

2025 学年第二学期七年级数学学科期末试卷

202606

完卷时间：90 分钟 总分：100 分

考生注意：

1. 本试卷含三个大题，共 26 题；
2. 答题时，考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答，在草稿纸、本试卷上答题一律无效；
3. 除第一、二大题外，其余各题如无特别说明，都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤；
4. 本试卷解答题不需要写理由.

一、选择题（本大题共 6 题，每题 3 分，满分 18 分）

1. 若 $a < b$ ，则下列结论不一定成立的是（ ）

A. $a - 1 < b - 1$

B. $2a < 2b$

C. $a^2 < b^2$

D. $-\frac{a}{3} > -\frac{b}{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据不等式的性质逐项分析即可.

【详解】解：A. $\because a < b$ ， $\therefore a - 1 < b - 1$ ，正确，故不符合题意；

B. $\because a < b$ ， $\therefore 2a < 2b$ ，正确，故不符合题意；

C. 当 $a = -2, b = -1$ 时，满足 $a < b$ ，但 $a^2 > b^2$ ，故错误，符合题意；

D. $\because a < b$ ， $\therefore -\frac{a}{3} > -\frac{b}{3}$ ，正确，故不符合题意；

故选 C.

【点睛】本题考查了不等式的性质：①把不等式的两边都加(或减去)同一个整式，不等号的方向不变；②不等式两边都乘(或除以)同一个正数，不等号的方向不变；③不等式两边都乘(或除以)同一个负数，不等号的方向改变.

2. 某不等式的解集是 $x > -2$ ，下列表述不正确的是（ ）

A. 0 是这个不等式的解.

B. -3 不是这个不等式的解.

C. 大于 -3 的数都是这个不等式的解.

D. 小于 -3 的数都不是这个不等式的解.

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了一元一次不等式的解的定义，不等式的解集是满足不等式的所有解的集合，使原不等式成立的数就是不等式的一个解，据此逐项分析求解即可.

【详解】解：A、 $\because$ 某不等式的解集是 $x > -2$,

$\therefore 0$ 是这个不等式的解，故 A 不符合题意；

B、 $\because$ 某不等式的解集是 $x > -2$,

$\therefore -3$ 不是这个不等式的解，故 B 不符合题意；

C、 $\because$ 某不等式的解集是 $x > -2$,

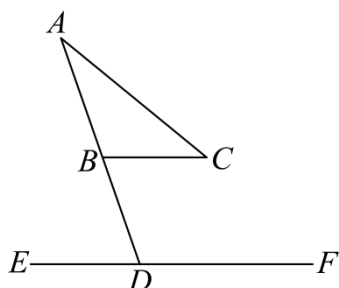
$\therefore$ 大于 -2 的数都是这个不等式的解，大于 -3 且小于等于 -2 的数不是这个不等式的解，故 C 符合题意；

D、 $\because$ 某不等式的解集是 $x > -2$,

$\therefore$ 小于 -3 的数都不是这个不等式的解，故 D 不符合题意.

故选：C

3. 唐朝李白的《行路难》有句诗“长风破浪会有时，直挂云帆济沧海.”如图是小明作的一个帆船模型抽象的几何图形，已知 $BC \parallel EF$ ， $\angle A = 30^\circ$. 若 $\angle ADE = 70^\circ$ ，则 $\angle C$ 的度数为 ()



A. 40°

B. 30°

C. 45°

D. 57°

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了平行线的性质，三角形的外角的性质，根据平行线的性质可得 $\angle CBD = \angle ADE = 70^\circ$ ，进而根据三角形的外角的性质可得 $\angle C = \angle CBD - \angle A$ ，即可求解.

【详解】解： $\because BC \parallel EF$,

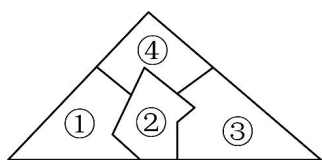
$\therefore \angle CBD = \angle ADE = 70^\circ$,

$\because \angle A = 30^\circ$,

$\therefore \angle C = \angle CBD - \angle A = 70^\circ - 30^\circ = 40^\circ$,

故选：A.

4. 有一块三角形玻璃在运输过程中，不小心碎成如图所示的四块，嘉淇想按原来的大小在玻璃店再订制一块，需要带的两块可以是 ()



- A. ①② B. ②③ C. ①③ D. ①④

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查全等三角形的判定定理，熟练掌握全等三角形的判定定理是解题的关键；因此此题可根据全等三角形的判定定理进行求解即可.

【详解】解：嘉淇想按原来的大小在玻璃店再订制一块，则需带①④两块玻璃，因为可根据“ASA”判定三角形全等；

故选 D.

5. 已知等腰三角形的周长为 12，一边长为 5，则它的腰长为（ ）

- A. 2 或 5 B. 5 C. 3.5 D. 5 或 3.5

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查等腰三角形的性质与三角形三边关系，需分腰长为 5 和底边长为 5 两种情况讨论，再验证是否符合三角形三边关系.

