

上海市金山区世外学校 2025-2026 学年下学期七年级期末数学试卷

一、选择题 (本大题共 8 题, 每题 3 分, 满分 24 分)

1. 下列不等式的解法中, 正确的是 ()

- A. $-x \geq -5$, 两边同乘 -1 , 得 $x \geq 5$
- B. $-x \leq -5$, 两边同乘 -1 , 得 $x \leq 5$
- C. $2x \geq -6$, 两边同时除以 -2 , 得 $x \leq 3$
- D. $-2x \geq -6$, 两边同时除以 -2 , 得 $x \leq 3$

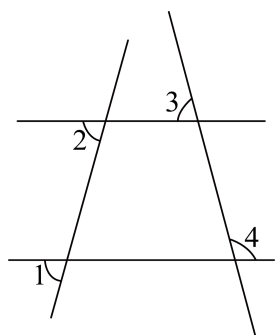
【答案】D

【解析】

【分析】根据不等式的基本性质, 进行求解即可.

- 【详解】解: A. $-x \geq -5$, 两边同乘 -1 , 得 $x \leq 5$, 故 A 错误;
- B. $-x \leq -5$, 两边同乘 -1 , 得 $x \geq 5$, 故 B 错误;
- C. $2x \geq -6$, 两边同时除以 2 , 得 $x \geq -3$, 故 C 错误;
- D. $-2x \geq -6$, 两边同时除以 -2 , 得 $x \leq 3$, 故 D 正确.

2. 如图, 已知 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = 65^\circ$, 那么 $\angle 4$ 的度数是 ()



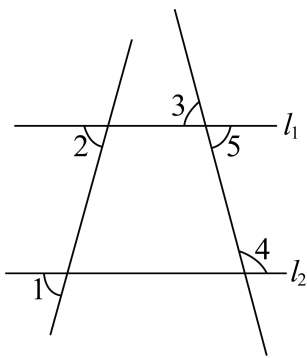
- A. 65°
- B. 95°
- C. 105°
- D. 115°

【答案】D

【解析】

【分析】根据 $\angle 1 = \angle 2$, 可得直线平行, 再由直线平行的性质求解即可.

【详解】解: 记直线 l_1, l_2 , 与 $\angle 5$, 如图,



$$\because \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore l_1 \parallel l_2,$$

$$\therefore \angle 4 + \angle 5 = 180^\circ,$$

$$\because \angle 3 = \angle 4,$$

$$\therefore \angle 4 = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ.$$

3. 一个底面半径为 2cm，高为 3cm 的圆锥的体积是（ ）

A. $12\pi\text{cm}^3$

B. $4\pi\text{cm}^3$

C. $24\pi\text{cm}^3$

D. $8\pi\text{cm}^3$

【答案】B

【解析】

【分析】根据圆锥的体积公式 = 底面积 $\times$ 高 $\times \frac{1}{3}$ 计算即可.

【详解】解：根据题意，该圆锥的体积是 $\pi \times 2^2 \times 3 \times \frac{1}{3} = 4\pi (\text{cm}^3)$.

4. 已知如果两条平行线被第三条直线所截，那么下列说法正确的是（ ）

A. 截得的一对同旁内角相等

B. 截得的一对同旁内角的角平分线互相平行

C. 截得的一对内错角的角平分线互相平行

D. 截得的一对同位角的角平分线互相垂直

【答案】C

【解析】

【分析】根据平行线的性质，结合图形分析平分角之后得到的角之间的位置关系，运用平行线的判定判断是否平行；若不平行，则进一步探究其特殊性.

【详解】解：A、两直线平行，同旁内角互补，故该选项说法错误，不符合题意；

B、两直线平行，同旁内角互补，其角平分线分得的不同的两角互余，从而推出两条角平分线相交成 90° 角，即互相垂直，故该选项说法错误，不符合题意；

C、两直线平行，内错角相等，其角平分线分得的角也相等；根据内错角相等，两直线平行可判断角平分线互相平行，故该选项说法正确，符合题意；

D、两直线平行，同位角相等，其角平分线分得的角也相等；根据同位角相等，两直线平行可判断角平分线互相平行，而不是互相垂直，故该选项说法错误，不符合题意。

5. 下列判定两个等腰三角形全等的方法中，一定正确的是（ ）

A. 两角对应相等

B. 两腰对应相等

C. 一边一角对应相等

D. 一腰和底边对应相等

【答案】D

【解析】

【分析】依据全等三角形的判定定理回答即可，解题的关键是熟知全等三角形的判定定理。

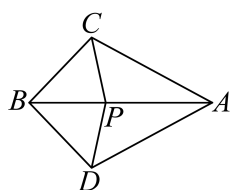
【详解】解：A、两角对应相等，没有边的参与，不符合全等的条件，故不能判定两三角形全等，故本选项错误，不符合题意；

