

初一年级（下）期末

数学样卷

2026 年 6 月

(满分：100 分 完成时间：90 分钟)

考生注意：

1. 本试卷含三个大题，共 25 题。答题时，考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答，在草稿纸、本试卷上答题一律无效。
2. 除第一、二大题外，其余各题如无特别说明，都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤。

一、选择题（本大题共 6 题，每小题 3 分，满分 18 分）

1. 已知 $x > y$ ，如果 $ax < ay$ ，那么（ ）

- A. $a > 0$ B. $a = 0$ C. $a < 0$ D. a 为任意值

【答案】C

【解析】

【分析】根据变形后不等号的方向变化，即可判断 a 的取值范围。

【详解】解：∵ $x > y$ ，变形后得到 $ax < ay$ ，不等号方向发生改变，
∴ $a < 0$ 。

2. 下列各组长度的线段中，不能组成三角形的是（ ）

- A. 2、4、5 B. 3、3、6 C. 5、5、5 D. 3、4、5

【答案】B

【解析】

【分析】根据“三角形任意两边之和大于第三边”，只需验证每组中较小两边的和是否大于最大边，即可判断能否组成三角形。

【详解】解：A、 $2+4>5$ ，故能组成三角形；
B、 $3+3=6$ ，不满足两边之和大于第三边，故不能组成三角形；
C、 $5+5>5$ ，故能组成三角形；
D、 $3+4>5$ ，故能组成三角形。

3. 如果一个三角形中最长的边所对的角是锐角，那么这个三角形是（ ）

- A. 锐角三角形 B. 直角三角形 C. 钝角三角形 D. 以上皆有可能

【答案】A

【解析】

【分析】利用大边对大角的性质，判断最大角的类型，即可确定三角形的类型.

【详解】 $\because$ 在同一个三角形中，大边对大角，最长边所对的角是三角形的最大角，又已知最长边所对的角是锐角，即三角形的最大角是锐角，

$\therefore$ 三角形其余两个角都小于最大角，也都是锐角，

$\therefore$ 三个内角均为锐角的三角形是锐角三角形，

$\therefore$ 这个三角形是锐角三角形.

4. 已知同一平面内有三条不重合的直线 a 、 b 、 c ，下列命题中，是假命题的是（ ）

A. 若 $a \perp c$ ， $b \perp c$ ，则 $a \parallel b$

B. 若 $a \parallel c$ ， $b \perp c$ ，则 $a \perp b$

C. 若 $a \perp c$ ， $b \parallel c$ ，则 $a \parallel b$

D. 若 $a \parallel c$ ， $b \parallel c$ ，则 $a \parallel b$

【答案】C

【解析】

【分析】在同一平面内，根据直线平行、垂直的相关性质逐一判断命题真假即可.

【详解】解：A、若 $a \perp c$ ， $b \perp c$ ，则 $a \parallel b$ ，符合平面内直线的性质，是真命题；

B、若 $a \parallel c$ ， $b \perp c$ ，则 $a \perp b$ ，符合平面内直线的性质，是真命题；

C、若 $a \perp c$ ， $b \parallel c$ ， $\because$ 垂直于平行线中的一条直线，必然垂直于另一条，

$\therefore a \perp b$ ，故原命题是假命题；

D、若 $a \parallel c$ ， $b \parallel c$ ，则 $a \parallel b$ ，符合平行公理的推论，是真命题.

5. 下列所叙述的两个三角形中，一定全等的是（ ）

A. 含 45° 的两个直角三角形

B. 腰对应相等的两个等腰三角形

C. 两腰和一角对应相等的两个等腰三角形

D. 周长相等的两个等边三角形

【答案】D

【解析】

【分析】根据全等三角形的判定定理，逐一判断各选项是否满足全等条件，即可得到结果.

【详解】解：A、含 45° 的两个直角三角形，只有三个角对应相等，没有边对应相等的条件，不符合全等三

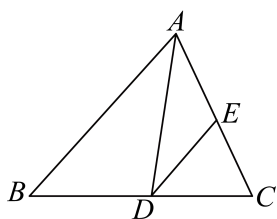
角形的判定，故不一定全等；

B、腰对应相等的两个等腰三角形，顶角或底边不一定对应相等，不符合全等三角形的判定，故不一定全等；

C、两腰和一角对应相等的两个等腰三角形，若相等的角一个是顶角一个是底角，两个三角形内角不对应相等，不全等，故不一定全等；

D、等边三角形的三条边相等，若两个等边三角形周长相等，则边长相等，可得三边对应相等，符合全等三角形的 SSS 判定定理，故两个三角形一定全等.