【详解】解：①当腰长为 5 时，

$\because$ 等腰三角形周长为 12，腰长为 5，

$\therefore$ 底边长 $= 12 - 5 \times 2 = 2$ ，

$\because 5 + 2 > 5$ ， $5 + 5 > 2$ ，满足三角形三边关系，

$\therefore$ 此情况成立，腰长为 5；

②当底边长为 5 时，

$\because$ 等腰三角形周长为 12，底边长为 5，

$\therefore$ 腰长 $= (12 - 5) \div 2 = 3.5$ ，

$\because 3.5 + 3.5 > 5$ ， $3.5 + 5 > 3.5$ ，满足三角形三边关系，

$\therefore$ 此情况成立，腰长为 3.5，

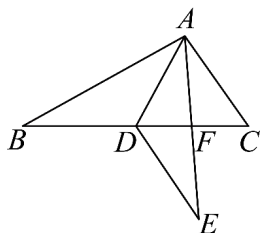
综上，它的腰长为 5 或 3.5，

故选：D.

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 是边 BC 的中点，将 $\triangle ABD$ 沿 AD 翻折，点 B 落在点 E 处， AE 交 CD 于点 F ，

$\triangle ADF$ 的面积恰好是 $\triangle ABC$ 面积的 $\frac{1}{4}$. 小丽在研究这个图形时得到以下两个结论: ① $\angle B = \angle CAE$;

② $AC = CD$. 那么下列说法中, 正确的是 ()



A. ①正确②错误

B. ①错误②正确

C. ①、②皆正确

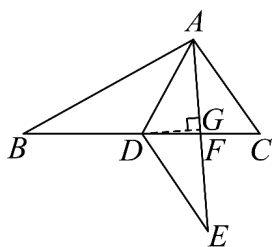
D. ①、②皆错误

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了折叠的性质, 三角形的面积, 全等三角形的性质和判定; 过点 D 作 $DG \perp AE$, 由 D 是边 BC 的中点, $\triangle ADF$ 的面积恰好是 $\triangle ABC$ 面积的 $\frac{1}{4}$ 可得 $DF = CF$, 由 $S_{\triangle DEF} = S_{\triangle ADF}$ 可得 $AF = EF$, 进而可证明 $\triangle AFC \cong \triangle EFD$ (SAS), 即可得出结论.

【详解】 解: 过点 D 作 $DG \perp AE$, 如图所示:



由折叠可得: $AB = AE$, $BD = DE$, $\angle B = \angle E$, $\angle BAD = \angle EAD$, $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ADE}$,

$\because D$ 是边 CB 的中点,

$$\therefore BD = CD, S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC},$$

$\because \triangle ADF$ 的面积恰好是 $\triangle ABC$ 面积的 $\frac{1}{4}$,

$$\therefore S_{\triangle AFC} = S_{\triangle ADF} = \frac{1}{2} S_{\triangle ADC} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore DF = CF = \frac{1}{2} DC,$$

$$\because S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore S_{\triangle DEF} = S_{\triangle ADE} - S_{\triangle ADF} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} - \frac{1}{4}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore S_{\triangle DEF} = S_{\triangle ADF},$$

$$\because DG \perp AE,$$

$$\therefore S_{\triangle ADF} = \frac{1}{2}AF \times DG, \quad S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2}EF \times DG,$$

$$\therefore AF = EF,$$

$\therefore$ 在 $\triangle AFC$ 与 $\triangle EFD$ 中

$$\begin{cases} AF = EF \\ \angle AFC = \angle DFE \\ FC = DF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AFC \cong \triangle EFD (\text{SAS}),$$

$$\therefore AC = DE, \quad \angle E = \angle CAE,$$

$$\text{又} \because BD = CD = DE, \quad \angle B = \angle E,$$

$$\therefore AC = DC, \quad \angle B = \angle CAE.$$

故①、②皆正确.

故选: C.

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 2 分, 满分 24 分)

7. 根据“x 的 3 倍与 8 的和不小于 x 的 4 倍”, 可列不等式为_____.

【答案】 $3x + 8 \geq 4x$

【解析】

【分析】 根据题意列不等式即可.

【详解】 解: 由题意, 可列不等式为 $3x + 8 \geq 4x$.

8. 不等式 $3x + 1 > 5x + 6$ 的最大整数解是_____.

【答案】

-3

【解析】

【分析】 按照解一元一次不等式的步骤求出不等式的解集, 再找出解集中的最大整数即可.

【详解】 解: $3x + 1 > 5x + 6$

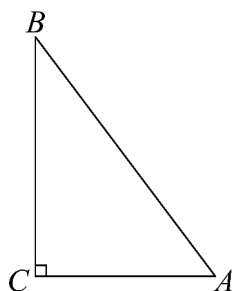
移项, 得 $3x - 5x > 6 - 1$

合并同类项, 得 $-2x > 5$

系数化为1，得 $x < -\frac{5}{2}$

则不等式的最大整数解为 -3 .