B、两腰对应相等，第三边不一定对应相等，不符合全等的条件，故不能判定两三角形全等，故本选项错误；

C、一边一角对应相等，此条件未明确边角关系而不能保证全等。例如，若一个等腰三角形的腰与另一个等腰三角形的底边对应相等，顶角与另一个的底角对应相等，则无法判定两个等腰三角形全等，故本选项错误；

D、一腰和底边对应相等，相当于两腰和底边对应相等，利用SSS可以证得两个等腰三角形全等，故本选项正确。

6. 如图，点P是AB上任意一点， $\angle ABC = \angle ABD$ 。从下列条件中补充一个条件，不一定能推出 $\triangle APC \cong \triangle APD$ 的是（ ）



A. $AC = AD$

B. $BC = BD$

C. $\angle ACB = \angle ADB$

D. $\angle CAB = \angle DAB$

【答案】A

【解析】

【分析】此题考查了全等三角形的判定。根据全等三角形的判定和性质逐个选项进行判断即可。

【详解】解：A、补充 $AC = AD$ ，不能推出 $\triangle APC \cong \triangle APD$ ，故此选项符合题意；

B、补充 $BC = BD$ ，先证出 $\triangle ABC \cong \triangle ABD$ ，后能推出 $\triangle APC \cong \triangle APD$ ，故此选项不符合题意；

C、补充 $\angle ACB = \angle ADB$ ，先证出 $\triangle ABC \cong \triangle ABD$ ，后能推出 $\triangle APC \cong \triangle APD$ ，故此选项不符合题意；

D、补充 $\angle CAB = \angle DAB$ ，先证出 $\triangle ABC \cong \triangle ABD$ ，后能推出 $\triangle APC \cong \triangle APD$ ，故此选项不符合题意；
故选：A.

7. 到三角形三个顶点距离都相等的点是 ()

- A. 三角形的三条角平分线的交点
- B. 三角形的三边垂直平分线的交点
- C. 三角形的三条高线的交点
- D. 三角形的三条中线的交点

【答案】B

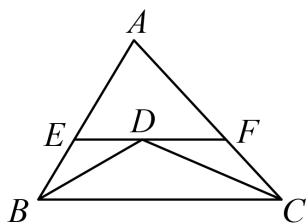
【解析】

【分析】本题考查了线段垂直平分线的判定，根据到线段的端点距离相等的点在线段的垂直平分线上进行作答即可.

【详解】解： $\because$ 到三角形三个顶点距离都相等的点，
 $\therefore$ 该点是三角形的三边垂直平分线的交点，

故选：B

8. 如图， $\angle B$ ， $\angle C$ 的平分线相交于点 D ，过点 D 作 $EF \parallel BC$ ，交 AB 于点 E ，交 AC 于点 F ，下列结论中：① $BE = DE$ ；② $DF = ED$ ；③ $\angle BDC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$ ；④ $\triangle AEF$ 周长 $= AB + AC$ ，正确的有 ()



A. ①②

B. ①②④

C. ①③④

D. ①②③④

【答案】C

【解析】

【分析】由 $\triangle ABC$ 中， $\angle B$ 与 $\angle C$ 的平分线交于点 D ， $EF \parallel BC$ ，易证得 $\triangle BED$ 和 $\triangle CFD$ 都是等腰三角形，继而可得 $EF = BE + CF$ ，又由 $\triangle AEF$ 的周长为： $AE + EF + AF = AE + BE + CE + AF = AB + AC$ ；即可得 $\triangle AEF$ 的周长等于 AB 与 AC 的和.

【详解】解： $\because EF \parallel BC$ ，
 $\therefore \angle EDB = \angle DBC$ ， $\angle FDC = \angle DCB$ ，
 $\because \triangle ABC$ 中， $\angle B$ 与 $\angle C$ 的平分线交于点 D ，
 $\therefore \angle EBD = \angle DBC$ ， $\angle FCD = \angle DCB$ ，

$$\therefore \angle EBD = \angle EDB, \angle FCD = \angle FDC,$$

$$\therefore BE = DE, CF = DF, \text{ 故①正确;}$$

DF 与 ED 不一定相等, 故②错误;

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B$ 和 $\angle C$ 的平分线相交于点 D ,

$$\therefore \angle DBC = \frac{1}{2} \angle ABC, \angle BCD = \frac{1}{2} \angle ACB,$$

$$\therefore \angle DBC + \angle DCB = \frac{1}{2} \angle ABC + \frac{1}{2} \angle ACB = \frac{1}{2} (\angle ABC + \angle ACB) = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle A) = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A,$$

$$\therefore \angle BDC = 180^\circ - (\angle DBC + \angle DCB) = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A, \text{ 故③正确;}$$

$\therefore \triangle AEF$ 的周长为:

$$AE + EF + AF = AE + ED + DF + AF = AE + EB + FC + AF = AB + AC, \text{ 故④正确;}$$

综上, 正确的有①③④.

