

2022 学年第二学期八年级 5 月自适应练习数学学科

一、选择题 (每小题 3 分, 共 6 题, 共 18 分)

1. 若一次函数 $y = kx + b$ 的 y 随 x 的增大而减小, 且图象与 y 轴的负半轴相交, 则对 k 和 b 的符号判断正确的是 ()

- A. $k > 0, b > 0$ B. $k > 0, b < 0$ C. $k < 0, b > 0$ D. $k < 0, b < 0$

【答案】D

【解析】

【分析】先根据函数的增减性判断出 k 的符号, 再根据图象与 y 轴的负半轴相交判断出 b 的符号.

【详解】 $\because$ 一次函数 $y = kx + b$ 的函数值 y 随 x 的增大而减小,

$\therefore k < 0$;

$\because$ 图象与 y 轴的负半轴相交,

$\therefore b < 0$

故选 D

【点睛】本题考查一次函数图象与系数的关系, 解题的关键是掌握一次函数图象与系数的关系.

2. 方程组 $\begin{cases} x^2 - y = 2 \\ 2x - y = k \end{cases}$ 有实数解, 则 k 的取值范围是 ()

- A. $k \geq 3$ B. $k = 3$ C. $k < 3$ D. $k \leq 3$

【答案】D

【解析】

【分析】使用代入法, 易得 $x^2 - (2x - k) = 2$, 再根据题意可得 $4 - 4(k - 2) \geq 0$, 解即可.

【详解】解: 由 $2x - y = k$ 得, $y = 2x - k$,

将其代入 $x^2 - y = 2$, 得

$$x^2 - (2x - k) = 2,$$

$$\therefore \Delta = 4 - 4(k - 2) \geq 0,$$

解得 $k \leq 3$,

故选 D.

【点睛】本题考查了根的判别式, 解题的关键是掌握 $\Delta \geq 0$ 时, 方程有实数根.

3. 四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O , 给出下列四组条件: ① $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$; ② $AB = CD$, $AD = BC$; ③ $AO = CO$, $BO = DO$; ④ $AB \parallel CD$, $AD = BC$. 其中一定能判断这个四边形是平行四边形的条件共有

()

A. 1 组

B. 2 组

C. 3 组

D. 4 组

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据平行四边形的判定方法逐个判断即可.

【详解】 如图, (1) $\because AB \parallel CD, AD \parallel BC,$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形;

(2) $\because AB=CD, AD=BC,$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形;

(3) $\because$ 在四边形 $ABCD$ 中, $AO=CO, BO=DO,$

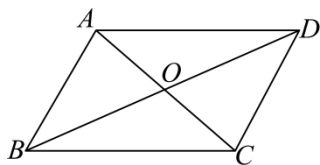
$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形;

(4) $\because$ 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD, AD=BC,$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 可能是等腰梯形, 也可能是平行四边形;

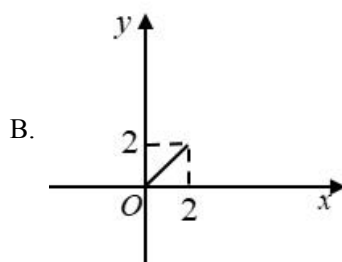
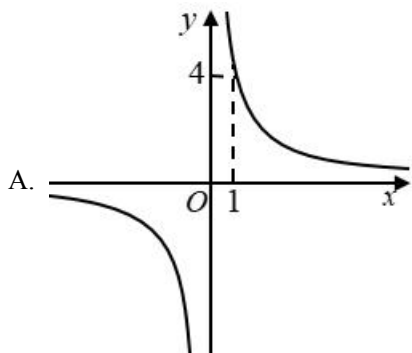
综上所述, 上述四组条件一定能判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形的有 3 组.

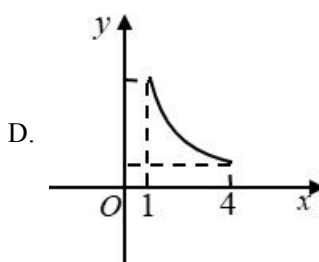
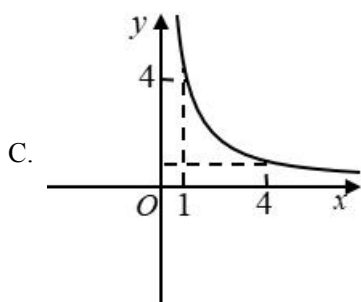
故选: C.



【点睛】 此题考查了平行四边形的判定, 解题的关键是熟练掌握平行四边形的判定方法.

4. 菱形的面积为 2, 其对角线分别为 x 、 y , 则 y 与 x 的图象大致 ().





【答案】C

【解析】

【分析】先根据菱形的面积公式，得出 x 、 y 的函数关系，再根据 x 的取值范围选出答案.

【详解】 $\because$ 菱形的面积 $S = \frac{1}{2}xy$

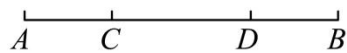
$$\therefore xy = 4, \text{ 即 } y = \frac{4}{x}$$

其中, $x > 0$

故选: C

【点睛】本题考查菱形面积公式的应用, 注意在求解出 x 、 y 的关系后, 还需要判断 x 的取值范围.

5. 如图, 点 C 、 D 在线段 AB 上, $AC = BD$, 那么下列结论中, 正确的是 ()



A. $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 是相等向量

B. $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 是平行向量

C. $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 是相反向量

D. $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 是相等向量

【答案】B

【解析】

【分析】由 $AC=BD$, 可得 $AD=BD$, 即可得 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 是平行向量, $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BD}$, 继而证得结论.

