

2025 学年第二学期期末学情调研

初一数学试卷

(满分 100 分, 考试时间 90 分钟)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 25 题; 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题 (本大题共 8 题, 每题 3 分, 满分 24 分)

【下列各题的四个选项中, 有且只有一个选项是正确的, 选择正确的选项并填涂在答题纸的相应位置上.】

1. 下列数中是不等式 $2x - 1 > 3$ 的解的是 ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【答案】D

【解析】

【详解】解: $2x - 1 > 3$

$$2x > 3 + 1,$$

$$2x > 4,$$

$$\text{解得 } x > 2$$

选项中只有 $3 > 2$, 故 D 符合题意.

2. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\angle A = 90^\circ$, 则 $\triangle ABC$ 是 ()

A. 锐角三角形 B. 直角三角形 C. 钝角三角形 D. 以上三种情况都有可能

【答案】B

【解析】

【分析】根据三角形的分类定义判断即可.

【详解】解: $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

3. 现有长度为 2 cm、3 cm、 a cm 的三根木条, 三根木条首尾相接, 能组成三角形. a 的大小可以是 ()

A. 1 B. 4 C. 5 D. 6

【答案】B

【解析】

【分析】根据三角形三边关系：任意两边之差小于第三边，任意两边之和大于第三边求解即可.

【详解】解： $\because$ 已知三角形的两边长分别为 $2cm$ 和 $3cm$ ，第三边长为 acm

$$\therefore 3-2 < a < 3+2 \text{ 即 } 1 < a < 5$$

对比选项，只有 $a=4$ 满足该范围 .

4. 下列有关不等式的解法中，错误的是（ ）

A. $x-2 < 0$ ，两边同加 2，得 $x < 2$

B. $3x \geq -15$ ，两边同除以 3，得 $x \geq -5$

C. $-x \geq -2$ ，两边同乘 -1 ，得 $x \leq 2$

D. $-4x \leq -16$ ，两边同除以 -4 ，得 $x \leq 4$

【答案】D

【解析】

【分析】根据不等式性质逐一判断各选项解法即可找出错误项，不等式基本性质为：不等式两边加减同一个数，不等号方向不变；乘除同一个正数，不等号方向不变；乘除同一个负数，不等号方向改变.

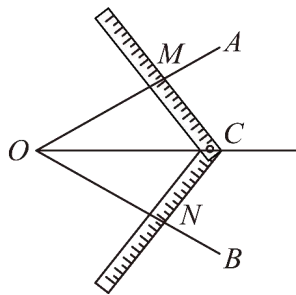
【详解】解：选项 A: $x-2 < 0$ ，两边同加 2，不等号方向不变，得 $x < 2$ ，解法正确，不符合题意；

选项 B: $3x \geq -15$ ，两边同除以正数 3，不等号方向不变，得 $x \geq -5$ ，解法正确，不符合题意；

选项 C: $-x \geq -2$ ，两边同乘 -1 ，不等号方向改变，得 $x \leq 2$ ，解法正确，不符合题意；

选项 D: $-4x \leq -16$ ，两边同除以 -4 ，不等号方向需要改变，正确结果应为 $x \geq 4$ ，题中解法未改变不等号方向，得到 $x \leq 4$ ，解法错误，符合题意.

5. 工人师傅常用角尺平分一个任意角. 做法如下：如图， $\angle AOB$ 是一个任意角，在边 OA ， OB 上分别取 $OM=ON$ ，移动角尺，使角尺两边相同的刻度分别与点 M ， N 重合，即 $CM=CN$ ，过角尺顶点 C 的射线 OC 便是 $\angle AOB$ 的平分线，这种做法的依据是（ ）



A. AAS

B. SAS

C. SSS

D. ASA

【答案】C

【解析】

【分析】 本题主要考查了全等三角形的判定，由作图过程可得 $MO = NO$ ， $NC = MC$ ，再加上公共边 $CO = CO$ 可利用 SSS 定理判定 $\triangle MOC \cong \triangle NOC$ 。

【详解】 解：在 $\triangle ONC$ 和 $\triangle OMC$ 中

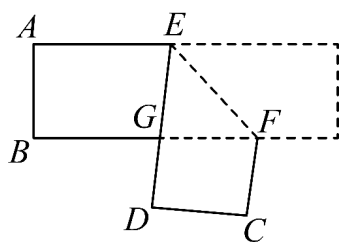
$$\begin{cases} MO = NO \\ MC = NC, \\ OC = OC \end{cases}$$

$\therefore \triangle MOC \cong \triangle NOC$ (SSS),

$\therefore \angle BOC = \angle AOC$,

故选：C.

6. 如图，把一张两边分别平行的纸片沿着 EF 折叠， ED 交 BF 于点 G ，如果 $\angle EFB = 50^\circ$ ，那么 $\angle EGF$ 的度数是（ ）



A. 60°

B. 75°

C. 80°

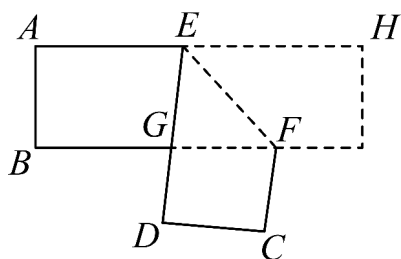
D. 100°

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据题意得到 $\angle EFB = \angle HEF = 50^\circ$ ，由于折叠得到 $\angle HEF = \angle FEG = 50^\circ$ ，即可求出 $\angle AEG = 80^\circ$ ，即可得到答案.