二、填空题 (本大题共 30 题, 每小题 3 分, 满分 30 分)

9. 根据题意列不等式: x 与 y 的 3 倍的和不大 于 10: _____.

【答案】 $x + 3y \leq 10$

【解析】

【分析】 本题考查了列不等式, 根据 x 与 y 的 3 倍的和不大 于 10 得出 $x + 3y \leq 10$, 即可作答.

【详解】 解: $\because x$ 与 y 的 3 倍的和不大 于 10

$$\therefore x + 3y \leq 10.$$

10. 用弧长为 8π dm 的扇形做成一个圆锥的侧面, 这个圆锥的底面半径为 _____ dm.

【答案】 4

【解析】

【分析】 圆锥的侧面展开图的弧长等于圆锥的底面周长, 据此列方程求解即可.

【详解】 解: 设圆锥底面半径为 r dm,

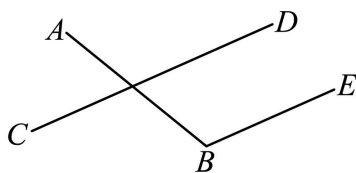
$$\text{则根据题意得, } 2\pi r = 8\pi,$$

$$\text{解得, } r = 4$$

$$\therefore \text{圆锥底面半径为 } 4 \text{ dm},$$

故答案为: 4.

11. 如图, $CD \parallel BE$, 如果 $\angle ABE = 120^\circ$, 那么直线 AB 、 CD 的夹角是 _____ 度.



【答案】 60

【解析】

【分析】 设 AB 与 CD 交于点 F，由 $CD \parallel BE$ ，利用“两直线平行，同旁内角互补”可求出 $\angle BFD$ 的度数，此题得解.

【详解】 设 AB 与 CD 交于点 F，如图，

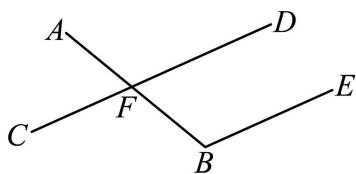
$\because CD \parallel BE$,

$\therefore \angle ABE + \angle BFD = 180^\circ$,

$\therefore \angle ABE = 120^\circ$,

$\therefore \angle BFD = 180^\circ - \angle ABE = 60^\circ$,

故填： 60.



【点睛】 此题考查平行线的性质，由平行证得同旁内角互补，由此求得夹角的度数.

12. 等腰三角形的两边长分别为 6cm , 13cm ，其周长为 _____ cm .

【答案】 32

【解析】

【分析】 题目给出等腰三角形有两条边长为 6cm 和 13cm ，而没有明确腰、底分别是多少，所以要进行讨论，还要应用三角形的三边关系验证能否组成三角形.

【详解】 解： 由题意知，应分两种情况：

①当腰长为 6cm 时，三角形三边长为 6， 6， 13，

$\because 6+6 < 13$,

$\therefore$ 不能构成三角形；

②当腰长为 13cm 时，三角形三边长为 6， 13， 13，

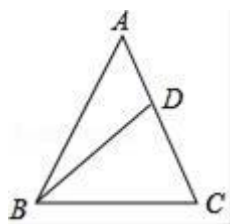
周长 $= 2 \times 13 + 6 = 32$ ，

故答案为 32.

【点睛】 本题考查了等腰三角形的性质和三角形的三边关系；已知没有明确腰和底边的题目一定要想到两

种情况，分类进行讨论，还应验证各种情况是否能构成三角形进行解答，这点非常重要，也是解题的关键.

13. 如图， $\triangle ABC$ 中 $AB=AC$ ， D 是 AC 上一点且 $BC=BD$ ，若 $\angle CBD=46^\circ$ ，则 $\angle A=$ _____ $^\circ$.



【答案】 46

【解析】

【分析】 根据等腰三角形的性质和三角形的内角和即可得到结论.

【详解】 $\because BC=BD$ ， $\angle CBD=46^\circ$ ，

$$\therefore \angle C = \angle BDC = \frac{1}{2} (180^\circ - 46^\circ) = 67^\circ,$$

$$\because AB=AC,$$

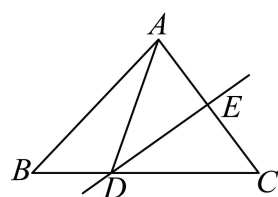
$$\therefore \angle ABC = \angle C = 67^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 46^\circ,$$

故答案为 46.

【点睛】 本题考查了等腰三角形的性质，解题的关键是利用等腰三角形的底角相等，外角的性质，内角和定理，列方程求解.

14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， DE 是 AC 的垂直平分线， $AE=5\text{cm}$ ， $\triangle ABD$ 的周长是 18cm ，则 $\triangle ABC$ 的周长是 _____ cm .