【详解】A、 $\because AC=BD$,

$\therefore \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BD}$, 该选项错误;

B、 $\because$ 点 C 、 D 是线段 AB 上的两个点,

$\therefore \overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 是平行向量, 该选项正确;

C、 $\because AC=BC$,

$\therefore AD \neq BD$,

$\therefore \overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 不是相反向量, 该选项错误;

D、 $\because AC=BD$,

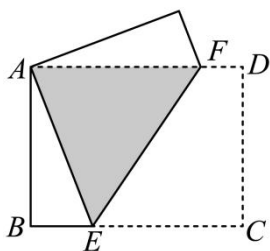
$\therefore AD=BC$,

$\therefore \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{BC}$, 该选项错误;

故选: B.

【点睛】 本题考查了平面向量的知识. 注意掌握相等向量与相反向量的定义是解此题的关键.

6. 如图, 在矩形纸片 $ABCD$ 中, $AB = 6 \text{ cm}$, $BC = 8 \text{ cm}$, 现将纸片折叠压平, 使 A 与 C 重合, 如果设折痕为 EF , 那么重叠部分 $\triangle AEF$ 的面积等于 ()



A. $\frac{75}{16}$

B. $\frac{75}{4}$

C. $\frac{25}{16}$

D. $\frac{25}{4}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 要求重叠部分 $\triangle AEF$ 的面积, 选择 AF 作为底, 高就等于 AB 的长; 而由折叠可知 $\angle AEF = \angle CEF$, 由平行得 $\angle CEF = \angle AFE$, 代换后, 可知 $AE = AF$, 问题转化为在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中求 AE .

【详解】 解: 设 $AE = x$, 由折叠可知, $EC = x$, $BE = 8 - x$,

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, $AB^2 + BE^2 = AE^2$, 即 $6^2 + (8 - x)^2 = x^2$,

解得: $x = \frac{25}{4}$;

由折叠可知 $\angle AEF = \angle CEF$, 由 $AD \parallel BC$ 得 $\angle CEF = \angle AFE$,

$\therefore \angle AEF = \angle AFE$, 即 $AE = AF = \frac{25}{4}$;

$\therefore S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} \times AF \times AB = \frac{1}{2} \times \frac{25}{4} \times 6 = \frac{75}{4}$.

故选 B.

【点睛】 本题考查图形的翻折变换, 解题过程中应注意折叠是一种对称变换, 它属于轴对称, 根据轴对称的性质, 折叠前后图形的形状和大小不变, 如本题中折叠前后角相等.

二、填空题 (每空 2 分, 共 12 题, 共 24 分)

7. 已知直线 $y = (k + 2)x + \frac{1 - k}{2}$ 的截距为 1, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -1

【解析】

【分析】 根据截距的概念得到 $\frac{1-k}{2}=1$ ，解之即可.

【详解】 解： $\because y=(k+2)x+\frac{1-k}{2}$ 的截距为 1，

$$\therefore \frac{1-k}{2}=1,$$

解得 $k=-1$ ，

故答案为： -1.

【点睛】 本题主要考查截距的概念，掌握一次函数 $y=kx+b$ 中的 b 为截距是解题的关键.

8. 已知点 $A(a,2)$ ， $B(b,4)$ 在直线 $y=-3x+5$ 上，则 a 、 b 的大小关系是 a _____ b (在横线上填写 “>” 或 “=” 或 “<”).

【答案】 >

【解析】

【分析】 根据 $k=-3<0$ ， y 随 x 的增大而减小，得出 a 与 b 的大小关系.

【详解】 解： $\because k=-3<0$ ，

$\therefore y$ 随 x 的增大而减小，

$$\because 2<4,$$

$$\therefore a>b.$$

故答案为： >.

【点睛】 本题考查一次函数的图象性质：当 $k>0$ ， y 随 x 增大而增大；当 $k<0$ 时， y 将随 x 的增大而减小.

9. 若将直线 $y=2x-1$ 向上平移 3 个单位，则所得直线的表达式为_____.

【答案】 $y=2x+2$

【解析】

【详解】 根据平移的性质，向上平移几个单位 b 的值就加几，由题意得：向上平移 3 个单位后的解析式为：

$$y=2x-1+3=2x+2$$

10. 一个正多边形的内角和是外角和的 3 倍，则这个正多边形的一个内角的度数是_____度.

【答案】 135

【解析】

【分析】 先由多边形的内角和和外角和的关系判断出多边形的边数，即可得到结论.

【详解】 设多边形的边数为 n .

因为正多边形内角和为 $(n-2) \cdot 180^\circ$ ，正多边形外角和为 360° ，

根据题意得： $(n-2) \cdot 180^\circ = 360^\circ \times 3$ ，

解得： $n = 8$ 。

$\therefore$ 这个正多边形的每个外角 $= \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ ，

则这个正多边形的每个内角是 $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ ，

故答案为： 135。

【点睛】 本题考查了正多边形的内角与外角，正多边形的性质；熟练掌握正多边形的性质，求出正多边形的边数是解决问题的关键。

11. 在平行四边形 $ABCD$ 中， $\angle A = x^\circ$ ， $\angle C = (120 - 3x)^\circ$ ， 那么 $\angle D =$ _____ 度。

【答案】 150

【解析】

【分析】 根据平行四边形的性质可知： $AD \parallel BC$ ， $\angle A = \angle C$ ， 得到 $\angle A + \angle B = 180^\circ$ ， 根据已知条件得出方程， 求出 x 值， 即可得到 $\angle D$ 。

【详解】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$ ， $\angle A = \angle C$ ，