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $CA = CB$ ， AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D ，点 E 在边 AC 上. 增加下列条件中的一个：① $CD = CE$ ；② $AE = DE$ ；③ $\angle CED = 2\angle ADE$ ；④ $\angle CDE = 2\angle ADE$. 其中，一定能推导出 $DE \parallel AB$ 的条件有 ()



A. ①②

B. ②③

C. ①②③

D. ①②③④

【答案】D

【解析】

【分析】由等边对等角可得 $\angle BAC = \angle B$ ，由角平分线的定义得出 $\angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAC$ ，再根据平行线的判定定理逐项分析即可得出结果.

【详解】解： $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中， $CA = CB$ ，

$\therefore \angle BAC = \angle B$ ，

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$ ，

$\therefore \angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAC$ ，

①当 $CD = CE$ 时， $\angle CDE = \angle CED$ ，

$\because \angle CDE + \angle CED + \angle C = 180^\circ$ ， $\angle B + \angle BAC + \angle C = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle BAC = \angle B = \angle CDE = \angle CED$ ，

$\therefore DE \parallel AB$ ，故①符合题意；

②当 $AE = DE$ 时， $\angle EAD = \angle EDA$ ，

$\therefore \angle BAD = \angle EDA$ ，

$\therefore DE \parallel AB$ ，故②符合题意；

③当 $\angle CED = 2\angle ADE$ 时,

$$\because \angle CED = \angle ADE + \angle DAE = 2\angle ADE,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle DAE,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle EDA,$$

$\therefore DE \parallel AB$, 故③符合题意;

④当 $\angle CDE = 2\angle ADE$ 时, $\angle ADC = \angle ADE + \angle CDE = 3\angle ADE$,

$$\because \angle ADC = \angle BAD + \angle B, \quad \angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\angle B,$$

$$\therefore \angle ADC = 3\angle BAD,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle ADE,$$

$\therefore DE \parallel AB$, 故④符合题意.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每小题 3 分, 满分 36 分)

7. “ x 的 4 倍减去 8 的差是一个负数” 用不等式表示为_____.

【答案】 $4x - 8 < 0$

【解析】

【详解】 解: 根据题意可得, x 的 4 倍为 $4x$, x 的 4 倍减去 8 的差为 $4x - 8$, 负数是小于 0 的数, 因此列不等式为 $4x - 8 < 0$.

8. 判定命题 “如果 $a^2 = b^2$, 那么 $a = b$ ” 是假命题, 只需要举一个反例, 这个反例可以是_____.

【答案】 $a = 2, b = -2$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】 题中条件为 $a^2 = b^2$, 结论为 $a = b$, 则只需找出满足 $a^2 = b^2$ 且 $a \neq b$ 的一组 a, b 即可.

【详解】 解: 当 $a = 2, b = -2$ 时, $a^2 = 2^2 = 4, b^2 = (-2)^2 = 4$,

满足 $a^2 = b^2$, 但 $2 \neq -2$, 不满足 $a = b$,

$\therefore a = 2, b = -2$ 可作为该命题的反例.

9. 两条直线 AB 、 CD 相交于点 O , 如果 $\angle AOC = \angle AOD$, 那么这两条直线的夹角度数为_____°.

【答案】 90

【解析】

【分析】 根据邻补角的和为 180° , 结合已知条件求出角的度数, 再根据两条直线夹角的定义即可得到结果.

【详解】 解: $\because$ 直线 AB, CD 相交于点 O , $\angle AOC$ 与 $\angle AOD$ 是邻补角,

$$\therefore \angle AOC + \angle AOD = 180^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle AOC = \angle AOD,$$

$$\therefore 2\angle AOC = 180^\circ,$$

$$\text{解得 } \angle AOC = 90^\circ,$$

则这两条直线的夹角度数为 90° .

10. 已知等腰三角形的两边长分别为 4cm 和 8cm , 则此三角形的周长为_____ cm .

【答案】 20

【解析】

【分析】 本题考查了等腰三角形的定义, 三角形三边关系.

分腰长为 4cm 与腰长为 8cm 两种情况, 结合三角形三边的关系即可求解.

【详解】 解: 当腰长为 4cm 时,

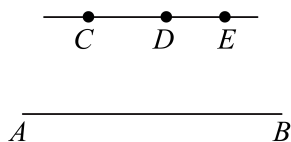
三边为 4cm 、 4cm 、 8cm , $4+4=8$, 不满足三角形三边关系, 故舍去;

当腰长为 8cm 时,

三边为 8cm 、 8cm 、 4cm , $8+8>4$, $8+4>8$, 满足三角形三边关系, 周长为 $8+8+4=20(\text{cm})$;

故答案为: 20.