【答案】 28

【解析】

【分析】 根据线段垂直平分线上的点到线段两端点的距离相等可得 $AD=CD$ ， $AC=2AE$ ，然后等量代换得到 $\triangle ABD$ 的周长为 $AB+BC$ ，进而可得 $\triangle ABC$ 的周长.

【详解】 解： $\because DE$ 是 AC 的垂直平分线， $AE=5\text{cm}$ ，

$$\therefore AD=CD, \quad AC=2AE=2\times 5=10\text{cm},$$

$$\therefore \triangle ABD \text{ 的周长为: } AB+BD+AD=AB+BD+CD=AB+BC=18\text{cm},$$

$\therefore \triangle ABC$ 的周长为: $AB + BC + AC = 18 + 10 = 28\text{cm}$.

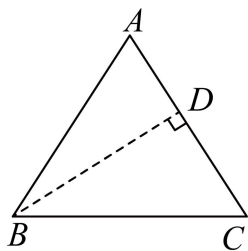
15. 已知等腰三角形一条腰上的高与另一条腰的夹角为 25° , 则该等腰三角形的顶角为_____.

【答案】 65° 或 115°

【解析】

【分析】 分为当等腰三角形为锐角三角形时和当等腰三角形为钝角三角形时两种情况, 分别画图进行讨论.

【详解】 解: 如图, 当等腰三角形为锐角三角形时,

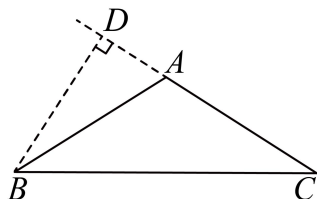


$\because BD \perp AC, \angle DBA = 25^\circ,$

$\therefore \angle BAD = 65^\circ,$

即 $\angle BAC = 65^\circ$.

如图, 当等腰三角形为钝角三角形时,



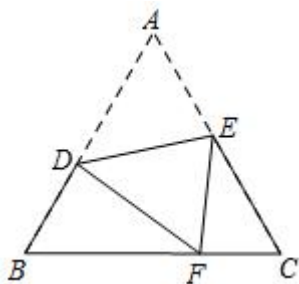
$\because BD \perp AC, \angle DBA = 25^\circ,$

$\therefore \angle BAD = 65^\circ,$

$\therefore \angle BAC = 180^\circ - \angle BAD = 115^\circ.$

综上, 该等腰三角形的顶角为 65° 或 115° .

16. 如图, 在等边三角形 ABC 中, 点 D 在边 AB 上, 点 E 在边 AC 上, 将 $\triangle ADE$ 折叠, 使点 A 落在 BC 边上的点 F 处, 则 $\angle BDF + \angle CEF =$ _____.



【答案】 120°

【解析】

【分析】由等边三角形的性质证得 $\angle ADE + \angle AED = 120^\circ$, 根据折叠性质及平角定义即可得出结论.

【详解】 $\because$ 三角形 ABC 是等边三角形,

$$\therefore \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE + \angle AED = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

由折叠性质得: $\angle ADE = \angle EDF, \angle AED = \angle DEF$,

$$\therefore \angle BDF + \angle CEF = (180^\circ - 2\angle ADE) + (180^\circ - 2\angle AED)$$

$$= 360^\circ - 2(\angle ADE + \angle AED)$$

$$= 360^\circ - 240^\circ$$

$$= 120^\circ,$$

故答案为: 120° .

【点睛】本题考查等边三角形的性质、三角形的内角和定理、折叠性质、平角定义, 熟练掌握等边三角形的性质和折叠性质是解答的关键.

17. 定义: 等腰三角形的顶角与其一个底角的度数的比值 k 称为这个等腰三角形的“特征值”. 若等腰 ABC 中, $\angle A = 80^\circ$, 则它的特征值 $k =$ _____.

【答案】 $\frac{8}{5}$ 或 $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】可知等腰三角形的两底角相等, 则可求得底角的度数. 从而可求解.

【详解】解: ①当 $\angle A$ 为顶角时, 等腰三角形两底角的度数为: $\frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ$

$$\therefore \text{特征值 } k = \frac{80^\circ}{50^\circ} = \frac{8}{5}$$

②当 $\angle A$ 为底角时, 顶角的度数为: $180^\circ - 80^\circ - 80^\circ = 20^\circ$

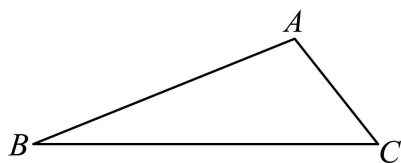
$$\therefore \text{特征值 } k = \frac{20^\circ}{80^\circ} = \frac{1}{4}$$

综上所述, 特征值 k 为 $\frac{8}{5}$ 或 $\frac{1}{4}$.