9. 如图， $BC \perp AC$ ， $AC = 6$ ， $BC = 8$ ， $AB = 10$ ，则点 A 到直线 BC 的距离是_____.



【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查了点到直线的距离的定义，求点 A 到直线 BC 的距离，就是过点 A 作直线 BC 的垂线，由 $BC \perp AC$ 知，垂线段 AC 的长度就表示点 A 到直线 BC 的距离.

【详解】 解：根据点到直线的距离的定义，点 A 到直线 BC 的距离就是线段 AC 的长，故答案为：6.

10. “相等的角是对顶角”的逆命题是_____命题（填“真”或“假”）.

【答案】 真

【解析】

【分析】 先写出原命题的逆命题，再判断真假.

【详解】 解：“相等的角是对顶角”的逆命题是对顶角相等，是真命题，故答案为：真.

【点睛】 本题考查了互逆命题的知识，两个命题中，如果第一个命题的条件是第二个命题的结论，而第一个命题的结论又是第二个命题的条件，那么这两个命题叫做互逆命题. 其中一个命题称为另一个命题的逆命题.

11. 已知一个三角形的三个内角的度数之比为 $1:3:4$ ，那么这个三角形是_____（填“锐角”“直角”或“钝角”）三角形.

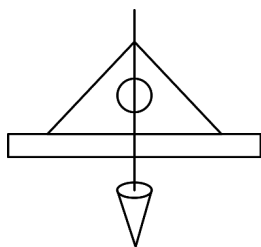
【答案】 直角

【解析】

【分析】 本题主要考查三角形的内角和定理，掌握此知识点是做题的关键. 根据三角形的内角和定理，结合角度比例计算各角的度数，即可得出答案.

【详解】解：设这个三角形的三个内角的度数分别为 x ， $3x$ ， $4x$ ，
 则根据三角形内角和定理，得 $x + 3x + 4x = 180$ ，
 解得 $x = 22.5$ ，
 $\therefore 3x = 67.5^\circ$ ， $4x = 90^\circ$ ．
 $\therefore$ 有一个角为 90° ，
 $\therefore$ 这个三角形是直角三角形．
 故答案为：直角．

12. 工匠们用如图这样的工具检测屋梁是否水平．把等腰三角尺的底边紧贴屋梁，当挂铅锤的线绳经过等腰三角尺底边的中点时，就可以确定挂铅锤的线绳与屋梁垂直（即屋梁是水平的），否则梁就不是水平的．这样测量用到的数学依据是_____．



【答案】等腰三角形三线合一

【解析】

【分析】根据题意可知三角尺为等腰三角形，线绳经过底边中点即为底边上的中线，利用等腰三角形“三线合一”的性质即可得出线绳与底边垂直．

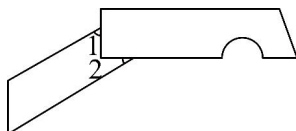
【详解】解：由题意可知，该三角尺为等腰三角形．

$\therefore$ 挂铅锤的线绳经过等腰三角尺底边的中点，

$\therefore$ 线绳所在的直线是等腰三角形底边上的中线．

根据等腰三角形“三线合一”的性质，等腰三角形底边上的中线与底边上的高互相重合，即挂铅锤的线绳与屋梁垂直．

13. 我们常用的折叠式小刀抽象成如图所示几何图形，刀柄外形左侧是一个长方形的一角，其中刀片的两条边缘线可看成两条平行的线段，转动刀片时会形成 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ ．若 $\angle 1 = 55^\circ$ ，则 $\angle 2 =$ _____．



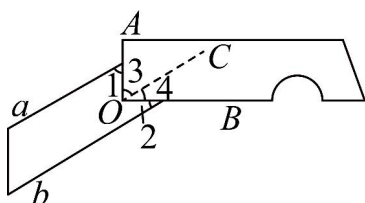
【答案】 35° ## 35 度

【解析】

【分析】 本题主要考查了平行线的判定与性质，正确作出辅助线是解题关键.

由题意可知， $a \parallel b$ ， $\angle AOB = 90^\circ$ ，过点 O 作 $OC \parallel a$ ，根据“两直线平行，内错角相等”可得 $\angle 3 = \angle 1 = 55^\circ$ ，进而可得 $\angle 4 = 35^\circ$ ，再证明 $OC \parallel b$ ，然后由“两直线平行，内错角相等”即可获得答案.