$\therefore \angle A + \angle D = 180^\circ$ ，

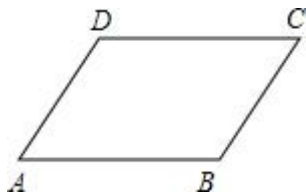
$\because \angle A = x^\circ$ ， $\angle C = (120 - 3x)^\circ$ ，

$\therefore x^\circ = 120^\circ - 3x^\circ$ ，

解得： $x = 30^\circ$ ，

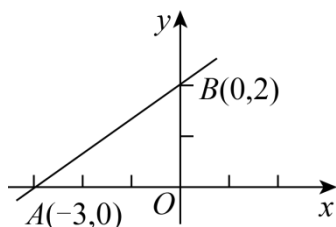
$\therefore \angle D = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ ，

故答案为： 150。



【点睛】 本题考查平行四边形的性质，解题关键是熟练掌握平行四边形的性质，学会用方程思想思考问题，属于中考常考题型。

12. 如下图，一次函数 $y = kx + b$ 的图像经过 A， B 两点， 则 $kx + b < 0$ 的解集是_____。



【答案】 $x < -3$

【解析】

【分析】由图象可知： $A(-3, 0)$ ，且当 $x < -3$ 时，一次函数 $y = kx + b$ 的图象在 x 轴的下方， $y < 0$ ，即可得到关于 x 的不等式 $kx + b < 0$ 的解集是 $x < -3$ 。

【详解】解：由图象可得：一次函数 $y = kx + b$ 中， $y < 0$ 时，图象在 x 轴下方， $x < -3$ ，
则关于 x 的不等式 $kx + b < 0$ 的解集是 $x < -3$ ，
故答案为： $x < -3$ 。

【点睛】此题主要考查了一次函数与一元一次不等式，关键是掌握数形结合思想。认真体会一次函数与一元一次不等式之间的内在联系。

13. 用换元法解方程 $4x^2 - 10x + \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = 11$ 时，可设 $\sqrt{2x^2 - 5x + 2} = t$ ，则原方程可化为关于 t 的整式方程为_____。

【答案】 $2t^2 + t - 15 = 0$

【解析】

【分析】设 $\sqrt{2x^2 - 5x + 2} = t$ ，两边平方可得 $2x^2 - 5x = t^2 - 2$ ，将原方程变形，整体代入可得 $2t^2 + t - 15 = 0$ 。

【详解】解：设 $\sqrt{2x^2 - 5x + 2} = t$ ，

$$\therefore 2x^2 - 5x + 2 = t^2, \quad t \geq 0,$$

$$\therefore 2x^2 - 5x = t^2 - 2,$$

则原方程为： $2(t^2 - 2) + t = 11$ ，整理得： $2t^2 + t - 15 = 0$ ，

故答案为： $2t^2 + t - 15 = 0$ 。

【点睛】本题考查了无理方程，换元法，解题的关键是根据换元法求出 $2x^2 - 5x = t^2 - 2$ ，整体代入。

14. 如果方程 $\frac{2x}{x+1} - \frac{x+1}{x} = \frac{m}{x^2+x}$ 有增根，则 m 的值为_____。

【答案】 -1或2.

【解析】

【分析】 方程有增根，则 $x^2+x=0$ ，解得 $x=0$ 或 $x=-1$ ，方程整理得 $\frac{x^2-2x-1}{x^2+x}=\frac{m}{x^2+x}$ ，代入即可求出 m 的值.

【详解】 解： $\because$ 方程 $\frac{2x}{x+1}-\frac{x+1}{x}=\frac{m}{x^2+x}$ 有增根，

$\therefore x^2+x=0$ ，解得： $x=0$ 或 $x=-1$ ，

$$\therefore \frac{2x}{x+1}-\frac{x+1}{x}=\frac{m}{x^2+x},$$

$$\text{整理得： } \frac{x^2-2x-1}{x^2+x}=\frac{m}{x^2+x},$$

$$\therefore m=x^2-2x-1,$$

把 $x=0$ 或 $x=-1$ ，代入，

解得： $m=-1$ 或 $m=2$ ；

故答案为 -1 或 2.

【点睛】 本题考查了分式方程的增根，有增根说明最简公分母为 0，则可得出 x 的值，代入即可求得 m 的值.

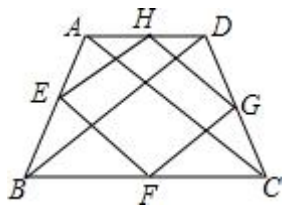
15. 联结等腰梯形各边中点组成的四边形是 ____.

【答案】 菱形

【解析】

【分析】 根据等腰梯形的对角线相等和三角形中位线定理，所得四边形的各边都相等，所以判定为菱形.

【详解】 解： 如图所示，



根据三角形中位线定理， $EF=GH=\frac{1}{2}BD$ ， $FG=EH=\frac{1}{2}AC$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，

$$\therefore AC=BD,$$

$$\therefore EF=GH=FG=EH,$$

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 为菱形.

故答案是：菱形.

【点睛】 本题考查中点四边形，解题的关键是记住：一般四边形的中点四边形是平行四边形，对角线相等的四边形的中点四边形是菱形，对角线垂直的四边形的中点四边形是矩形，对角线相等且垂直的四边形的中点四边形是正方形.

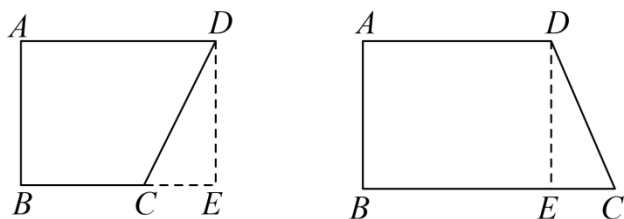
16. 在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle B = 90^\circ$ ， $AB = 4 \text{ cm}$ ， $CD = 5 \text{ cm}$ ， $AD = 5 \text{ cm}$ ， 则 BC 的长为 _____ cm .