11. 如图, D 是直线 AB 外一点, 过点 D 作 $CD \parallel AB$, $DE \parallel AB$, 则点 C 、 D 、 E 必在同一直线上, 其依据的基本事实是_____.



【答案】 经过直线外一点, 有且只有一条直线与这条直线平行

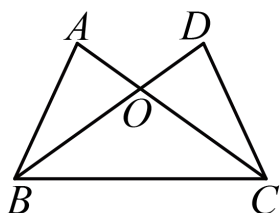
【解析】

【分析】 平行公理: 经过直线外一点, 有且只有一条直线与这条直线平行.

【详解】 解: D 是直线 AB 外一点, 过点 D 作 $CD \parallel AB$, $DE \parallel AB$, 则点 C 、 D 、 E 必在同一直线上,

其依据的基本事实是经过直线外一点, 有且只有一条直线与这条直线平行.

12. 如图, 已知 $\angle ABD = \angle DCA$, 要使 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$, 还需添加一个条件, 你添加的条件是_____. (只需添加一个条件, 不添加辅助线)



【答案】

$AB = DC$ (或 $\angle ABC = \angle DCB$ 或 $\angle ACB = \angle DBC$)

【解析】

【分析】结合已知条件，根据全等三角形的判定方法添加条件即可.

【详解】解：添加 $AB = DC$,

$$\therefore \angle ABD = \angle DCA, \quad \angle AOB = \angle DOC,$$

$$\therefore \triangle ABO \cong \triangle DCO (AAS),$$

$$\therefore BO = CO, \quad AO = DO,$$

$$\therefore AO + CO = DO + BO, \quad \text{即 } AC = DB,$$

$$\text{又 } BC = CB,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB (SSS);$$

$$\text{添加 } \angle ABC = \angle DCB,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle DCA,$$

$$\therefore \angle ABC - \angle ABD = \angle DCB - \angle DCA, \quad \text{即 } \angle DBC = \angle ACB,$$

$$\text{又 } BC = CB,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB (ASA),$$

$$\text{添加 } \angle ACB = \angle DBC,$$

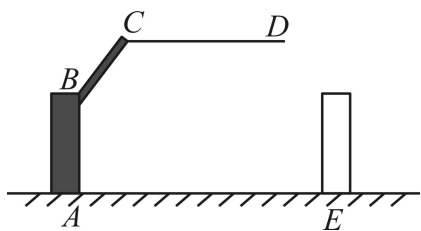
$$\therefore \angle ABD = \angle DCA,$$

$$\therefore \angle DBC + \angle ABD = \angle ACB + \angle DCA, \quad \text{即 } \angle ABC = \angle DCB,$$

$$\text{又 } BC = CB,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB (ASA).$$

13. 某小区车库门口的曲臂直杆道闸模型如图所示. 已知 $AB \perp AE$, $CD \parallel AE$, 那么 $\angle ABC + \angle BCD =$ _____ 度.

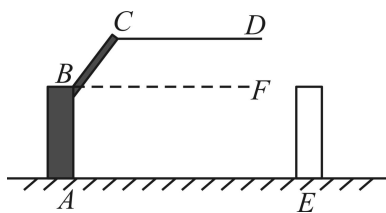


【答案】 270

【解析】

【分析】 过点 B 作 $BF \parallel AE$ ，根据平行公理推论可得 $BF \parallel CD$ ，再利用平行线的性质及垂直的定义即可求解.

【详解】 解：如图，过点 B 作 $BF \parallel AE$ ，



$\because CD \parallel AE$ ，

$\therefore BF \parallel CD$ ，

$\because AB \perp AE$ ，

$\therefore \angle BAE = 90^\circ$ ，

$\because BF \parallel AE$ ，

$\therefore \angle ABF + \angle BAE = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle ABF = 90^\circ$ ，

$\because BF \parallel CD$ ，

$\therefore \angle CBF + \angle BCD = 180^\circ$ ，

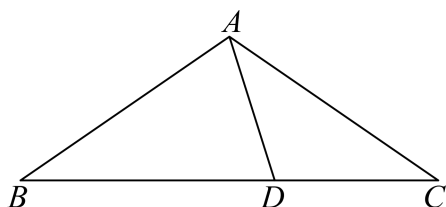
$\therefore \angle ABC + \angle BCD$

$= \angle ABF + \angle CBF + \angle BCD$

$= 90^\circ + 180^\circ$

$= 270^\circ$.

14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 BC 上，且 $AB = AC = BD$ ， $AD = DC$ ，则 $\angle C$ 的度数是_____度.



【答案】 36

【解析】

【分析】 由等边对等角得出 $\angle CAD = \angle C$ ，由三角形外角的定义及性质得出 $\angle ADB = 2\angle C$ ，再由等边对等角得出 $\angle B = \angle C$ ， $\angle BAD = \angle ADB = 2\angle C$ ，最后由三角形内角和定理计算即可得出结果.

