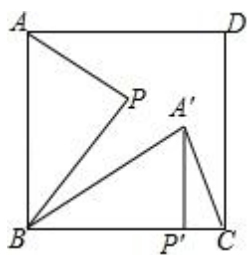
$$\therefore AP^2 + BP^2 = AB^2,$$

$$\therefore \angle APB = 90^\circ,$$

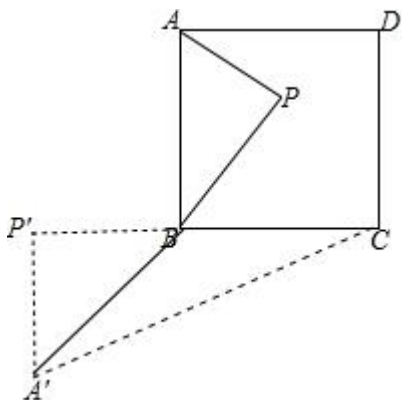
由旋转的性质知 $AP = A'P' = 3$, $BP = BP' = 4$, $\angle APB = \angle A'P'B = 90^\circ$, 即 $\angle A'P'C = 90^\circ$,

$$\therefore P'C = BC - BP' = 1,$$

$$\therefore A'C = \sqrt{(A'P')^2 + (P'C)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10},$$



当点 P' 落在 CB 的延长线上时, $CP' = 4 + 5 = 9$, $CA' = \sqrt{3^2 + 9^2} = 3\sqrt{10}$



故答案为: $\sqrt{10}$ 或 $3\sqrt{10}$.

【点睛】本题主要考查了图形的旋转, 勾股定理, 正方形的性质, 掌握旋转的性质是解题的关键.

三、简答题 (本大题共 4 题, $6+6+8+4=24$ 分)

19. 解方程 $\frac{1}{1-x} - 2 = \frac{3x-x^2}{1-x^2}$.

【答案】 $x = -\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】观察可得最简公分母是 $(1+x)(1-x)$, 方程两边乘最简公分母, 可以把分式方程转化为整式方程求解.

【详解】解: 方程的两边同乘 $(1+x)(1-x)$, 得,

$$(1+x) - 2(1-x^2) = 3x - x^2,$$

$$\text{即 } 3x^2 - 2x - 1 = 0,$$

$$\therefore (3x+1)(x-1) = 0,$$

$$\therefore x-1=0 \text{ 或 } 3x+1=0,$$

$$\text{解得: } x=1 \text{ 或 } x=-\frac{1}{3}$$

$$\text{检验: 当 } x=1 \text{ 时, } (1+x)(1-x) = 0,$$

$\therefore x=1$ 是原方程的增根, 舍去.

$$\text{当 } x=-\frac{1}{3} \text{ 时, } (1+x)(1-x) = \frac{8}{9} \neq 0,$$

$$\therefore \text{原方程的解为: } x=-\frac{1}{3}.$$

【点睛】 本题考查的分式方程的解法, 一元二次方程的解法, 掌握“去分母, 把分式方程化为整式方程”是解题的关键.

$$20. \text{ 解方程组: } \begin{cases} x+2y=12 \\ x^2-3xy+2y^2=0 \end{cases}$$

$$\text{【答案】 } \begin{cases} x_1=4 \\ y_1=4 \end{cases}, \begin{cases} x_2=6 \\ y_2=3 \end{cases}$$

【解析】

【分析】 首先把第二个方程左边分解因式, 即可转化为两个一次方程, 分别与第一个方程组成方程组, 即可求解.

【详解】 解: 由 (2) 得 $(x-y)(x-2y) = 0$.