【答案】 2 或 8

【解析】

【分析】 根据直角梯形的性质解答即可.

【详解】 解： 在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle B = 90^\circ$ ， $AB = 4 \text{ cm}$ ， $CD = 5 \text{ cm}$ ， $AD = 5 \text{ cm}$ ，



过 D 作 $DE \perp BC$ 于 E ，

$$\therefore DE = AB = 4 \text{ cm},$$

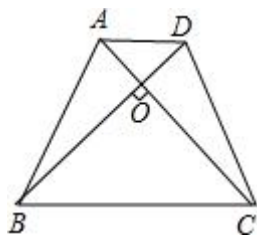
$$\therefore CE = \sqrt{CD^2 - DE^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ cm},$$

$$\therefore BC = 5 - 3 = 2 \text{ cm} \text{ 或 } BC = 5 + 3 = 8 \text{ cm},$$

故答案为： 2 或 8.

【点睛】 此题考查直角梯形的性质， 关键是根据直角梯形的性质和勾股定理解答.

17. 已知： 在等腰梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB = DC$ ， 对角线 $AC \perp BD$ ， 梯形高为 10 厘米， 那么它的中位线长为 _____ 厘米.



【答案】 10

【解析】

【分析】 过点 E 作 $DE \parallel AC$ 交 BC 的延长线于点 E ， 作 $DF \perp BC$ 于 F ， 由平行四边形与等腰梯形的性质得出 $BD = ED$ ， 就可以得出 $\triangle BDE$ 是等腰直角三角形， 根据梯形的高就可以求出三角形的高， 就可以求出底边，

从而求出中位线的长.

【详解】解：过点 E 作 $DE \parallel AC$ 交 BC 的延长线于点 E ，作 $DF \perp BC$ 于 F ，

$$\therefore \angle BOC = \angle BDE, \quad \angle DFB = 90^\circ.$$

$$\therefore AD \parallel BC, \quad DE \parallel AC,$$

$\therefore$ 四边形 $ACED$ 是平行四边形，

$$\therefore AC = DE.$$

$\therefore$ 梯形 $ABCD$ 是等腰梯形， $AD \parallel BC$ ，

$$\therefore AC = BD.$$

$$\therefore BD = DE.$$

$$\therefore AC \perp BD,$$

$$\therefore \angle BOC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDE = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle BDE$ 是等腰直角三角形.

$$\therefore DF \perp BC,$$

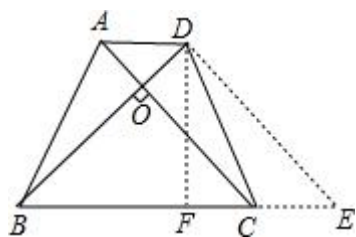
$$\therefore BE = 2DF.$$

$$\therefore DF = 10\text{cm},$$

$$\therefore BE = 20\text{cm},$$

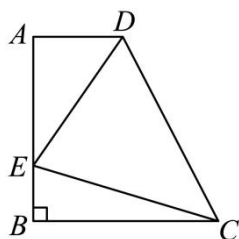
$$\therefore \text{梯形的中位线的长等于 } \frac{1}{2} BE = 10\text{cm}.$$

故答案为：10



【点睛】本题考查了等腰梯形的性质的运用，平行四边形的判定与性质的运用，等腰三角形的性质的运用，三角形的中位线的性质和梯形的中位线的性质的运用，解答时根据等腰梯形的性质求解是关建.

18. 在直角梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ($BC > AD$)， $\angle B = 90^\circ$ ， $AB = BC$ ， E 是 AB 上一点，且 $\angle DCE = 45^\circ$ ， $BE = 2$ ， $DE = 5$ ，那么直角梯形 $ABCD$ 的面积是_____.

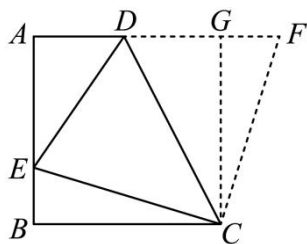


【答案】 27

【解析】

【分析】过 C 作 $CG \perp AD$ ，交 AD 延长线于 G ，延长 AD 至 F ，使 $GF = BE$ ，连接 CF ，证得四边形 $ABCG$ 为正方形，证明 $\triangle BCE \cong \triangle GCF$ (SAS)，得到 $CE = CF$ ， $\angle BCE = \angle GCF$ ， $BE = GF$ ，从而证明 $\triangle DCE \cong \triangle DCF$ (SAS)，则有 $DE = DF$ ，进一步推出 $DE = BE + DG$ ，即可求得 DG 的长，设 $AB = x$ ，在 $\text{Rt}\triangle AED$ 中，由勾股定理 $DE^2 = AD^2 + AE^2$ ，可得方程，解方程即可求得 AB 的长，继而求得直角梯形 $ABCD$ 的面积.

【详解】解：过 C 作 $CG \perp AD$ ，交 AD 延长线于 G ，延长 AD 至 F ，使 $GF = BE$ ，连接 CF .