【详解】 解：如下图，由题意可知， $a \parallel b$ ， $\angle AOB = 90^\circ$ ，



过点 O 作 $OC \parallel a$ ，

则 $\angle 3 = \angle 1 = 55^\circ$ ，

$\therefore \angle 4 = \angle AOB - \angle 3 = 35^\circ$ ，

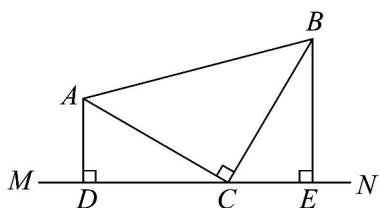
$\therefore OC \parallel a$ ， $a \parallel b$ ，

$\therefore OC \parallel b$ ，

$\therefore \angle 2 = \angle 4 = 35^\circ$.

故答案为： 35° .

14. 如图，在 $\triangle ACB$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ，点 C 在直线 MN 上， $AD \perp MN$ 于 D ， $BE \perp MN$ 于 E ， $AD = 3$ ， $DE = 7$ ，则 $BE =$ _____.



【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查了等腰三角形的性质，全等三角形的判定和性质，熟练掌握知识点的应用及作辅助线，构造全等三角形是解题的关键.

首先证明 $\angle ADC = \angle BEC = 90^\circ$ ， $\angle DAC = \angle BCE$ ，利用“AAS”证明 $\triangle ADC \cong \triangle CEB$ 即可；由全等三角形的性质可得 $AD = CE = 3$ ， $CD = BE$ ，再结合 $DE = 7$ 求解即可；

【详解】解：∵ $AD \perp DE, BE \perp DE$,

$$\therefore \angle ADC = \angle BEC = 90^\circ,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD + \angle BCE = 90^\circ, \angle DAC + \angle ACD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle BCE,$$

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle CEB$ 中,

$$\begin{cases} \angle CDA = \angle BEC \\ \angle DAC = \angle ECB, \\ AC = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle CEB (\text{AAS}),$$

$$\therefore AD = CE = 3, CD = BE,$$

$$\because DC + CE = DE,$$

$$\therefore BE = CD = DE - CE = 7 - 3 = 4;$$

故答案为：4；

15. 在 $\triangle ABC$ 中，已知： $AB > BC > CA$ ，用 “>” 连接 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 应为_____.

【答案】 $\angle C > \angle A > \angle B$

【解析】

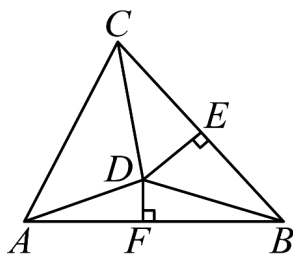
【分析】 本题考查三角形的边角关系，利用三角形中大边对大角的性质，确定各边对应的对角，即可比较三个角的大小.

【详解】解：在任意三角形中，大边对大角，在 $\triangle ABC$ 中，边 AB 的对角为 $\angle C$ ，边 BC 的对角为 $\angle A$ ，边 CA 的对角为 $\angle B$ ，

$$\because AB > BC > CA,$$

$$\therefore \angle C > \angle A > \angle B.$$

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， DE, DF 分别是 BC, AB 边的垂直平分线，连接 AD, BD, CD ，若 $\angle ACB = 70^\circ$ ，则 $\angle BAD =$ _____°.



【答案】 20

【解析】

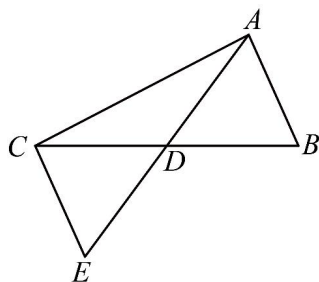
【分析】 本题考查线段垂直平分线的性质，关键是掌握线段垂直平分线上任意一点，到线段两端点的距离相等.

由线段垂直平分线的性质推出 $CD = BD$ ， $AD = BD$ ， 由等腰三角形的性质得到 $\angle CAD = \angle ACD$ ， $\angle DBC = \angle BCD$ ， $\angle BAD = \angle DBA$ ， 求出 $\angle CAD + \angle DBC = \angle ACB = 70^\circ$ ， 由三角形内角和定理求出 $\angle BAD + \angle DBA = 40^\circ$ ， 得到 $\angle BAD = \frac{1}{2} \times 40^\circ = 20^\circ$.

【详解】 解： $\because DE$ ， DF 分别是 BC ， AB 边的垂直平分线，
 $\therefore CD = BD$ ， $AD = BD$ ，
 $\therefore CD = AD$ ，
 $\therefore \angle CAD = \angle ACD$ ， $\angle DBC = \angle BCD$ ， $\angle BAD = \angle DBA$ ，
 $\therefore \angle CAD + \angle DBC = \angle ACD + \angle BCD = \angle ACB = 70^\circ$ ，
 $\therefore \angle BAD + \angle DBA = 180^\circ - \angle ACB - (\angle CAD + \angle DBC) = 40^\circ$ ，
 $\therefore \angle BAD = \frac{1}{2} \times 40^\circ = 20^\circ$.