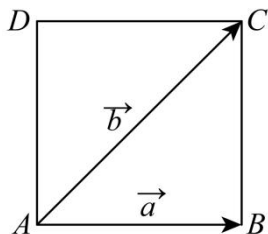
$$\therefore x-y=0 \text{ 或 } x-2y=0,$$

$$\text{原方程组可化为 } \begin{cases} x+2y=12 \\ x-y=0 \end{cases}, \begin{cases} x+2y=12 \\ x-2y=0 \end{cases},$$

$$\text{解这两个方程组, 得原方程组的解为: } \begin{cases} x_1=4 \\ y_1=4 \end{cases}, \begin{cases} x_2=6 \\ y_2=3 \end{cases}.$$

【点睛】 本题主要考查了高次方程组的解法, 解题的基本思想是降次, 掌握降次的方法是解高次方程的关键.

$$21. \text{ 如图, 在正方形 } ABCD \text{ 中, } AB=2, \text{ 记 } \overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AC}=\vec{b}.$$



(1) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{BA} = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 写出图中所有与 $\overrightarrow{BA}$ 互为相反向量的向量: $\underline{\hspace{2cm}}$;

(3) 画向量 $\overrightarrow{OM} = \vec{a} + \vec{b}$;

(4) 求 $|\overrightarrow{OM}| = \underline{\hspace{2cm}}$. (直接写答案)

【答案】 (1) $2\vec{a} - \vec{b}$

(2) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$

(3) 见解析 (4) $2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 (1) 根据正方形的性质, 向量和差运算法则求解即可;

(2) 根据正方形的性质和相反向量的定义, 即可解决问题;

(3) 根据向量加法的平行四边形法则求解即可;

(4) 根据勾股定理即可得出答案.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 正方形 $ABCD$

$$\therefore AD = BC,$$

$$\because \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC},$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \vec{b} - \vec{a},$$

$$\therefore \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = -(\vec{b} - \vec{a}) + \vec{a} = 2\vec{a} - \vec{b},$$

【小问 2 详解】

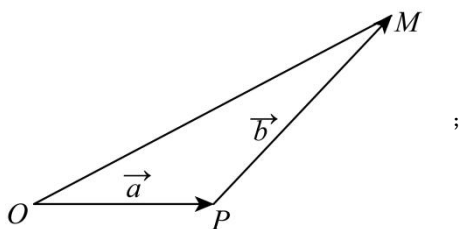
解: $\because$ 正方形 $ABCD$,

$$\therefore AB = CD,$$

$\therefore$ 图中所有与 $\overrightarrow{BA}$ 互为相反向量的向量: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$;

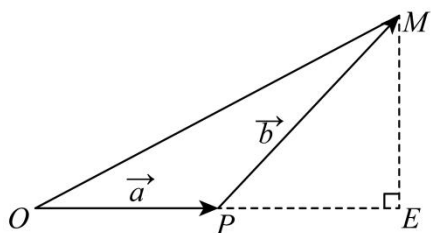
【小问 3 详解】

解：如图，所画向量 $\overrightarrow{OM} = \vec{a} + \vec{b}$ ，



【小问 4 详解】

解：如图，过点 M 作 $ME \perp OP$ 与点 E ，



$\because$ 正方形 $ABCD$ 中， $AB = 2$ ，

则有 $OP = PE = 2$ ， $\angle MPE = 45^\circ$ ， $ME = 2$ ，

$\therefore OE = 4$ ，

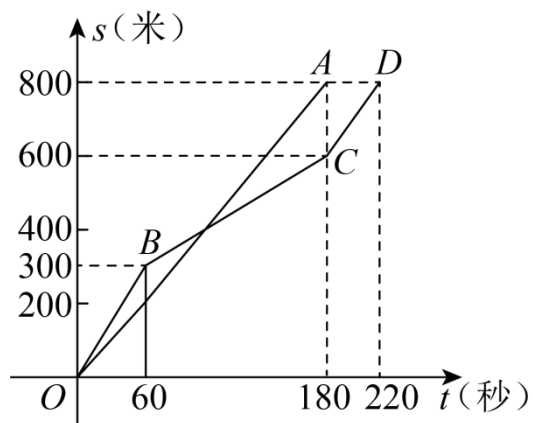
由勾股定理得 $OM = \sqrt{OE^2 + ME^2} = 2\sqrt{5}$ ，

即 $|\overrightarrow{OM}| = 2\sqrt{5}$ 。

故答案为： $2\sqrt{5}$

【点睛】 本题考正方形的性质，勾股定理，向量等知识，解题的关键是理解向量的定义以及向量和差运算法则，属于中考常考题型。

22. 在女子 800 米耐力测试中，某考点同时起跑的小莹和小梅所跑的路程 S （米）与所用时间 t （秒）之间的函数关系分别如图中线段 OA 和折线 $OBCD$ 所示。



(1) _____先到终点, 当她到终点时, 另一位同学距离终点_____米;

(2) 起跑之初, _____领先, 第_____秒时被追及?