在直角梯形 $ABCD$ 中， $\because AD \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle A = \angle B = 90^\circ,$$

又 $\because \angle CGA = 90^\circ$ ， $AB = BC$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCG$ 为正方形.

$$\therefore BC = CG, \angle B = \angle CGF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle BCE \cong \triangle GCF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore CE = CF, \angle BCE = \angle GCF, BE = GF,$$

$$\because \angle DCE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BCE + \angle DCG = 45^\circ, \text{ 即 } \angle GCF + \angle DCG = 45^\circ, \text{ 即 } \angle DCF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE = \angle DCF,$$

$$\text{又 } CE = CF, CD = CD,$$

$$\therefore \triangle DCE \cong \triangle DCF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore DE = DF,$$

$$\therefore DF = DG + FG = BE + DG,$$

$$\therefore DE = BE + DG,$$

$$\therefore 5 = 2 + DG,$$

$$\text{即 } DG = 3,$$

$$\text{设 } AB = x, \text{ 则 } AE = x - 2, \quad AD = x - 3,$$

在 $\text{Rt}\triangle AED$ 中,

$$\therefore DE^2 = AD^2 + AE^2, \text{ 即 } 5^2 = (x - 3)^2 + (x - 2)^2,$$

解得: $x = 6$ 或 $x = -1$ (舍去),

$$\therefore AB = 6,$$

$$\therefore S_{\text{梯形}ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot AB = \frac{1}{2} \times (3 + 6) \times 6 = 27.$$

故答案为: 27.

【点睛】此题考查了正方形的性质与判定、全等三角形的判定与性质、直角梯形的性质以及勾股定理等知识, 注意掌握辅助线的作法是解此题的关键.

三、简答题 (每小题 6 分, 共 4 题, 共 24 分)

19. 解关于 x 的方程: $ax - 2a^2 = x - 2$.

【答案】 $x = 2a + 2$

【解析】

【分析】移项, 系数化为 1, 再将结果约分即可.

【详解】解: $ax - 2a^2 = x - 2,$

$$\therefore (a - 1)x = 2a^2 - 2,$$

$$\therefore x = \frac{2a^2 - 2}{a - 1},$$

$$\therefore x = 2a + 2.$$

【点睛】本题考查了解一元一次方程, 分式的约分, 解题的关键是掌握约分的法则.

20. 解方程: $\sqrt{3x^2 + 1} - 1 = -3x$.

【答案】 $x = 0$

【解析】

【分析】两边开平方化为整式方程, 解之, 检验可得解.

【详解】解： $\sqrt{3x^2+1}-1=-3x$ ，

$$\therefore \sqrt{3x^2+1}=1-3x,$$

$$\therefore 3x^2+1=(1-3x)^2,$$

$$\therefore \text{解得： } x=0 \text{ 或 } x=1,$$

经检验： $x=1$ 是方程的增根，

$\therefore$ 原方程的解为 $x=0$ 。

【点睛】 本题考查了无理方程，解一元二次方程，解题的关键是注意求解过程中产生的增根。

21. 解方程组：
$$\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 \textcircled{1} \\ x^2-6xy+9y^2=25 \textcircled{2} \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x=-\frac{5}{2} \\ y=-\frac{5}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=\frac{5}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

【解析】

【分析】 将方程 ② 左边因式分解可得 $x-3y=5$ 或 $x-3y=-5$ ，再分别代入方程 ① 求解即可。

【详解】 解：
$$\begin{cases} x^2+xy-2y^2=0 \textcircled{1} \\ x^2-6xy+9y^2=25 \textcircled{2} \end{cases}$$
，由 ② 得： $x-3y=5$ 或 $x-3y=-5$ ，

$$\therefore x=3y+5 \text{ 或 } x=3y-5,$$

当 $x=3y+5$ 时，代入 ① 中，

$$\text{得 } (3y+5)^2+(3y+5)y-2y^2=0,$$

$$\text{解得： } y=-\frac{5}{2} \text{ 或 } y=-1;$$

$$\text{此时对应 } x \text{ 值为 } x=-\frac{5}{2} \text{ 或 } x=2;$$

当 $x=3y-5$ 时，代入 ① 中，

$$\text{得 } (3y-5)^2+(3y-5)y-2y^2=0,$$

$$\text{解得： } y=\frac{5}{2} \text{ 或 } y=1;$$

$$\text{此时对应 } x \text{ 值为 } x=\frac{5}{2} \text{ 或 } x=-2;$$

$$\therefore \text{方程组的解为: } \begin{cases} x = -\frac{5}{2} \\ y = -\frac{5}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}.$$

【点睛】本题主要考查解高次方程的能力，高次方程的解法思想：通过适当的方法，把高次方程化为次数较低的方程求解。所以解高次方程一般要降次，即把它转化成二次方程或一次方程。也有的通过因式分解来解。

22. 某校组织青年团员捐款 3600 元准备帮助结对的云南偏远地区贫困学生，这笔钱大家平均承担。实际捐款时，又多了 3 名团员参加，因为总费用不变，于是每人少捐 60 元。问实际共有多少人参加捐款？原计划每人捐款多少元？

【答案】共有 15 人参加捐款，原计划每人捐款 300 元

【解析】

【分析】设实际共有 x 人参加捐款，那么原来有 $(x-3)$ 人参加捐款，根据：原来捐款的平均数 - 实际捐款平均数 = 60，列分式方程求解。

【详解】解：设实际共有 x 人参加捐款，

那么原来有 $(x-3)$ 人参加捐款，实际每人捐款 $\frac{3600}{x}$ (元)，原计划每人捐款 $\frac{3600}{x-3}$ (元)，

依据题意，得 $\frac{3600}{x-3} - \frac{3600}{x} = 60$ ，

解得 $x_1 = 15$ ， $x_2 = -12$ ，

经检验， $x_1 = 15$ ， $x_2 = -12$ 都是原方程的根，

但人数不能为负数，所以取 $x = 15$ ，

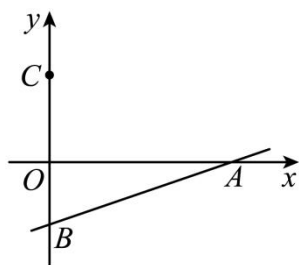
当 $x = 15$ 时， $\frac{3600}{x-3} = \frac{3600}{15-3} = 300$ (元)，