故答案为： 20

17. 新定义：我们把两个面积相等但不全等的三角形叫做偏等积三角形. 如图， $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 为偏等积三角形， $AB = 2$ ， $AC = 4$ ， 且线段 AD 的长度为正整数. 过点 C 作 $CE \parallel AB$ 交 AD 的延长线于点 E ， 则 AD 的长为_____.



【答案】 2

【解析】

【分析】先证 $\triangle ADB \cong \triangle EDC$ ，得 $AB = CE = 2, AD = DE$ ，再根据在 $\triangle ACE$ 中利用三角形三边关系求出 AD 的取值范围，结合 AD 为正整数即可求解。

【详解】解： $\because \triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 为偏等积三角形，

$$\therefore BD = CD,$$

$$QE \parallel AB,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle E,$$

$$\because \angle ADB = \angle EDC,$$

$$\therefore \triangle ADB \cong \triangle EDC (ASA),$$

$$\therefore AB = CE = 2, AD = DE,$$

$$\therefore AE = AD + ED = 2AD,$$

在 $\triangle ACE$ 中， $AC - CE < AE < AC + CE$ ，即 $4 - 2 < 2AD < 4 + 2$ ，

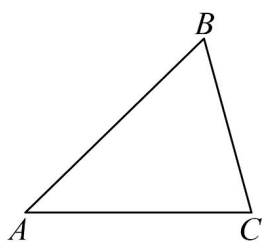
$$\therefore 2 < 2AD < 6,$$

$$\therefore 1 < AD < 3,$$

$\because$ 线段 AD 的长度为正整数，

$$\therefore AD = 2.$$

18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 80^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) 得到 $\triangle ADE$ ，其中点 B 与点 D 对应，点 C 与点 E 对应，若点 C 恰好落在 $\triangle ADE$ 的边上，则 α 的度数是_____。



【答案】

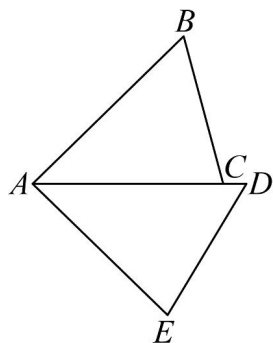
20° 或 40°

【解析】

【分析】根据三角形内角和定理可以求出 $\angle BAC = 40^\circ$ ，由旋转的性质可得：当点 C 在 AD 边上时， $\alpha = 40^\circ$ ；当点 C 在 DE 边上时，根据旋转的性质可知 $AC = AE$ ，根据等边对等角可知 $\angle AEC = \angle ACE = 80^\circ$ ，根据三角形内角和定理即可求出 $\alpha = 20^\circ$ 。

【详解】解：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 80^\circ$ ，
 $\angle BAC = 180^\circ - \angle B - \angle ACB = 180^\circ - 60^\circ - 80^\circ = 40^\circ$ ，

如下图所示，当点 C 在 AD 边上时， $\alpha = \angle BAC = 40^\circ$ ；



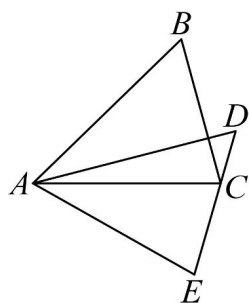
如下图所示，当点 C 在 DE 边上时，

由旋转可知 $AC = AE$ ， $\angle AEC = \angle ACB = 80^\circ$ ，

$\therefore \angle AEC = \angle ACE = 80^\circ$ ，

$\therefore \angle EAC = 180^\circ - \angle AEC - \angle ACE = 180^\circ - 80^\circ - 80^\circ = 20^\circ$ ，

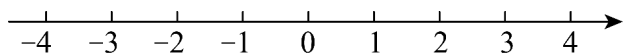
$\therefore \alpha = 20^\circ$ ；



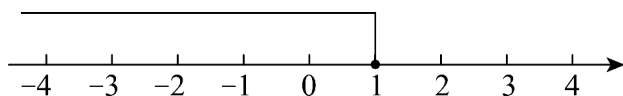
综上所述， $\alpha = 20^\circ$ 或 40° 。

三、解答题（本大题共 8 题，满分 58 分）

19. 解不等式： $2(2x+1)-3(1-x) \leq 6$ ，并把它解集在数轴上表示出来。



【答案】 $x \leq 1$ ，将解集表示在数轴上如图所示：



【解析】

【分析】 根据不等式的性质解不等式，然后将解集表示在数轴上即可，注意端点是实心圆点。

【详解】 解：去括号，得 $4x + 2 - 3 + 3x \leq 6$

移项、合并同类项，得 $7x \leq 7$

系数化为 1，得 $x \leq 1$

即不等式的解集为 $x \leq 1$.

图略

20. 求不等式组:
$$\begin{cases} 2x - 4 < 3x - 1 & \text{①} \\ \frac{2x + 2}{3} \geq \frac{3x}{2} - 1 & \text{②} \end{cases}$$
 的所有整数解.