故答案为 $\frac{8}{5}$ 或 $\frac{1}{4}$.

【点睛】本题主要考查等腰三角形的性质, 熟记等腰三角形的性质是解题的关键, 要注意到本题中, 已知 $\angle A$ 的底数, 要进行判断是底角或顶角, 以免造成答案的遗漏.

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 20^\circ$, $\angle A = 105^\circ$, 点 P 在 $\triangle ABC$ 的三边上运动, 当 $\triangle PAC$ 为等腰三角形时, 顶角的度数是_____.



【答案】 105° 或 55° 或 70°

【解析】

【分析】 作出图形, 然后分点 P 在 AB 上与 BC 上两种情况讨论求解.

【详解】 解: ①如图 1,

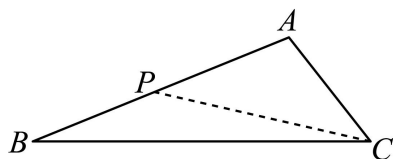


图1

点 P 在 AB 上时, $AP = AC$, 顶角为 $\angle A = 105^\circ$,

② $\because \angle B = 20^\circ$, $\angle A = 105^\circ$,

$\therefore \angle C = 180^\circ - 20^\circ - 105^\circ = 55^\circ$,

如图 2, 点 P 在 BC 上时, 若 $AC = PC$,

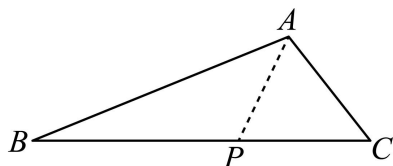


图2

顶角为 $\angle C = 55^\circ$,

如图 3, 若 $AC = AP$,

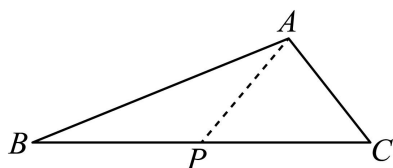


图3

则顶角为 $\angle CAP = 180^\circ - 2\angle C = 180^\circ - 2 \times 55^\circ = 70^\circ$,

综上所述, 顶角为 105° 或 55° 或 70° .

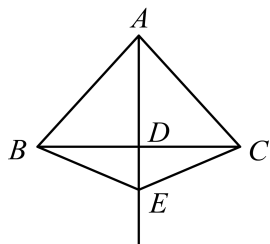
故答案为: 105° 或 55° 或 70° .

【点睛】 本题考查了等腰三角形的判定, 注意要分情况讨论求解.

三、简答题 (本大题共 7 题, 满分 46 分)

19. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在线段 BC 上, 点 E 在线段 AD 延长线上, 且 $EB = EC$, $\angle ABE = \angle ACE$,

求证: $AD \perp BC$.



解: $\because EB = EC$,

$\therefore \angle EBC = \angle ECB$ (),

$\because \angle ABE = \angle ACE$,

$\therefore \angle ABE - \angle EBC = \angle ACE - \angle ECB$.

即 $\angle ABC = \angle ACB$.

$\therefore AB = AC$ (),

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACE$ 中,

$$\therefore \begin{cases} AB = AC \\ EB = EC, \\ AE = AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACE$ (SSS).

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$ (),

$\because AB = AC$,

$\therefore AD \perp BC$ ().

【答案】 等边对等角, 等角对等边, 全等三角形的对应角相等, 等腰三角形三线合一

【解析】

【分析】 根据等腰三角形的判定和性质即可解答.

【详解】 解: $\because EB = EC$,

$\therefore \angle EBC = \angle ECB$ (等边对等角),

$\because \angle ABE = \angle ACE$,

$\therefore \angle ABE - \angle EBC = \angle ACE - \angle ECB$.

即 $\angle ABC = \angle ACB$.

$\therefore AB = AC$ (等角对等边),

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACE$ 中,

$$\therefore \begin{cases} AB = AC \\ EB = EC, \\ AE = AE \end{cases}$$

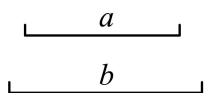
$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACE$ (SSS).

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$ (全等三角形的对应角相等),

$\therefore AB = AC$,

$\therefore AD \perp BC$ (等腰三角形三线合一).

20. 如图, 已知线段 a 、 b . 求作: $\triangle ABC$, 使 $AB = AC$, 且 $BC = a$, 高 $AD = b$.

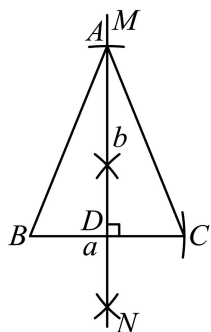


【答案】见解析

【解析】

【分析】作线段 $BC = a$, 作线段 BC 的垂直平分线 MN , 交 BC 于点 D , 在射线 DM 上截取线段 DA , 使得 $DA = b$, 连接 AB 、 AC , 即可得出结果.