答：共有 15 人参加捐款，原计划每人捐款 300 元。

【点睛】本题考查了分式方程的应用。利用分式方程解应用题时，一般题目中会有两个相等关系，这时要根据题目所要解决的问题，选择其中的一个相等关系作为列方程的依据，而另一个则用来设未知数。

四、简答题 (第 23 题 6 分，第 24 题 8 分，第 25 题 10 分，第 26 题 10 分，共 34 分)

23. 如图，一次函数 $y = \frac{1}{3}x + b$ 的图像与 x 轴相交于点 $A(6, 0)$ 、与 y 轴相交于点 B ，点 C 在 y 轴的正半轴上， $BC = 5$ 。



- (1) 求一次函数的解析式点 C 的坐标;
 (2) 如果 $AD \parallel BC$ 且 $AB = CD$, 求点 D 的坐标.

【答案】 (1) $(0,3)$

(2) $(6,1)$ 或 $(6,5)$

【解析】

【分析】 (1) 把 A 的坐标代入 $y = \frac{1}{3}x + b$ 即可求得 b 的值, 求得函数的解析式, 然后即可求得 A , B 的坐标, 从而得到 OB 的长, 进而求得 OC 的长, 则 C 点的坐标即可求得;

(2) 分两种情况, 画出图形, 结合等腰梯形的性质, 坐标与图形的关系可得结果.

【小问 1 详解】

解: 把 $A(6,0)$ 代入 $y = \frac{1}{3}x + b$ 得: $2 + b = 0$,

解得: $b = -2$,

则一次函数的解析式是: $y = \frac{1}{3}x - 2$.

在 $y = \frac{1}{3}x - 2$ 中, 令 $x = 0$, 则 $y = -2$. 则 B 的坐标是: $(0, -2)$;

$\therefore BC = 5$,

$\therefore OC = BC - OB = 5 - 2 = 3$,

$\therefore C$ 的坐标是: $(0, 3)$;

【小问 2 详解】

$\therefore AD \parallel BC$ 且 $AB = CD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形,

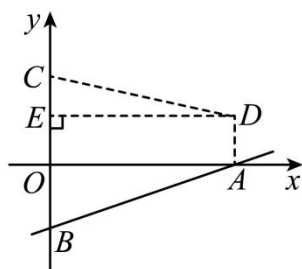
①如图, 作 $DE \perp BC$ 于点 E .

此时四边形 $ABCD$ 是等腰梯形,

$\therefore CE = OB = 2$,

$\therefore AD = OE = 5 - CE - OB = 1$.

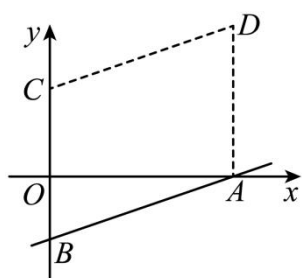
则 D 的坐标是: $(6,1)$.



②如图, $\because A(6,0), B(0,-2), C(0,3)$,

$$\therefore BC = 3 - (-2) = 5 = AD,$$

$$\therefore D(6,5).$$

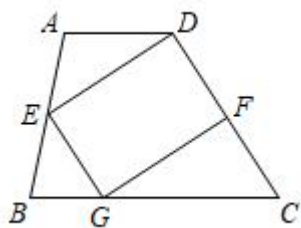


综上所述, 满足条件的点 D 的坐标为 $(6,1)$ 或 $(6,5)$.

【点睛】本题是一次函数与几何图形综合, 正确作出辅助线, 是解题关键.

24. 如图, 已知梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, E 、 F 分别是 AB 、 CD 的中点, 点 G 在边 BC 上, 且

$$CG = \frac{1}{2}(4D + BC).$$



(1) 求证: 四边形 $DEGF$ 是平行四边形;

(2) 连接 DG , 若 $\angle ADG = 2\angle ADE$, 求证: 四边形 $DEGF$ 是矩形.

【答案】(1) 答案见解析 (2) 答案见解析

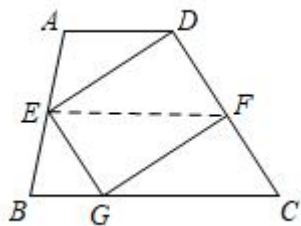
【解析】

【分析】(1) 连接 EF , 利用梯形中位线定理证得四边形 $EGCF$ 是平行四边形; 然后根据已知条件推知四边形 $DEGF$ 的对边 $EG = DF$ 且 $EG \parallel DF$, 易证四边形 $DEGF$ 是平行四边形;

(2) 连接 EF , DG 相交于点 O , 先证四边形 $DEGF$ 是平行四边形, 再证 $EF = DG$, 即可得答案.