【详解】 解： $\because AD = DC$ ，

$$\therefore \angle CAD = \angle C,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle CAD + \angle C = 2\angle C,$$

$$\because AB = AC = BD,$$

$$\therefore \angle B = \angle C, \angle BAD = \angle ADB = 2\angle C,$$

$$\because \angle B + \angle BAD + \angle CAD + \angle C = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle C + 2\angle C + \angle C + \angle C = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 36^\circ.$$

15. 已知圆柱的底面半径长为6，高为20，则这个圆柱的侧面积 = _____ (结果保留 π).

【答案】 240π

【解析】

【分析】 先根据圆的周长公式求出圆柱的底面周长，再利用圆柱侧面积的计算公式计算即可.

【详解】 解：由题意得，圆柱底面半径长为6，高为20，

故圆柱底面周长为 $2\pi \times 6 = 12\pi$ ，圆柱侧面积为 $12\pi \times 20 = 240\pi$.

16. 已知一个圆锥形零件的体积是 $24\pi\text{cm}^3$ ，高为 8cm ，那么这个圆锥形零件的底面半径为 _____ cm .

【答案】 3

【解析】

【分析】 先根据圆锥体积公式求出底面积，再根据圆的面积公式计算底面半径即可.

【详解】 解：设圆锥形零件的底面积为 S ，底面半径为 r ，

$$\text{由圆锥体积公式 } V = \frac{1}{3}Sh \text{ 得 } 24\pi = \frac{1}{3} \times S \times 8,$$

$$\text{解得 } S = 9\pi\text{cm}^2,$$

又圆的面积公式为 $S = \pi r^2$,

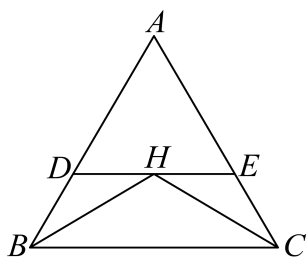
因此 $\pi r^2 = 9\pi$,

化简得 $r^2 = 9$,

因为半径为正数,

所以 $r = 3\text{cm}$.

17. 如图, 等边 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC$ 的平分线与 $\angle ACB$ 的平分线交于点 H , 过点 H 作 $DE \parallel BC$, 分别交边 AB 、 AC 于点 D 、 E . 如果 $AB = 6\text{cm}$, 那么 $\triangle ADE$ 的周长 = _____ cm .



【答案】 12

【解析】

【分析】 根据角平分线的定义可得 $\angle DBH = \angle CBH$, $\angle ECH = \angle BCH$, 根据平行线的性质可得 $\angle DHB = \angle CBH$, $\angle EHC = \angle BCH$, 进而根据等角对等边证得 $BD = DH$, $CE = EH$, 最后将 $\triangle ADE$ 的周长转化为 $AB + AC$ 进行计算.

【详解】 解: $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore AB = AC = 6\text{cm}$,

$\because BH$ 平分 $\angle ABC$, CH 平分 $\angle ACB$,

$\therefore \angle DBH = \angle CBH$, $\angle ECH = \angle BCH$,

$\because DE \parallel BC$,

$\therefore \angle DHB = \angle CBH$, $\angle EHC = \angle BCH$,

$\therefore \angle DBH = \angle DHB$, $\angle ECH = \angle EHC$,

$\therefore BD = DH$, $CE = EH$,

$\therefore \triangle ADE$ 的周长 $= AD + DE + AE$

$= AD + DH + HE + AE$

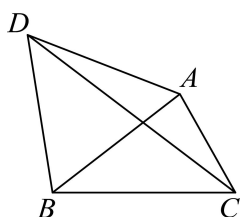
$= AD + BD + CE + AE$

$= AB + AC$

$$= 6 + 6$$

$$= 12(c, m).$$

18. 我们知道：在 $\triangle ABC$ 中，最大角 $\angle A$ 的度数如果小于 120° ，那么在 $\triangle ABC$ 的内部存在一点 P ，到三角形三个顶点的距离之和最小，这个点 P 称为费马点。关于点 P 还有如下两个结论：①当 $PA + PB + PC$ 最小时， $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 120^\circ$ ；②以 $\triangle ABC$ 的任意一边向外作等边三角形，例如：如图所示，以边 AB 向外作等边 $\triangle ABD$ ，连接 CD ，那么点 P 在线段 CD 上。已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = \alpha$ ($\alpha < 120^\circ$)，点 P 是 $\triangle ABC$ 的费马点，那么 $\angle ABP =$ _____ (用含 α 的式子表示)。