【详解】解: 作线段 $BC = a$, 作线段 BC 的垂直平分线 MN , 交 BC 于点 D , 在射线 DM 上截取线段 DA , 使得 $DA = b$, 连接 AB 、 AC , 则 $\triangle ABC$ 即为所求



21. 从底面直径为 8dm 的圆柱形水桶中取出一块底面积为 9.42dm^2 且完全浸泡在水中的圆锥形钢材, 取出后水面下降 5cm . 求该圆锥形钢材的高 (π 取 3.14).

【答案】 8dm

【解析】

【分析】根据题意, 这个圆锥形钢材的体积就是下降 5cm 的水的体积, 由此根据圆柱的体积公式可以求出这个圆锥的体积, 再利用圆锥的体积公式即可求出这个圆锥的高.

【详解】解: $5\text{cm} = 0.5\text{dm}$

由题意得, $3.14 \times (8 \div 2)^2 \times 0.5 \div \left(\frac{1}{3} \times 9.42 \right) = 8\text{dm}$,

答：该圆锥形钢材的高 8dm .

22. 小普经营一家服装店，某次进了 100 件衬衫，花了 8000 元. 销售时先每件加价 20 元销售，在销售了若干件以后，剩余部分以每件亏损 5 元价格售完，现已知小普在此次经营中盈利大于 1000 元. 问：他加价销售的衬衫至少有多少件？

【答案】至少有 61 件

【解析】

【分析】先计算单件进价，设加价销售的衬衫有 x 件，则剩余降价销售的衬衫为 $(100-x)$ 件，根据“盈利大于 1000 元”，总销售额减去总成本大于 1000，列不等式求解即可.

【详解】解： $\because$ 100 件衬衫总进价 8000 元，

$\therefore$ 每件衬衫进价为 $8000 \div 100 = 80$ 元，

设加价销售的衬衫有 x 件，则剩余降价销售的衬衫为 $(100-x)$ 件，

加价销售单件售价为 $80 + 20 = 100$ 元，亏损销售单件售价为 $80 - 5 = 75$ 元，

根据题意得 $100x + 75(100-x) - 8000 > 1000$,

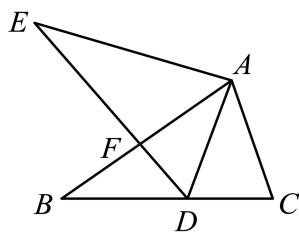
解得 $x > 60$,

因为 x 是衬衫件数，为正整数，

因此 x 的最小值为 61

即他加价销售的衬衫至少有 61 件.

23. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 是 BC 上一点，且 $BD = DA = AC$ ，把边 AB 绕着点 A 顺时针旋转一定角度得到 $\angle BAE$ ，连接 DE ，交 AB 于点 F .



(1) 若 $\angle B = 35^\circ$ ，求 $\angle C$ 的度数.

(2) 若 $\angle CAD = \angle BAE$ ，求证： DA 平分 $\angle CDE$.

【答案】 (1) $\angle C = 70^\circ$

(2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 由等腰三角形的性质 $\angle BAD = \angle B = 35^\circ$ ，由外角的性质可求解；

(2) 由SAS可证 $\triangle ABC \cong \triangle AED$ ，可得 $\angle C = \angle ADE$ ，可证 $\angle ADE = \angle ADC$ ，可得结论.

【小问1详解】

解： $\because AD = BD$ ， $\angle B = 35^\circ$ ，

$$\therefore \angle BAD = \angle B = 35^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle B + \angle BAD = 70^\circ,$$

$\because AD = AC$ ，

$$\therefore \angle C = \angle ADC = 70^\circ;$$

【小问2详解】

证明： $\because \angle CAD = \angle BAE$ ，

$$\therefore \angle CAB = \angle DAE,$$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AED$ 中，

$$\therefore \begin{cases} AC = AD \\ \angle CAB = \angle DAE, \\ AB = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle AED \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle C = \angle ADE,$$

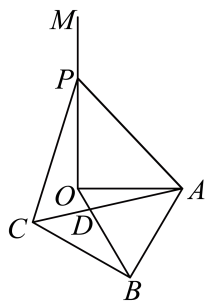
$\because \angle C = \angle ADC$ ，

$$\therefore \angle ADE = \angle ADC,$$

$\therefore DA$ 平分 $\angle CDE$.

【点睛】本题考查了旋转的性质，三角形外角的性质，等边对等角，全等三角形的判定和性质，掌握旋转的性质是本题的关键.

24. 如图， $\angle MOA = 90^\circ$ ， $\triangle OAB$ 是等边三角形，点 P 在射线 OM 上，连接 AP ，以 AP 为边作等边三角形 APC ，边 AC 与边 BO 相交于点 D ，连接 BC .