【小问 1 详解】

解：如下图，连接 EF ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是梯形， $AD \parallel BC$ ， E 、 F 分别为 AB 、 CD 的中点，

$$\therefore EF = \frac{1}{2}(AD + BC), EF \parallel AD \parallel BC,$$

$$\therefore CG = \frac{1}{2}(AD + BC),$$

$$\therefore EF = CG,$$

$$\therefore EF \parallel GC,$$

$\therefore$ 四边形 $EGCF$ 是平行四边形，

$$\therefore EG \parallel FC, EG = FC,$$

$\therefore F$ 是 CD 的中点，

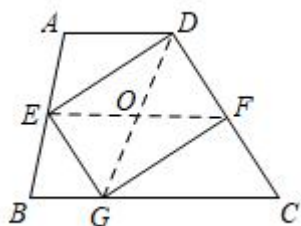
$$\therefore FC = DF,$$

$$\therefore EG \parallel DF, EG = DF,$$

$\therefore$ 四边形 $DEGF$ 是平行四边形；

【小问 2 详解】

如下图，连接 EF ， DG 相交于点 O ，



$$\therefore \angle ADG = 2\angle ADE,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle EDG,$$

$$\therefore EF \parallel AD,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle DEO,$$

$$\therefore \angle EDG = \angle DEO,$$

$$\therefore EO = DO,$$

∵ 四边形 $DEGF$ 是平行四边形,

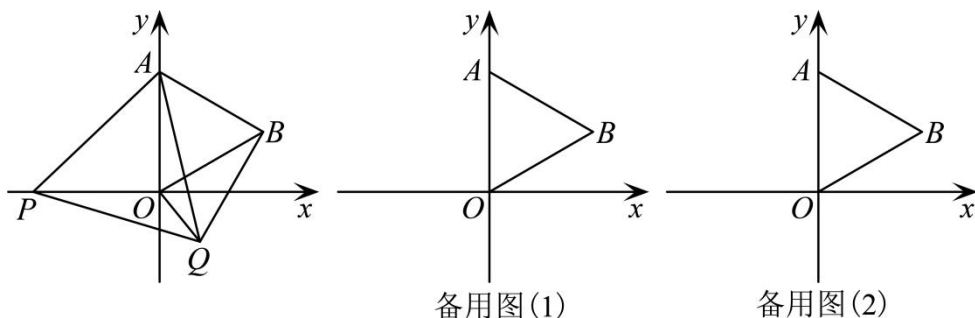
$$\therefore EO = \frac{1}{2} EF, DO = \frac{1}{2} DG,$$

$$\therefore EF = DG,$$

∴ 四边形 $DEGF$ 是矩形.

【点睛】 本题考查了矩形的判定, 平行四边形的判定与性质以及梯形的中位线定理, 解题的关键是在证四边形 $DEGF$ 是矩形时, 必须先说明四边形 $DEGF$ 是平行四边形.

25. 如图, 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(0, 4)$, 点 P 是 x 轴上一动点, 以线段 AP 为一边, 在其一侧作等边 $\triangle APQ$. 当点 P 运动到原点 O 处时, 记 Q 的位置为 B .



(1) 求点 B 的坐标;

(2) 当点 P 在 x 轴上运动 (P 不与 O 重合) 时, 求证: $\angle ABQ = 90^\circ$;

(3) 是否存在点 P , 使得以 A 、 O 、 Q 、 B 为顶点的四边形是梯形? 若存在, 请直接写出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $B(2\sqrt{3}, 2)$

(2) 见解析 (3) 存在, $(-2\sqrt{3}, 0)$ 或 $(4\sqrt{3}, 0)$

【解析】

【分析】 (1) 根据题意作辅助线过点 B 作 $BC \perp y$ 轴于点 C , 根据等边三角形的性质和勾股定理即可求出点 B 的坐标,

(2) 根据 $\angle PAQ = \angle OAB = 60^\circ$, 可知 $\angle PAO = \angle QAB$, 得出 $\triangle APO \cong \triangle AQB$ 总成立, 得出当点 P 在 x 轴上运动 (P 不与 Q 重合) 时, $\angle ABQ$ 为 90° ;

(3) 根据点 P 在 x 的正半轴还是负半轴两种情况讨论, 再根据全等三角形的性质即可得出结果.

【小问 1 详解】

解: 过点 B 作 $BC \perp y$ 轴于点 C ,

此时，若 $AB \parallel OQ$ ，四边形 $AOQB$ 即是梯形，

当 $AB \parallel OQ$ 时， $\angle BQO = 90^\circ$ ， $\angle BOQ = \angle ABO = 60^\circ$ 。

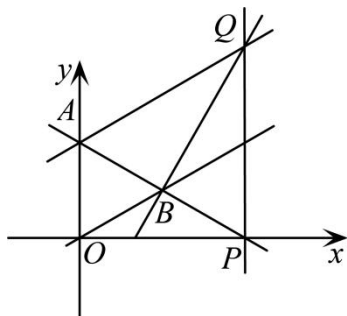
又 $OB = OA = 4$ ，可求得 $BQ = \frac{OB}{2} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ ，

由 (2) 可知， $\triangle APO \cong \triangle AQB$ ，

$\therefore OP = BQ = 2\sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 此时 P 的坐标为 $(-2\sqrt{3}, 0)$ 。

②当点 P 在 x 轴正半轴上时，点 Q 在 B 的上方，



此时，若 $AQ \parallel OB$ ，四边形 $AOBQ$ 即是梯形，

当 $AQ \parallel OB$ 时， $\angle ABQ = 90^\circ$ ， $\angle QAB = \angle ABO = 60^\circ$ 。

又 $AB = 4$ ，可求得 $BQ = \sqrt{3}AB = 4\sqrt{3}$ ，

由 (2) 可知， $\triangle APO \cong \triangle AQB$ ，

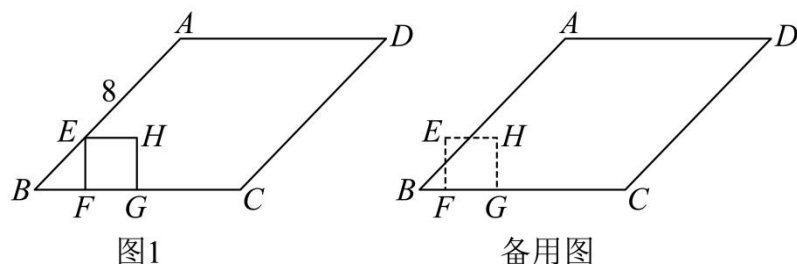
$\therefore OP = BQ = 4\sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 此时 P 的坐标为 $(4\sqrt{3}, 0)$ 。