【答案】 $-2, -1, 0, 1, 2$

【解析】

【分析】 先求得每个不等式的解集, 得到它们的公共部分即为该不等式组的解集, 进而可得所有整数解.

【详解】 解: 解不等式①, 得 $x > -3$,

解不等式②, 得 $x \leq 2$,

$\therefore$ 该不等式组的解集为 $-3 < x \leq 2$,

故该不等式组的整数解为 $-2, -1, 0, 1, 2$

21. 我市为方便市民绿色出行, 推出共享单车服务. 图 1 是某共享单车的实物图, 图 2 为示意图, 其中 $AB \parallel$ 地面 l , $CD \parallel$ 地面 l , $AM \parallel CB$. 若 $\angle BCD = 60^\circ$, $\angle MAC = 70^\circ$, 求 $\angle BAC$ 的度数.

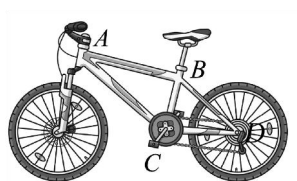


图1

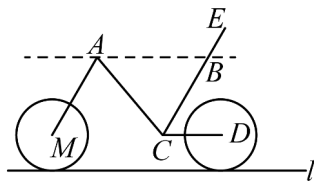


图2

【答案】 50°

【解析】

【分析】 根据平行线的性质求解即可.

【详解】 解: $\because AB \parallel$ 地面 l , $CD \parallel$ 地面 l ,

$\therefore AB \parallel CD$,

$\therefore \angle ABC = \angle BCD = 60^\circ$,

$\because AM \parallel CB$,

$\therefore \angle BAM + \angle ABC = 180^\circ$,

$\therefore \angle BAM = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$,

$\because \angle MAC = 70^\circ$,

$\therefore \angle BAC = \angle BAM - \angle MAC = 120^\circ - 70^\circ = 50^\circ$

22. 有一数学兴趣小组在思考“过直线外一点 P 作已知直线 l 的垂线”这一问题时, 画出了如图 1 的示意图.

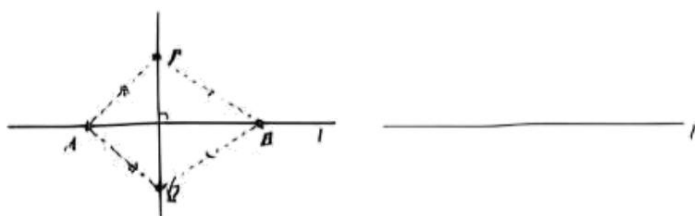
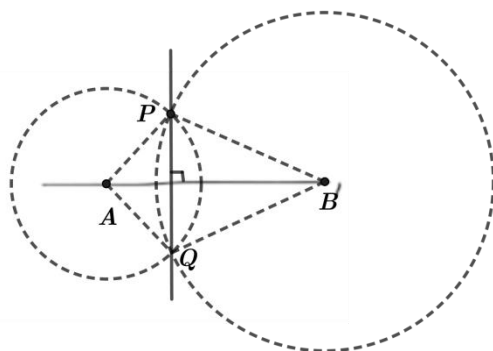


图 1

- (1) 根据所画的示意图，请你用尺规作图过直线外一点 P 作直线 l 的垂线。（保留作图痕迹，不写作法）
- (2) 证明该作法的正确性.

【答案】(1) 如图，直线 PQ 即为所求：



(2) 证明：由作图过程，得 $AP = AQ$ ， $BP = BQ$ ，

$\therefore$ 点 A 、点 B 都在线段 PQ 的垂直平分线上，

$\therefore$ 直线 l 垂直平分 PQ ，即直线 PQ 是直线 l 的垂线.

【解析】

【分析】(1) 在直线 l 上任意取点 A 、点 B ，以点 A 为圆心， AP 长为半径画圆，再以点 B 为圆心， BP 长为半径画圆，两圆相交于点 P 、点 Q ，则直线 PQ 即为所求.

(2) 利用线段垂直平分线的判定可证得结论.

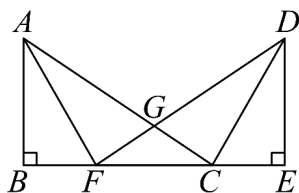
【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

略

23. 如图，在同一直线上有四个点 B 、 F 、 C 、 E ，点 A 、 D 在直线 BC 同一侧，如果 $AB \perp BC$ 垂足为 B ， $DE \perp BC$ 垂足为 E ，且 $AB = DE$ ， $BF = CE$ ．连接 AC 、 DF 相交于点 G .



(1) 求证: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$;

(2) 求证: $AG = DG$.