【答案】(1) 小莹, 200

(2) 小梅, $\frac{540}{7}$

【解析】

【分析】(1) 根据图象信息进行作答即可;

(2) 求出 OA 的解析式, BC 的解析式, 联立进行求解即可.

【小问 1 详解】

解: 由图象可知: 小莹比小梅先到终点, 此时小梅距离终点 200 米;

故答案为: 小莹, 200;

【小问 2 详解】

根据图象可以知道 起跑之初, 小梅领先,

小莹的速度为: $\frac{800}{180} = \frac{40}{9}$ (米/秒),

故线段 OA 的解析式为: $y = \frac{40}{9}x$,

设线段 BC 的解析式为: $y = kx + b$, 根据题意得:

$$\begin{cases} 60k + b = 300 \\ 180k + b = 600 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = 2.5 \\ b = 150 \end{cases},$$

$\therefore$ 线段 BC 的解析式为: $y = 2.5x + 150$,

解方程 $\frac{40}{9}x = 2.5x + 150$, 得 $x = \frac{540}{7}$,

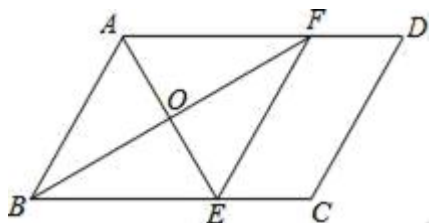
故小梅在起跑后 $\frac{540}{7}$ 秒时被追及.

故答案为: 小梅, $\frac{540}{7}$.

【点睛】本题考查利用函数的图象解决实际问题, 正确理解函数图象横纵坐标表示的意义, 理解问题的过程, 就能够通过图象得到函数解析式.

四、解答题 (本大题共 3 题, $6+7+9=22$, 满分 22 分)

23. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, AE 平分 $\angle BAD$, 交 BC 于点 E , BF 平分 $\angle ABC$, 交 AD 于点 F , AE 与 BF 交于点 O , 连接 EF . 求证: 四边形 $ABEF$ 是菱形.



【答案】 详见解析

【解析】

【分析】 先证明四边形 ABEF 是平行四边形，再证明邻边相等即可证明.

【详解】 证明： $\because$ 四边形 ABCD 是平行四边形，

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle AFB = \angle FBE,$$

$$\because BF \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle FBE,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle AFB,$$

$$\therefore AB = AF,$$

同理 $AB = BE$,

$$\therefore AF = BE,$$

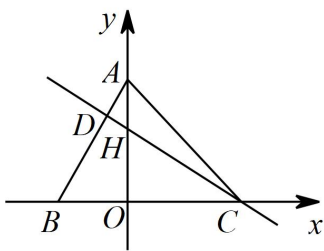
$\therefore$ 四边形 ABEF 是平行四边形，

$$\because AB = BE,$$

$\therefore$ 四边形 ABEF 是菱形.

【点睛】 本题考查平行四边形的性质、菱形的判定和性质等知识，解题的关键记住菱形的判定方法.

24. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中， $\triangle ABC$ 的顶点 A 在 y 轴上， BC 边与 x 轴重合，过点 C 作 AB 的垂线分别交 AB 和 y 轴于点 D、H， $AB = HC$ ，线段 OB ， OC ($OB < OC$) 的长是方程 $x^2 - 6x + 8 = 0$ 的根.



(1) 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 求直线 CD 的解析式.