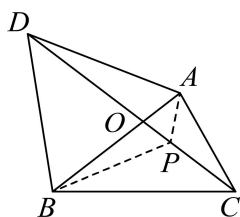


【答案】 $60^\circ - \frac{\alpha}{2}$

【解析】

【分析】 设 AB 与 CD 相交于 O ，设点 P 为费马点，连接 BP 、 AP ，根据费马点定义知 $\angle BPC = 120^\circ$ ，结合等边三角形的性质和等腰三角形的性质可求出 $\angle ADC = \angle ACD = 60^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ ，根据三角形外角的性质可得出 $\angle OBP = \angle ODA = 60^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ ，即可求解。

【详解】 解：设 AB 与 CD 相交于 O ，设点 P 为费马点，连接 BP 、 AP ，则 $\angle BPC = 120^\circ$ ，



$\because \triangle ABD$ 是等边三角形，

$$\therefore AD = AB, \quad \angle BAD = 60^\circ,$$

$$\because AB = AC, \quad \angle BAC = \alpha,$$

$$\therefore AD = AC, \quad \angle DAC = 60^\circ + \alpha,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ACD = \frac{180^\circ - \angle DAC}{2} = 60^\circ - \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\because \angle BPC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BPO = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle OAD = \angle OPB,$$

$$\text{又 } \angle BOD = \angle OBP + \angle OPB, \quad \angle BOD = \angle ODA + \angle OAD,$$

$$\therefore \angle OBP = \angle ODA = 60^\circ - \frac{1}{2}a,$$

$$\text{即 } \angle ABP = 60^\circ - \frac{1}{2}a.$$

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 46 分)

$$19. \text{ 解不等式组: } \begin{cases} 5x - 18 \leq 4(2x - 3) \\ \frac{1 + 3x}{2} - x < 1 \end{cases}$$

【答案】 $-2 \leq x < 1$

【解析】

【分析】 分别求出不等式组中每个不等式的解集, 然后根据不等式组解集的确定方法确定出不等式组的解集即可.

$$\text{【详解】解: } \begin{cases} 5x - 18 \leq 4(2x - 3) \text{ ①} \\ \frac{1 + 3x}{2} - x < 1 \text{ ②} \end{cases},$$

解不等式①得: $x \geq -2$,

解不等式②得: $x < 1$,

$\therefore$ 不等式组的解集为 $-2 \leq x < 1$.

20. 某次知识竞赛共有 25 道题, 规定答对一道题得 4 分, 答错一道题扣 2 分, 不答题不得分. 在这次竞赛中, 小华有 3 道题没有作答. 若希望取得不低于 75 分的成绩, 小华至少要答对几道题?

【答案】 小华至少要答对 20 道题

【解析】

【分析】 设小华答对的题数, 即可得到答错的题数, 再根据得分不低于 75 分的要求列出不等式求解, 结合题数为正整数即可得到最小答对题数.

【详解】 解: 设小华答对 x 道题,

由题意得, 小华有 3 道题未作答,

$\therefore$ 答错的题数为 $(25 - 3 - x)$ 道,

根据题意得, $4x - 2(25 - 3 - x) \geq 75$

$$6x - 44 \geq 75$$

$$\text{解得 } x \geq \frac{119}{6} = 19\frac{5}{6},$$

$\because x$ 为正整数,

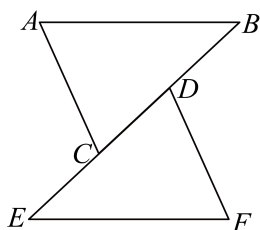
$\therefore x$ 的最小值为 20,

答: 小华至少要答对 20 道题.

21. 如图, 已知: 点 E, C, D, B 在一直线上, $AB = EF$, $BD = CE$, 如果_____, 那么 $AB \parallel EF$. 请

从① $AC \parallel FD$; ② $AC = FD$; ③ $\angle A = \angle F$ 这三个选项中选择一个作为条件 (在空格中填入对应序号),

使结论成立, 并证明结论.



【答案】②

证明: $\because BD = CE$,

$\therefore BD + CD = CE + CD$, 即 $BC = DE$,

$\because AC = FD$, $AB = EF$,

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle FED (SSS)$,

$\therefore \angle B = \angle E$,

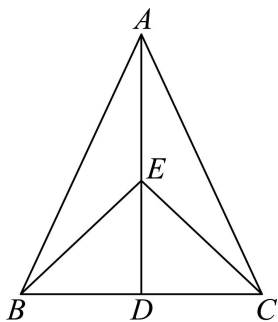
$\therefore AB \parallel EF$.