【答案】 (1) 证明: $\because AB \perp BC$ 垂足为 B , $DE \perp BC$ 垂足为 E ,

$$\therefore \angle B = \angle E = 90^\circ,$$

$$\because BF = CE,$$

$$\therefore BF + CF = CE + CF,$$

$$\therefore BC = EF,$$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中,

$$\begin{cases} AB = DE \\ \angle B = \angle E = 90^\circ, \\ BC = EF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF (SAS),$$

(2) 证明: $\because \triangle ABC \cong \triangle DEF$,

$$\therefore AC = DF, \angle ACB = \angle DFE, \text{ 即 } \angle GCF = \angle GFC,$$

$$\therefore GF = GC,$$

$$\therefore AC - CG = DF - FG, \text{ 即 } AG = DG.$$

【解析】

【分析】 (1) 先证明 $\angle B = \angle E = 90^\circ$, $BC = EF$, 再利用 SAS 证明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 即可;

(2) 由全等三角形的性质可得 $AC = DF$, $\angle GCF = \angle GFC$, 根据等角对等边得到 $AG = DG$, 即可得证.

【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

略

24. 已知: 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 AB 边上的中点, $DE \perp DF$, 垂足为 D , DE 与 AC 交于点 E , DF 与 BC 交于点 F , 过点 A 作 $AG \parallel BC$ 与 FD 的延长线交于点 G .

$$\begin{cases} GD = FD \\ \angle EDF = \angle EDG = 90^\circ \\ DE = DE \end{cases}$$

$\therefore \triangle EDG \cong \triangle EDF (SAS)$

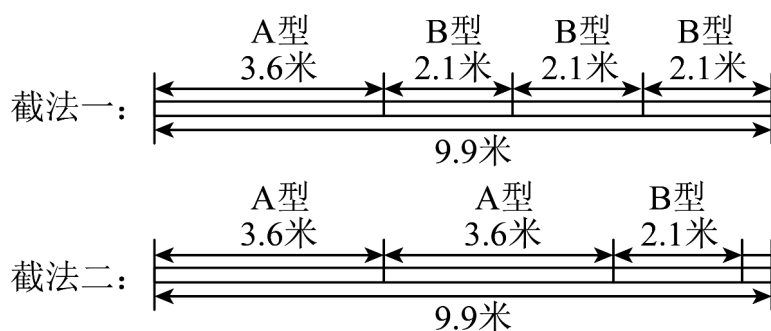
$\therefore EF = EG = 5$

【点睛】 本题考查了全等三角形的判定与性质；解题的关键是熟练掌握全等三角形的判定方法：

SAS、SSS、ASA、AAS、HL .

25. 自来水公司有一种长度为9.9 m 的标准管道，根据施工要求，需按如图所示的两种截法，截得长度分别为3.6 m 和2.1m 的 A 型管道和 B 型管道.

某小区铺设自来水管道路，需要 A 型管道至少 160 根，B 型管道至少 178 根，现有标准管道 100 根，设按截法一的标准管道为 x 根.



(1) 根据题意，完成以下表格：

	截法一	截法二
A 型管道(根)	x	$2(100-x)$
B 型管道(根)	_____	_____

(2) 若把 100 根标准管道按以上两种截法来分，共有哪几种截取方案？

【答案】 (1) $3x$, $(100-x)$

(2) 共有两种截取方案：方案一：按截法一截 39 根标准管道，按截法二截 61 根标准管道；方案二：按截法一截 40 根标准管道，按截法二截 60 根标准管道

【解析】

【分析】(1) 根据题意，按截法一的标准管道为 x 根，可截得 B 型管道 $3x$ 根，又标准管道按截法二为 $(100-x)$

根, 结合图形可得 B 型管道 $(100-x)$ (根);

(2) 根据需要 A 型 160 根, B 型管道 178 根, 列出不等式, 解不等式组即可.

【小问 1 详解】

解: 一根长度为 9.9 m 的标准管道, 按照截法一, 可截得 1 根 A 型管道, 3 根 B 型管道, 按照截法二, 可截得 2 根 A 型管道, 1 根 B 型管道,

故按截法一的标准管道为 x 根, 可截得 B 型管道 $3x$ 根, 标准管道按截法二为 $(100-x)$ 根, 则可截得 B 型管道 $(100-x)$ 根;

【小问 2 详解】

解: 由题意, 得
$$\begin{cases} x + 2(100-x) \geq 160 \text{ ①} \\ 3x + (100-x) \geq 178 \text{ ②} \end{cases},$$

由①得: $x \leq 40$

由②得: $x \geq 39$.

$\therefore 39 \leq x \leq 40$

$\because x$ 取整数,

$\therefore x = 39, 40$

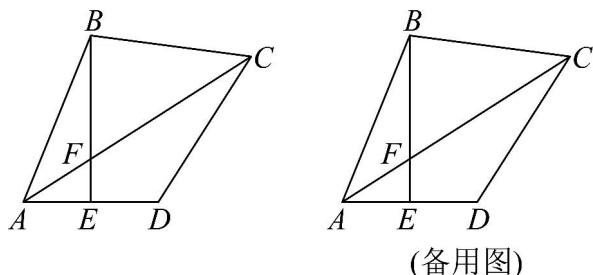
答: 共有两种截取方案:

方案一: 按截法一截 39 根标准管道, 按截法二截 61 根标准管道;

方案二: 按截法一截 40 根标准管道, 按截法二截 60 根标准管道.