【答案】 (1) 12 (2) $y = -\frac{1}{2}x + 2$

【解析】

【分析】 (1) 先解一元二次方程求出 $OB = 2$, $OC = 4$, 则 $BC = 6$, 再证明 $\triangle AOB \cong \triangle COH$, 得到 $OA = OC = 4$, 则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}OA \cdot BC = 12$;

(2) 由全等三角形的性质得到 $OH = OB = 2$, 即 $H(0, 2)$, 再求出 $C(4, 0)$, 即可利用待定系数法求出直线 CD 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

【小问 1 详解】

解: $\because x^2 - 6x + 8 = 0$,

$$\therefore (x-2)(x-4) = 0,$$

解得 $x = 2$ 或 $x = 4$,

$\therefore$ 线段 OB , OC ($OB < OC$) 的长是方程 $x^2 - 6x + 8 = 0$ 的根

$$\therefore OB = 2, OC = 4,$$

$$\therefore BC = 6,$$

$$\because AB \perp CD,$$

$$\therefore \angle OBA + \angle OCH = 90^\circ = \angle OBA + \angle OAB,$$

$$\therefore \angle OCH = \angle OAB,$$

$$\text{又} \because \angle AOB = \angle COH = 90^\circ, AB = CH,$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COH (\text{AAS}),$$

$$\therefore OA = OC = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}OA \cdot BC = 12;$$

【小问 2 详解】

解: $\because \triangle AOB \cong \triangle COH$,

$$\therefore OH = OB = 2,$$

$$\therefore H(0, 2),$$

$$\because OC = 4,$$

$$\therefore C(4, 0),$$

设直线 CD 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\therefore \begin{cases} 4k + b = 0 \\ b = 2 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = -\frac{1}{2}, \\ b = 2 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 CD 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

【点睛】 本题主要考查了求一次函数解析式，解一元二次方程，全等三角形的性质与判定，求三角形面积，灵活运用所学知识是解题的关键.

25. 已知矩形 $ABCD$ 中, $AB = 8$, 点 M 在边 BC 上, 且 $BM = 6$, 点 P 在边 AD 或 DC 上, 连接 AM 、 AP 、 MP , 设 $AD = x$.

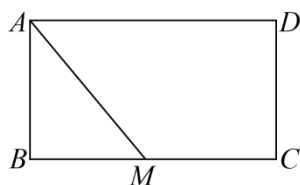


图1

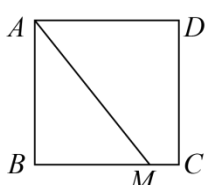
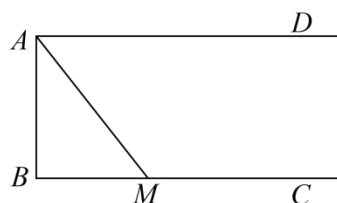


图2



备用图

- (1) 如图 1, 当 $S_{\triangle ABM} : S_{\text{四边形}ADCM} = 3:7$ 时, 求 x 的值;
- (2) 如图 2, 当 $x = 8$ 时, 如果 $\triangle AMP$ 为等腰三角形, 求 $\triangle AMP$ 的面积;
- (3) 直接写出使得 $\triangle AMP$ 为等腰三角形的点 P 最多有几个? 并指出使得点 P 个数最多时 x 的取值范围.

【答案】 (1) $x = 10$

(2) $\frac{25}{4}$ 或 14

(3) 使得 $\triangle AMP$ 为等腰三角形的点 P 最多有 4 个, 此时 $12 < x \leq 16$

【解析】

【分析】 (1) 根据题意得到 $S_{\triangle ABM} : S_{\text{四边形}ABCD} = 3:10$, 然后分别求出 $S_{\triangle ABM}$ 、 $S_{\text{四边形}ABCD}$ 的面积, 从而建立方程求解即可;

(2) 当点 P 在 AD 上时, $\triangle APM$ 不可能是等腰三角形, 再分图 2-1 和图 2-2 两种情况, 利用勾股定理求出 DP 、 CP 的长, 进而根据 $S_{\triangle APM} = S_{\text{矩形}ABCD} - S_{\triangle ABM} - S_{\triangle PCM} - S_{\triangle ADP}$ 求出对应的面积即可;

(3) 根据题意画出对应的示意图, 确定点 P 个数最多时的情况, 再求出对应的临界情况下 x 的值即可得到答案.