【解析】

【分析】由 $BD = CE$ 可得 $BC = DE$, 选择① $AC \parallel FD$ 时, 可得 $\angle ACB = \angle FDE$, 两个三角形对应角边为 ASS, 无法证明两个三角形全等, 不能证明结论; 选择② $AC = FD$, 可由 SSS 证明两个三角形全等, 得到 $\angle B = \angle E$, 可证明结论; 选择③ $\angle A = \angle F$ 时, 两个三角形对应角边为 ASS, 无法证明两个三角形全等, 不能证明结论.

【详解】略

22. 如图, 已知: 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 BC 上, 点 E 在线段 AD 上, $\angle ABE = \angle ACE$, $\angle BED = \angle CED$. 求证: $AD \perp BC$.



【答案】证明： $\because \angle BED = \angle CED$,

$$\therefore \angle AEB = \angle AEC ,$$

$$\because \angle ABE = \angle ACE , \quad AE = AE ,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACE \text{ (AAS)} ,$$

$$\therefore EB = EC ,$$

$$\because \angle BED = \angle CED , \quad ED = ED ,$$

$$\therefore \triangle BED \cong \triangle CED \text{ (SAS)} ,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle CDE ,$$

$$\because \angle BDE + \angle CDE = 180^\circ ,$$

$$\therefore \angle BDE = 90^\circ ,$$

$$\therefore AD \perp BC .$$

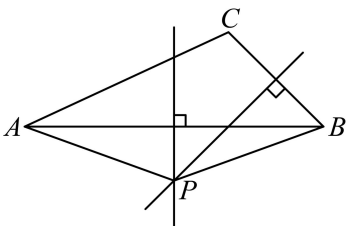
【解析】

【分析】先证明 $\triangle ABE \cong \triangle ACE$ (AAS) 可得 $EB = EC$, 再证明 $\triangle BED \cong \triangle CED$ (SAS) , 进一步求解即可.

【详解】略

23. 我们知道：三角形的三条边的垂直平分线相交于一点，这个交点叫做三角形的外心. 对于三角形的外心，课本第 138 页有如下一个关于角度的问题：

5. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 110^\circ$ ，边 AB 、 CB 的垂直平分线相交于点 P ，连接 AP 、 BP . 求 $\angle APB$ 的度数.



对于类似的问题会不会有一般性的结论呢？

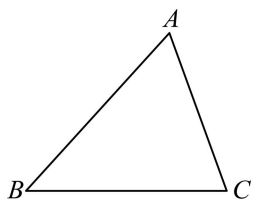


图1

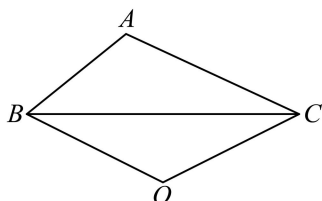


图2

(1) 如图 1, 在锐角三角形 ABC 中,

①请用直尺和圆规作出 $\triangle ABC$ 的外心 O (保留作图痕迹);

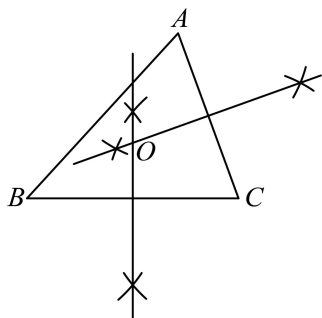
②在所作图中连接 BO 、 CO , 如果设 $\angle A = \alpha$, 那么 $\angle BOC =$ _____ (用含 α 的式子表示);

(2) 如图 2, 在钝角三角形 ABC 中, $\angle A > 90^\circ$, 点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心, 连接 BO 、 CO , 如果设 $\angle A = \alpha$, 那么 $\angle BOC =$ _____ (用含 α 的式子表示);

(3) 如果三角形的外心恰好落在这个三角形的一条边上, 那么这个三角形的最大角的度数是 _____ 度;

(4) 通过以上问题的解决, 对于三角形的外心的位置你能得到怎样的结论? 请写出得到的结论.

【答案】 (1) 解: ①如图, 外心 O 即为所求;



② 2α

(2) $360^\circ - 2\alpha$

(3) 90

(4) 解: 锐角三角形的外心在三角形的内部, 直角三角形的外心是斜边的中点, 钝角三角形的外心在三角形的外部.

【解析】

【分析】 (1) ①分别作 BC 、 AC 的垂直平分线, 交点 O 即为所求; ②利用线段的垂直平分线的性质结合等腰三角形的性质与三角形的内角和定理解答即可;

(2) 连接 AO , 结合外心的性质, 等腰三角形的性质与三角形的内角和定理解答即可;

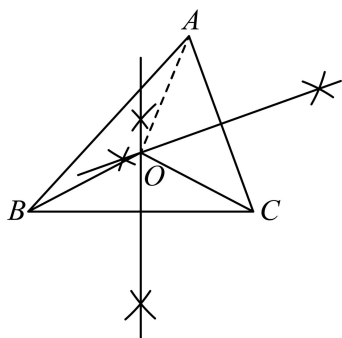
(3) 先画图, 再结合外心与等腰三角形的性质, 三角形的内角和定理解答即可;

(4) 根据 (1) (2) (3) 进行归纳总结即可.