26. 数学是一门充满乐趣、奥妙、又极具探索性的学科. 几何图形千变万化, 从特殊情形入手, 大胆猜想, 再到一般情况小心求证, 便能一步步揭开其中的奥秘. 下面是一道探索几何图形中的角与角、线段与线段之间的数量关系的例子:

如图, 已知在四边形 $ABCD$ 中, $AB = BC = CD$, $\angle BCD = 60^\circ$, $\angle ABC = \alpha$ ($60^\circ < \alpha < 180^\circ$), E 为 AD 中点, 连接 AC , BE 交于点 F .



(1) 当 $\alpha = 100^\circ$ 时, $\angle BAC =$ _____, $\angle ABF =$ _____;

(2) 当 α 的大小改变时, $\angle BFC$ 的度数是否发生改变? 若发生改变, 试求出 $\angle BFC$ 的变化范围, 若不变, 试求出 $\angle BFC$ 的度数;

(3) 试猜想 AF , BF , CF 之间的数量关系, 并进行证明.

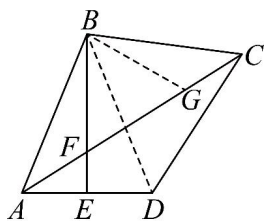
【答案】(1) 40° , 20°

(2) $\angle BFC$ 的度数不变, $\angle BFC$ 的度数为 60°

(3)

$$AF + BF = CF,$$

证明: 如图, 作 $\angle FBG = 60^\circ$, BG 交 AC 于点 G ,



$$\because \angle BFC = 60^\circ, \angle FBG = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle BFG$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle BGF = 60^\circ, BF = GF,$$

$$\therefore \angle BGC = \angle BFA = 120^\circ,$$

$$\because AB = BC,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle BCA,$$

在 $\triangle AFB$ 和 $\triangle CGB$ 中,

$$\begin{cases} \angle BAF = \angle BCG \\ \angle BFA = \angle BGC \\ AB = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AFB \cong \triangle CGB (\text{AAS}),$$

$$\therefore AF = GC,$$

$$\text{又} \because CG + GF = CF, BF = GF,$$

$$\therefore AF + BF = CF.$$

【解析】

【分析】(1) 根据等腰三角形的性质即可求出 $\angle BAC$ 的度数; 连接 BD , 证明 $\triangle BCD$ 是等边三角形得到 $BD = CD = BC = AB$, $\angle CBD = 60^\circ$, 利用三线合一即可求出 $\angle ABF$ 的度数;

(2) 连接 BD , 求出 $\triangle BCD$ 是等边三角形, 分别表示出 $\angle ABE$ 、 $\angle BAC$, 即可求解;

(3) 如图, 作 $\angle FBG = 60^\circ$, BG 交 AC 于点 G , 求出 $\triangle BFG$ 是等边三角形, 再证明 $\triangle AFB \cong \triangle CGB$, 从而得出 AF 、 BF 、 CF 之间的数量关系.

【小问 1 详解】

解: $\because AB = BC$, $\angle ABC = \alpha = 100^\circ$,
 $\therefore \angle BAC = \angle BCA = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 100^\circ) = 40^\circ$,

如图, 连接 BD ,

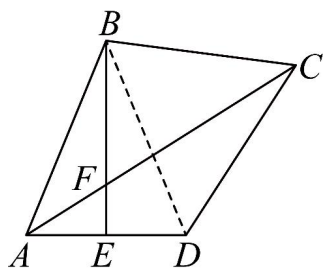
$\because BC = CD$, $\angle BCD = 60^\circ$,

$\therefore \triangle BCD$ 是等边三角形,

$\therefore BD = CD = BC = AB$, $\angle CBD = 60^\circ$,

又 $\because E$ 为 AD 中点,

$\therefore \angle ABF = \angle EBD = \frac{1}{2} \times (100^\circ - 60^\circ) = 20^\circ$;



【小问 2 详解】

解: 由 (1) 知 $AB = BD = CD = BC$, $\angle CBD = 60^\circ$,

又 $\because E$ 为 AD 中点,

$\therefore \angle ABE = \angle EBD = \frac{1}{2} (\alpha - 60^\circ) = \frac{1}{2} \alpha - 30^\circ$,

$\because AB = BC$,

$\therefore \angle BAC = \angle BCA = \frac{1}{2} (180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{1}{2} \alpha$,

$\therefore \angle BFC = \angle ABE + \angle BAC = \frac{1}{2} \alpha - 30^\circ + 90^\circ - \frac{1}{2} \alpha = 60^\circ$,

故 $\angle BFC$ 的度数不变, $\angle BFC$ 的度数为 60° ;

【小问 3 详解】

略