【小问 1 详解】

解: $S_{\triangle ABM} : S_{\text{四边形}ADCM} = 3 : 7$,

$$\therefore S_{\triangle ABM} : S_{\text{四边形}ABCD} = 3 : 10,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore \angle B = 90^\circ, \quad S_{\text{矩形}ABCD} = AB \cdot AD = 8x$$

$$\therefore S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot BM = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24,$$

$$\therefore 24 : 8x = 3 : 10,$$

$$\therefore x = 10;$$

【小问 2 详解】

解: 如图 2, 过点 M 作 $MH \perp AD$ 于 H , 连接 MD , 则四边形 $ABMH$ 是矩形,

$$\therefore MH = AB = 8,$$

$$\therefore AD = BC = x = 8,$$

$$\therefore CM = BC - BM = 2,$$

在 $\text{Rt}\triangle MCD$ 中, 由勾股定理得 $DM = \sqrt{CM^2 + CD^2} = 2\sqrt{17}$,

在 $\text{Rt}\triangle ABM$ 中, 由勾股定理得 $AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = 10$,

$$\therefore \text{当点 } P \text{ 在 } AD \text{ 上时, } AD = MH \leq PM \leq AM,$$

$$\text{又} \because \text{当 } PM = MH = 8 \text{ 时, } AH < AD = 8,$$

$$\therefore \text{当点 } P \text{ 在 } AD \text{ 上时, } \triangle APM \text{ 不可能是等腰三角形;}$$

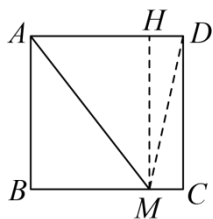


图2

如图 2-1 所示, 当点 P 在 CD 上, 且 $PA = PM$ 时,

$$\text{设 } DP = x, \text{ 则 } CP = CD - DP = 8 - x,$$

$$\text{由勾股定理得 } PA^2 = AD^2 + DP^2, \quad PM^2 = CM^2 + CP^2,$$

$$\therefore x^2 + 8^2 = 2^2 + (8 - x)^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{1}{4},$$

$$\therefore DP = \frac{1}{4}, \quad CP = \frac{31}{4},$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{\triangle APM} &= S_{\text{矩形}ABCD} - S_{\triangle ABM} - S_{\triangle PCM} - S_{\triangle ADP} \\ &= 8 \times 8 - \frac{1}{2} \times 6 \times 8 - \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{31}{4} - \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{25}{4}; \end{aligned}$$

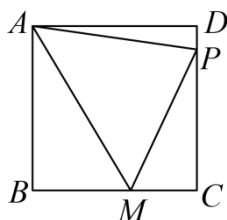


图2-1

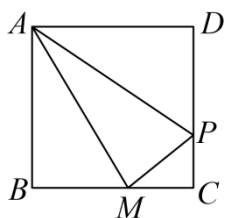
如图 2-2 所示，当 $AP = AM = 10$ 时，

$$\therefore DP = \sqrt{AP^2 - AD^2} = 6,$$

$$\therefore CP = 2,$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{\triangle APM} &= S_{\text{矩形}ABCD} - S_{\triangle ABM} - S_{\triangle PCM} - S_{\triangle ADP} \\ &= 8 \times 8 - \frac{1}{2} \times 6 \times 8 - \frac{1}{2} \times 6 \times 8 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \\ &= 14; \end{aligned}$$

综上所述，当 $\triangle AMP$ 为等腰三角形时， $\triangle AMP$ 的面积为 $\frac{25}{4}$ 或 14



【小问 3 详解】

解：如图所示，当满足 $AM = AP_2 = MP_3 = MP_4 = 10$ ， $AP_1 = MP_1$ 时，

$\triangle AMP_1$ 、 $\triangle AMP_2$ 、 $\triangle AMP_3$ 、 $\triangle AMP_4$ 都是等腰三角形，此时点 P 的个数最多，