综上， P 的坐标为 $(-2\sqrt{3}, 0)$ 或 $(4\sqrt{3}, 0)$ 。

【点睛】 本题主要考查了等边三角形的性质、勾股定理以及全等三角形的判定及性质，难度适中。

26. 在菱形 $ABCD$ 中， $\angle B = 45^\circ$ ， $AB = 8$ ，左右作平行移动的正方形 $EFGH$ 的两个顶点 F 、 G 始终在边 BC 上。当点 G 到边 BC 中点时，点 E 恰好在边 AB 上。



(1) 如图 1, 求正方形 $EFGH$ 的边长;

(2) 假设点 B 与点 F 的距离为 x , 在正方形 $EFGH$ 作平行移动的过程中, 正方形 $EFGH$ 与菱形 $ABCD$ 重叠部分的面积为 y , 求 y 与 x 的函数解析式, 并写出它的定义域;

(3) 连接 FH 、 HC , 当 $\triangle FHC$ 是等腰三角形时, 请直接写出 BF 的长.

【答案】 (1) 2 (2) $y = \begin{cases} \frac{4+4x-x^2}{2} & (0 < x \leq 2) \\ 4 & (2 < x \leq 6) \end{cases}$

(3) 4 或 6 或 $8-2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 (1) 根据正方形的性质和等腰直角三角形的判定与性质求解即可;

(2) 分 $0 < x \leq 2$ 和 $2 < x \leq 6$ 两种情况, 利用正方形和三角形的面积公式求解即可;

(3) 分 $FH = HC$ 、 $FC = HC$ 、 $FH = FC$ 三种情况, 利用等腰三角形的性质和勾股定理求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore BC = AB = 8,$$

当点 G 到边 BC 中点时, $BG = \frac{1}{2}BC = 4$,

$\because \angle B = 45^\circ$, 正方形 $EFGH$ 的两个顶点 F 、 G 始终在边 BC 上.

$$\therefore BF = EF = FG,$$

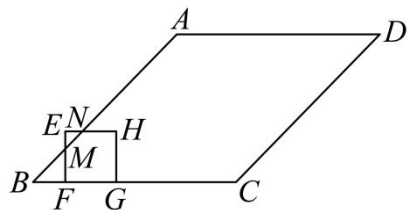
$$\because BG = 4,$$

$$\therefore FG = 2$$

即正方形 $EFGH$ 的边长为 2;

【小问 2 详解】

解: 当 $0 < x \leq 2$ 时, 如图, 由 $\angle B = 45^\circ$ 和正方形 $EFGH$ 知, $\text{Rt}\triangle BFM$ 、 $\text{Rt}\triangle EMN$ 为等腰直角三角形, 则 $BF = MF = x$, $EM = EN = 2 - x$,



$$\therefore y = S_{\text{五边形}FGHNM} = S_{\text{正方形}EFGH} - S_{\triangle EMN}$$

$$= 2 \times 2 - \frac{(2-x)^2}{2}$$

$$= \frac{4 + 4x - x^2}{2};$$

综上所述, $y = \begin{cases} \frac{4+4x-x^2}{2} (0 < x \leq 2) \\ 4 (2 < x \leq 6) \end{cases}$

解: 如图 3-1 所示, 当 $FH = HC$ 时,

$$\therefore \angle HFC = \angle HCF,$$

∴ 四边形 $EFGH$,

$$\therefore \angle HFC = \angle HCF = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle FHC$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore HG \perp CF,$$

$$\therefore FG = CG = HG = 2,$$

$$\therefore BF = BC - GG = 8 - 2 - 2 = 4;$$

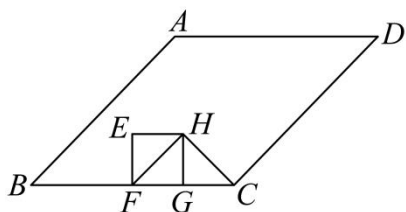


图3-1

$$\therefore FC = 2,$$

$$\therefore BF = BC - CF = 8 - 2 = 6;$$

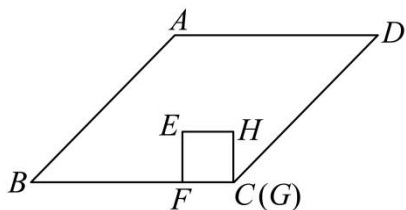


图3-2

如图 3-3 所示, 当 $FH = FC$ 时, 则 $FC = FH = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, 此时 $BF = BC - FC = 8 - 2\sqrt{2}$,

综上所述，当 $\triangle FHC$ 是等腰三角形时， BF 的长为 4 或 6 或 $8-2\sqrt{2}$.

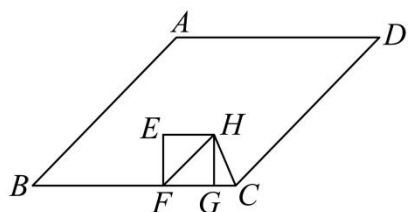


图3-3

【点睛】 本题主要考查菱形与正方形的性质的综合运用、函数解析式、

等腰直角三角形的判定与性质，勾股定理，解题时注意对等腰三角形要进行分类讨论.