【小问 1 详解】

解：①略

②如图，连接 OA, OB, OC ，



$\therefore O$ 为线段 BC, AC 的垂直平分线的交点，

$$\therefore OB = OC = OA,$$

$$\therefore \angle OAB = \angle OBA, \quad \angle OAC = \angle OCA,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle OAB + \angle OAC = \alpha,$$

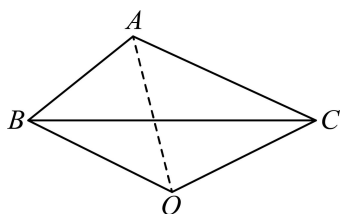
$$\therefore \angle OBA + \angle OCA = \alpha,$$

$$\therefore \angle OBC + \angle OCB = 180^\circ - (\angle BAC + \angle OBA + \angle OCA) = 180^\circ - 2\alpha,$$

$$\therefore \angle BOC = 180^\circ - (\angle OBC + \angle OCB) = 2\alpha.$$

【小问 2 详解】

解：如图，连接 AO ，



$\therefore$ 点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，

$$\therefore OA = OB = OC,$$

$$\therefore \angle OAB = \angle OBA, \quad \angle OAC = \angle OCA,$$

$$\therefore \angle BAC = \alpha = \angle OAB + \angle OAC,$$

$$\therefore \angle OBA + \angle OCA = \alpha,$$

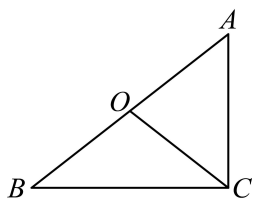
$$\therefore \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ, \quad \angle OBC + \angle OCB + \angle BOC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle ABO + \angle ACO + \angle BOC = 360^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = 360^\circ - (\angle ABO + \angle ACO + \angle BAC) = 360^\circ - 2\alpha.$$

【小问 3 详解】

解：如图， O 为三角形 ABC 的外心，



$$\therefore OA = OB = OC,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle OCA, \angle OBC = \angle OCB,$$

$$\therefore \angle A + \angle B + \angle ACB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle B + \angle OCB + \angle OCA = 180^\circ,$$

$$\therefore 2(\angle OCB + \angle OCA) = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle OCB + \angle OCA = 90^\circ = \angle ACB,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的最大角为 } 90^\circ.$$

【小问 4 详解】

略

24. 如图 1，已知：在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ， D 、 E 分别是边 BC 上的两点（点 D 在点 E 左侧），且 $\angle DAE = 45^\circ$ ，过点 B 作 $BF \perp BC$ ，交 AD 延长线于点 F 。

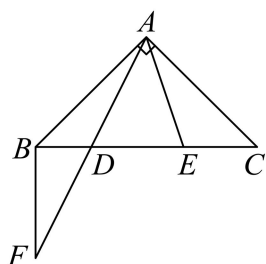


图1

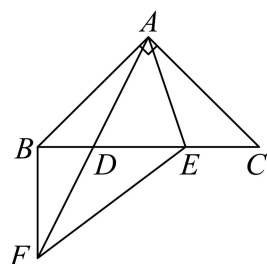


图2

(1) 求证： $\angle BFA = \angle CAE$ ；

(2) 如图 2，连接 EF ，求证： FA 平分 $\angle BFE$ 。

【答案】(1) 证明： $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABC = \angle C = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle ABC + \angle BAD = 45^\circ + \angle BAD,$$

$$\text{又} \because \angle BAE = \angle DAE + \angle BAD = 45^\circ + \angle BAD,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle BAE,$$

又 $\because \angle ADE = \angle FDB$,

$\therefore \angle FDB = \angle BAE$,

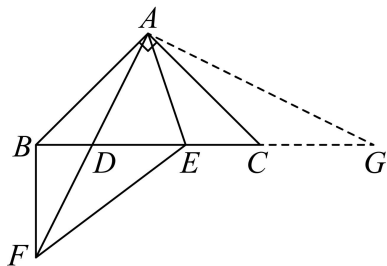
$\because BF \perp BC$, $\angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore \angle FBD = \angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore \angle BFA + \angle FDB = 90^\circ = \angle CAE + \angle BAE$,

$\therefore \angle BFA = \angle CAE$.