$\therefore$ 使得 $\triangle AMP$ 为等腰三角形的点 P 最多有 4 个，

$\therefore$ 必须要保证 P_3 在 AD 上， P_4 在 CD 上，

过点 M 作 $MH \perp AD$ 于 H ，则四边形 $ABMH$ 是矩形，

$$\therefore AH = BM = 6,$$

$$\therefore AP_3 = 2AH = 12,$$

当 P_4 恰好与点 C 重合时，此时 $AD = BC = 16$ ，

$\therefore 12 < x \leq 16$ ；

综上所述，使得 $\triangle AMP$ 为等腰三角形的点 P 最多有 4 个，此时 $12 < x \leq 16$ 。

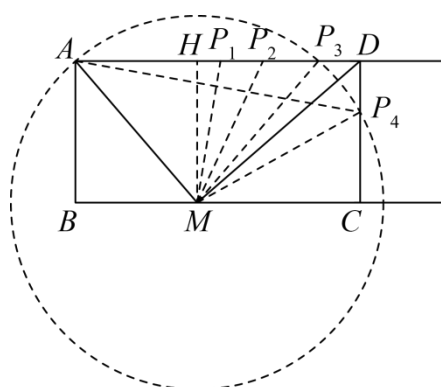


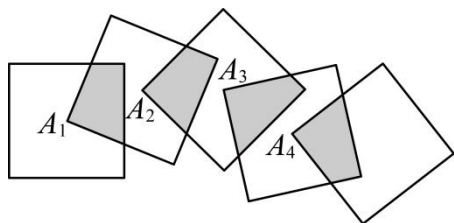
图3

【点睛】本题主要考查了矩形的性质，勾股定理，等腰三角形的定义，

利用分类讨论和数形结合的思想求解是解题的关键。

附加题

26. 如图，将 n 个边长都为 1cm 的正方形按如图所示摆放，点 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 分别是正方形的中心，则 n 个这样的正方形重叠部分的面积和为_____（用 n 的代数式表示）

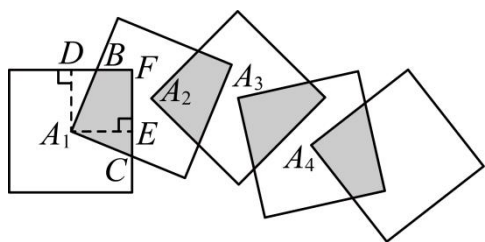


【答案】 $\frac{n-1}{4} \text{cm}^2$

【解析】

【分析】过点 A_1 分别作正方形两边的垂线 A_1D 与 A_1E ，利用“角边角”证明 $\triangle A_1BD$ 和 $\triangle A_1CE$ 全等，求出阴影部分的面积等于正方形面积的 $\frac{1}{4}$ ，同理可求所有阴影部分的面积都是正方形的面积的 $\frac{1}{4}$ ，进而可求出结论。

【详解】解：如图，过点 A_1 分别作正方形两边的垂线 A_1D 与 A_1E ，



$\because$ 点 A_1 是正方形的中心,

$\therefore A_1D = A_1E$, 四边形 A_1EFD 是正方形,

$\therefore \angle BA_1D + \angle BA_1E = 90^\circ$,

又 $\because \angle CA_1E + \angle BA_1E = 90^\circ$,

$\therefore \angle BA_1D = \angle CA_1E$,

在 $\triangle A_1BD$ 和 $\triangle A_1CE$ 中,

$$\begin{cases} \angle BA_1D = \angle CA_1E \\ A_1D = A_1E \\ \angle A_1DB = \angle A_1EC = 90^\circ \end{cases},$$

$\therefore \triangle A_1BD \cong \triangle A_1CE (ASA)$,

$\therefore \triangle A_1BD$ 的面积 $= \triangle A_1CE$ 的面积,

$\therefore$ 阴影部分的面积 $=$ 正方形 A_1EFD 的面积 $= \frac{1}{4} \times 1^2 = \frac{1}{4} (\text{cm}^2)$,