(1) 求证： $AB \perp BC$.

(2) 连接 OC ，当 $\triangle OBC$ 是等腰三角形时，求 $\angle ODC$ 的度数.

【答案】 (1) 见解析 (2) $\angle ODC$ 的度数为 75° 或 90°

【解析】

【分析】(1) 首先由等边三角形的性质得到 $\angle PAC = \angle OAB = 60^\circ$, $AP = AC$, $AO = AB$, 然后证明出 $\triangle PAO \cong \triangle CAB$ (SAS), 即可得到 $\angle ABC = \angle AOP = 90^\circ$;

(2) 首先求出 $\angle OBC = \angle ABC - \angle ABO = 30^\circ$ ，然后根据等腰三角形的定义分三种情况讨论求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because \triangle APC, \triangle OAB$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle PAC = \angle OAB = 60^\circ, \quad AP = AC, \quad AO = AB$$

$$\therefore \angle PAO = \angle CAB$$

$$\therefore \triangle PAO \cong \triangle CAB \text{ (SAS)}$$

$$\therefore \angle ABC = \angle AOP = 90^\circ$$

$$\therefore AB \perp BC;$$

【小问 2 详解】

解: $\because \triangle OAB$ 是等边三角形,

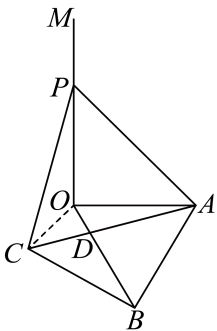
$$\therefore \angle ABO = 60^\circ, \quad AB = OB$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle OBC = \angle ABC - \angle ABO = 30^\circ$$

$\therefore \triangle OBC$ 是等腰三角形

$\therefore$ ①如图, 当 $BO = BC$ 时,

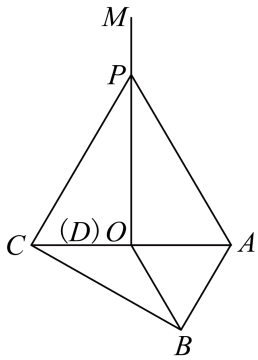


$$\therefore AB = CB$$

$$\therefore \angle BCA = \angle BAC = 45^\circ$$

$$\therefore \angle ODC = \angle BCD + \angle CBD = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ;$$

②如图, 当 $BO = CO$ 时,



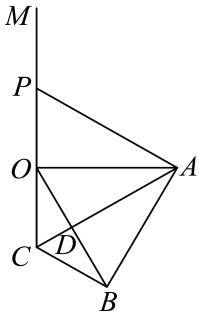
$$\therefore \angle OCB = \angle OBC = 30^\circ$$

$$\therefore \angle COB = 180^\circ - \angle OCB - \angle OBC = 120^\circ$$

$$\therefore \angle COB + \angle AOB = 180^\circ$$

$\therefore$ 点 O 在 AC 上，即点 O 和点 D 重合，不存在 $\angle ODC$ ，不符合题意；

③如图，当 $CO = CB$ 时，



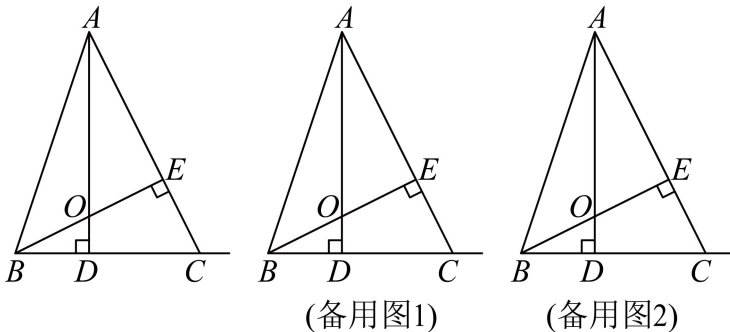
$$\therefore OA = AB$$

$$\therefore AC \text{ 垂直平分 } OB$$

$$\therefore \angle ODC = 90^\circ$$

综上， $\angle ODC$ 的度数为 75° 或 90° 。

25. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $BC = 5$ ，高 AD 、 BE 相交于点 O ， $BD = 2$ ，且 $AE = BE$ 。



(1) 请说明 $\triangle AOE \cong \triangle BCE$ 的理由；

(2) 动点 P 从点 O 出发，沿线段 OA 以每秒 1 个单位长度的速度向终点 A 运动，动点 Q 从点 B 出发沿射线 BC 以每秒 4 个单位长度的速度运动， P 、 Q 两点同时出发，当点 P 到达 A 点时， P 、 Q 两点同时停止运动。设

点 P 的运动时间为 t 秒, 求当 t 为何值时, $\triangle AOQ$ 的面积为 3.