(2) 证明: 如图, 过点 A 作 $AG \perp AF$, 交 BC 的延长线于点 G ,



则 $\angle BAF = 90^\circ - \angle DAC = \angle CAG$, $\angle ABF = \angle ACG = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$,

$\because AB = AC$,

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle ACG$ (ASA),

$\therefore AF = AG$, $\angle BFD = \angle G$,

$\because \angle DAE = 45^\circ$,

$\therefore \angle GAE = 45^\circ$,

$\because AE = AE$,

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle AEG$ (SAS),

$\therefore \angle AFE = \angle G$,

$\therefore \angle BFD = \angle AFE$,

$\therefore FA$ 平分 $\angle BFE$.

【解析】

【分析】(1) 先通过 $\angle ADE = \angle ABC + \angle BAD = 45^\circ + \angle BAD$, $\angle BAE = \angle DAE + \angle BAD = 45^\circ + \angle BAD$, 求得 $\angle ADE = \angle BAE$, 进而可得 $\angle FDB = \angle BAE$, 最后根据等角的余角相等可得 $\angle BFA = \angle CAE$.

(2) 过点 A 作 $AG \perp AF$, 交的延长线于点 G , 先证明 $\triangle ABF \cong \triangle ACG$ (ASA), 求得 $\angle BFD = \angle G$, 再证明 $\triangle AEF \cong \triangle AEG$ (SAS), 求得 $\angle AFE = \angle G$, 可得 $\angle BFD = \angle AFE$, 即可证明结论.

【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

略

25. 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 中, $AB = DE$, $AC = DF$, 如果 $\angle BAC > \angle EDF$, 那么 $BC > EF$. 这个命题是真命题还是假命题?

古希腊数学家欧几里得所著的《几何原本》记载了这个命题, 并证明了上述命题是一个真命题. 下面是《几何原本》中为证明该命题所添加的辅助线: 如图 2, 因为 $\angle BAC > \angle EDF$, 所以以 DE 为边做 $\angle EDG = \angle BAC$, 使 $DG = AC$, 连接 EG 、 FG , 此时点 F 在 EG 下方.

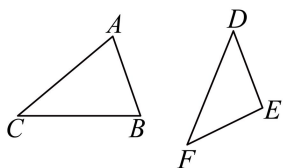


图1

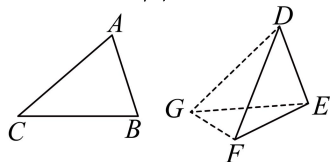


图2

(1) 根据《几何原本》中所添加的辅助线, 证明该命题是真命题;

(2) 在研究完上述命题后, 还能提出一个新的命题: 如图 1, 已知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 中, $AB = DE$, $AC = DF$, 如果 $BC > EF$, 那么 $\angle BAC > \angle EDF$. 事实上, 利用刚刚证明的命题以及同学们学习过的反证法, 可以证明这个新的命题仍然是真命题, 请利用反证法证明.

【答案】(1) 证明: 由题意知, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEG$ 中,
$$\begin{cases} AB = DE \\ \angle BAC = \angle EDG \\ AC = DG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEG (S, A, S),$$

$$\therefore BC = EG;$$

$$\therefore AC = DF, AC = DG,$$

$$\therefore DF = DG,$$

$$\therefore \angle DGF = \angle DFG,$$

$$\text{又} \because \angle GFE = \angle DFG + \angle DFE, \angle EGF = \angle DGF - \angle DGE,$$

$$\therefore \angle GFE > \angle EGF,$$

在 $\triangle DEG$ 中, $\angle GFE > \angle EGF$,

$\therefore EG > EF$,

即 $BC > EF$.

(2) 证明: 假设如果 $BC > EF$, 那么 $\angle BAC \leq \angle EDF$,

当 $\angle BAC = \angle EDF$ 时,

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中,
$$\begin{cases} AB = DE \\ \angle BAC = \angle EDF, \\ AC = DF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF (SAS)$,

$\therefore BC = EF$, 与已知 $BC > EF$ 矛盾;

当 $\angle BAC < \angle EDF$ 时,

由 (1) 中已证明的命题可知,

若 $AB = DE$, $AC = DF$, $\angle BAC < \angle EDF$, 那么 $BC < EF$,

与已知 $BC > EF$ 矛盾;

综上所述, 假设不成立,

$\therefore \angle BAC > \angle EDF$.

【解析】

【分析】(1) 证明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, 得到 $BC = EG$, 从而得到 $DF = DG$, 利用“在同一个三角形中, 大角对大边”进行证明;

(2) 根据反证法的要求先假设结论为 $\angle BAC \leq \angle EDF$, 再通过证全等和第一位的结论, 推翻假设的结论即可.

【小问 1 详解】

解: 略

【小问 2 详解】

解: 略