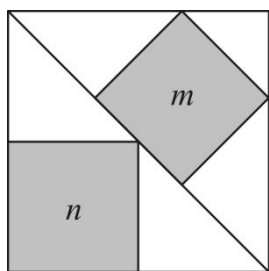
同理可求, 每一个阴影部分的面积都是正方形面积的 $\frac{1}{4}$, 即为 $\frac{1}{4} \text{cm}^2$,

$\therefore$ 重叠部分的面积和 $= \frac{1}{4} \times (n-1) = \frac{n-1}{4} (\text{cm}^2)$.

故答案为: $\frac{n-1}{4} \text{cm}^2$.

【点睛】 本题考查了正方形的性质, 全等三角形的判定与性质, 作辅助线构造出全等三角形是解题的关键.

27. 如图所示, 在一个大正方形中有两个小正方形, 它们的面积分别为 m 、 n , 则 $\frac{n}{m} = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\frac{9}{8}$

【解析】

【分析】 如图: 设 $AB = 2a$, 由正方形的性质和勾股定理可得 $\angle ABD = \angle CBD = 45^\circ$ 、 $\angle BDC = 45^\circ$,

$BD = 2a\sqrt{2}$, 则 $OE = BE = a$ 、 $DG = GK, HI = BI$ 可得 $n = a^2$; 然后再说明 $GI = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$, 进而求得

$m = \frac{8}{9}a^2$ ，最后代入计算即可.

【详解】解：如图：设 $AB = 2a$ ，

$\therefore$ 正方形 $ABCD$ ，

$\therefore AD = BC = BC = CD$ ， $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2}\angle ABC = 45^\circ$ ， $\angle BDC = \frac{1}{2}\angle ADC = 45^\circ$ ， $BD = \sqrt{(2a)^2 + (2a)^2} = 2\sqrt{2}a$ ，

$\therefore OE = BE = a$ ， $DG = GK, HI = BI$

$\therefore n = a^2$ ，

$\therefore$ 正方形 $GEHI$ ，

$\therefore HI = GK$ ，

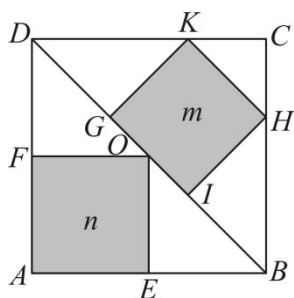
$\therefore DG = GI = BI$ ，

$\therefore BD = DG + GI + BI$ ，

$\therefore GI = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$ ，

$\therefore m = \left(\frac{2\sqrt{2}a}{3}\right)^2 = \frac{8a^2}{9}$ ，

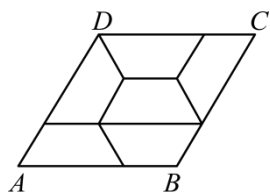
$\therefore \frac{n}{m} = \frac{a^2}{\frac{8}{9}a^2} = \frac{9}{8}$ 。



故答案为 $\frac{9}{8}$ 。

【点睛】本题主要考查了正方形的性质、勾股定理等知识点，确定两小正方形的边长是解答本题的关键.

28. 如图，菱形 $ABCD$ 由 6 个腰长为 2，且全等的等腰梯形镶嵌而成，则菱形的对角线 AC 的长为_____.



【答案】 $6\sqrt{3}$

【解析】

【分析】根据图形可知 $\angle ADC=2\angle A$ ，又两邻角互补，所以可以求出菱形的锐角内角是 60° ；再根据 $AD=AB$ 可以得出梯形的上底边长等于腰长，即可求出梯形的下底边长，所以菱形的边长可得，线段 AC 便不难求出.