(3) 在(2)的条件下, 点 F 是直线 AC 上的一点且 $CF = BO$. 当 t 为何值时, 以点 B 、 O 、 P 为顶点的三角形与以点 F 、 C 、 Q 为顶点的三角形全等? (请直接写出符合条件的 t 值).

【答案】(1) 见解析 (2) 当 t 为 $\frac{1}{5}$ 或 $\frac{4}{5}$ 时, $\triangle AOQ$ 的面积为 3

(3) $t = 1$ 或 $\frac{5}{3}$ 时, $\triangle BOP$ 与 $\triangle FCQ$ 全等

【解析】

【分析】本题考查三角形综合题、全等三角形的判定和性质、三角形的面积等知识,

(1) 首先推导出 $\angle EAO = \angle EBC$, 通过 ASA 即可证明 $\triangle AOE \cong \triangle BCE$;

(2) 分两种情形讨论求解即可①当点 Q 在线段 BD 上时, $QD = 2 - 4t$, ②当点 Q 在射线 DC 上时, $DQ = 4t - 2$ 时; 依据三角形面积计算公式解答即可;

(3) 分两种情形求解即可①如图 2 中, 当 $OP = CQ$ 时, $BOP \cong \triangle FCQ$. ②如图 3 中, 当 $OP = CQ$ 时, $\triangle BOP \cong \triangle FCQ$.

【小问 1 详解】

如图 1 中,

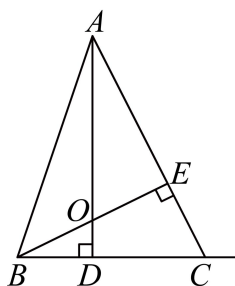


图1

$\because AD$ 是高,

$\therefore \angle ADC = 90^\circ$,

$\because BE$ 是高,

$\therefore \angle AEB = \angle BEC = 90^\circ$,

$\therefore \angle EAO + \angle ACD = 90^\circ$, $\angle EBC + \angle ECB = 90^\circ$,

$\therefore \angle EAO = \angle EBC$,

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle BCE$ 中,

$$\begin{cases} \angle EAO = \angle EBC \\ AE = BE \\ \angle AEO = \angle BEC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle BCE \text{ (ASA)},$$

【小问 2 详解】

解：由 (1) 知 $\triangle AOE \cong \triangle BCE$,

$$\therefore OA = BC = 5,$$

$$\because BD = 2,$$

$$\therefore CD = 3,$$

由题意 $OP = t, BQ = 4t$,

①当点 Q 在线段 BD 上时, $QD = 2 - 4t$,

$$\therefore S_{\triangle AOQ} = \frac{1}{2} OA \cdot QD = \frac{1}{2} \times 5 \times (2 - 4t) = 3,$$

$$\text{解得: } t = \frac{1}{5};$$

②当点 Q 在 BD 延长线上时, $DQ = 4t - 2$,

$$\therefore S_{\triangle AOQ} = \frac{1}{2} OA \cdot DQ = \frac{1}{2} \times 5 \times (4t - 2) = 3,$$

$$\text{解得: } t = \frac{4}{5},$$

综上, 当 t 为 $\frac{1}{5}$ 或 $\frac{4}{5}$ 时, $\triangle AOQ$ 的面积为 3;

【小问 3 详解】

存在.

①如图 2 中, 当 $OP = CQ$ 时,

$$\because OB = CF, \angle POB = \angle FCQ,$$

$$\therefore \triangle BOP \cong \triangle FCQ.$$

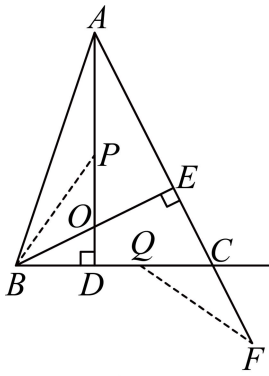


图2

$$\therefore CQ = OP,$$

$$\therefore 5 - 4t = t,$$

解得 $t = 1$,

②如图3中, 当 $OP = CQ$ 时,

$$\because OB = CF, \angle POB = \angle FCQ,$$

$$\therefore \triangle BOP \cong \triangle FCQ.$$

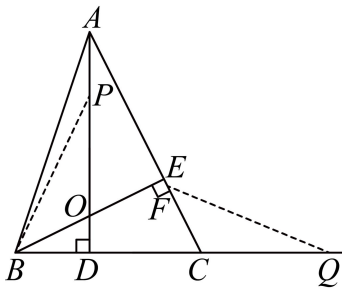


图3

$$\therefore CQ = OP,$$

$$\therefore 4t - 5 = t,$$

$$\text{解得 } t = \frac{5}{3}.$$

综上所述, $t = 1$ 或 $\frac{5}{3}$ 时, $\triangle BOP$ 与 $\triangle FCQ$ 全等.