【详解】根据图形可知 $\angle ADC=2\angle A$ ，又 $\angle ADC+\angle A=180^\circ$ ，

$$\therefore \angle A=60^\circ,$$

$$\therefore AB=AD,$$

$$\therefore \text{梯形的上底边长}=\text{腰长}=2,$$

$$\therefore \text{梯形的下底边长}=4 \text{ (可以利用过上底顶点作腰的平行线得出),}$$

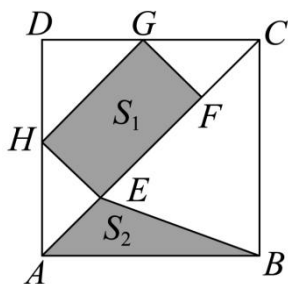
$$\therefore AB=2+4=6,$$

$$\therefore AC=2AB\sin 60^\circ=2\times 6\times \frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}.$$

故答案为 $6\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查的是等腰梯形的性质，仔细观察图形得到角的关系和梯形的上底边长与腰的关系是解本题的关键.

29. 已知：正方形 $ABCD$ 的边长为 $8\sqrt{2}$ 厘米，对角线 AC 上的两个动点 E, F ，点 E 从点 A 、点 F 从点 C 同时出发，沿对角线以 1 厘米/秒的相同速度运动，过 E 作 $EH \perp AC$ 交 $\text{Rt}\triangle ACD$ 的直角边于 H ；过 F 作 $FG \perp AC$ 交 $\text{Rt}\triangle ACD$ 的直角边于 G ，连接 HG, EB . 设 HE, EF, FG, GH 围成的图形面积为 S_1 ， AE, EB, BA 围成的图形面积为 S_2 (这里规定：线段的面积为 0). E 到达 C, F 到达 A 停止. 若 E 的运动时间为 x 秒，在 $0 < x < 8$ 范围内， $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 时， $S_1 = S_2$.



【答案】 6

【解析】

【分析】首先根据动点 E, F 的运动速度与运动时间均相同得出 $AE = CF$ ，再由正方形的性质及已知 $EH \perp AC, FG \perp AC$ 得出 $\triangle CGF$ 与 $\triangle AHE$ 都是等腰直角三角形，然后证明四边形 $EFGH$ 是矩形，勾

股定理求出正方形 $ABCD$ 的对角线长为16. 再连接 BD 交 AC 于 O , 则 $BO=8$. 然后用含 x 的代数式分别表示 S_1 , S_2 , 当 $S_1=S_2$ 时得出关于 x 的方程, 解方程即可求解.

【详解】 $\because E$ 、 F 运动时间相同,

$$\therefore AE = CF,$$

$$\because EH \perp AC, FG \perp AC,$$

$$\therefore EH \parallel FG,$$

$\because ABCD$ 为正方形,

$$\therefore AD = DC, \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GCF = \angle HAE = 45^\circ,$$

又 $EH \perp AC, FG \perp AC$,

$$\therefore \angle CGF = \angle AHE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle GCF = \angle CGF, \angle HAE = \angle AHE$$

$$\therefore AE = EH, CF = FG,$$

$$\therefore EH = FG,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形,

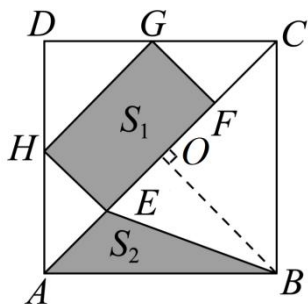
$$\because EH \perp AC,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是矩形.

$\because$ 正方形边长为 $8\sqrt{2}$,

$$\therefore AC = 16.$$

$\because AE = x$, 过 B 作 $BO \perp AC$ 于 O , 则 $BO = 8$.



$$\therefore S_2 = 4x,$$

$$\because HE = x, EF = 16 - 2x,$$

$$\therefore S_1 = x(16 - 2x) .$$

$$\text{当 } S_1 = S_2 \text{ 时, } x(16 - 2x) = 4x .$$

$$\text{解得 } x_1 = 0 \text{ (舍去), } x_2 = 6 .$$

$$\therefore \text{当 } x = 6 \text{ 时, } S_1 = S_2 .$$

故答案为: 6.

【点睛】 本题考查了正方形的性质, 矩形的判定, 一元二次方程的应用, 分别表示出 S_1 , S_2 是解题的关键.