【详解】 解：如图



$\because$ 纸片两边分别平行,

$\therefore \angle EFB = \angle HEF = 50^\circ$,

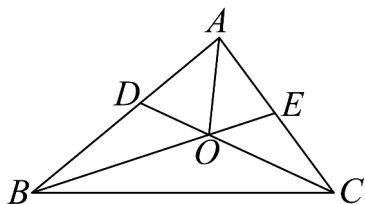
$\because$ 沿着 EF 折叠,

$$\therefore \angle HEF = \angle FEG = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle AEG = 180^\circ - \angle FEG - \angle HEF = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle EGF = \angle AEG = 80^\circ.$$

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， BE 、 CD 相交于点 O ， OA 平分 $\angle DOE$ ．可以作为假命题“相等的角是对顶角”的反例是（ ）



A. $\angle AOB > \angle DOB$

B. $\angle DOB = \angle EOC$

C. $\angle AOC > \angle EOC$

D. $\angle AOD = \angle AOE$

【答案】D

【解析】

【分析】要说明命题“相等的角是对顶角”是假命题，需要举出一个反例，即找到两个角相等，但它们不是对顶角；根据角平分线的定义可得 $\angle AOD = \angle AOE$ ，这两个角相等但不是对顶角，符合反例的要求．

【详解】解： $\because OA$ 平分 $\angle DOE$ ，

$$\therefore \angle AOD = \angle AOE;$$

又 $\because \angle AOD$ 与 $\angle AOE$ 有公共边 OA ，它们不是对顶角，

$\therefore \angle AOD = \angle AOE$ 可以作为假命题“相等的角是对顶角”的反例；

对于B选项， $\angle DOB$ 与 $\angle EOC$ 是对顶角，不能作为反例；

对于A、C选项，角不相等，不满足命题的题设．

8. 规定：在一个三角形中，如果一个内角是另一个内角的2倍，那么这样的三角形称为“倍角三角形”．如果 $\triangle ABC$ 是“倍角三角形”，且 $\angle A = 30^\circ$ ，那么 $\angle B$ 的度数不可能是（ ）

A. 15°

B. 60°

C. 75°

D. 100°

【答案】C

【解析】

【分析】根据“倍角三角形”的定义，结合三角形内角和为 180° ，逐个验证选项即可得出答案．

【详解】解：已知 $\angle A = 30^\circ$ ，由三角形内角和得 $\angle B + \angle C = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ ，逐个验证选项：

A、若 $\angle B = 15^\circ$ ，则 $\angle C = 180^\circ - 30^\circ - 15^\circ = 135^\circ$ ， $\therefore \angle A = 30^\circ = 2\angle B$ ，符合倍角三角形定义，因此A可能，排除；

B、若 $\angle B = 60^\circ$ ，则 $\angle C = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ$ ， $\because \angle B = 60^\circ = 2\angle A$ ，符合倍角三角形定义，因此 B 可能，排除；

C、若 $\angle B = 75^\circ$ ，则 $\angle C = 180^\circ - 30^\circ - 75^\circ = 75^\circ$ ，验证倍角关系： $30^\circ \times 2 = 60^\circ$ ，三角形中不存在 60° ； $75^\circ \times 2 = 150^\circ$ ，三角形中不存在 150° ，没有满足条件的倍角关系，因此 $\angle B = 75^\circ$ 不可能；

D、若 $\angle B = 100^\circ$ ，则 $\angle C = 180^\circ - 30^\circ - 100^\circ = 50^\circ$ ， $\because \angle B = 100^\circ = 2\angle C$ ，符合倍角三角形定义，因此 D 可能，排除.

二、填空题 (本大题共 10 题, 每题 3 分, 满分 30 分)

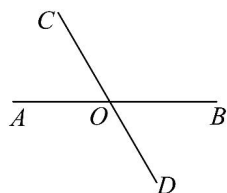
9. 用适当的不等式表示“ a 与 5 的和大于 -3 ”为_____.

【答案】 $a + 5 > -3$

【解析】

【详解】解：“ a 与 5 的和大于 -3 ”可用不等式表示为 $a + 5 > -3$.

10. 如图，直线 AB 与 CD 相交于点 O ， $\angle AOD = 120^\circ$ ，直线 AB 与 CD 的夹角的度数是_____度.



【答案】 60

【解析】

【分析】根据邻补角互补可得 $\angle AOC$ 的度数，进而可得答案.

【详解】解： $\because \angle AOD = 120^\circ$ ， $\angle AOD + \angle BOD = 180^\circ$ ，

$$\therefore \angle BOD = 180^\circ - \angle AOD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ,$$

$\therefore$ 直线 AB 与 CD 的夹角是 60° ，

故答案为：60.

【点睛】此题主要考查了邻补角，做题的关键是掌握邻补角互补.

11. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 6$ ，则 $\angle C - \angle B =$ _____°.

【答案】 80

【解析】

【分析】本题利用三角形内角和定理，根据三个角的比例关系设未知数，求解出各角度数后计算角度差即可.

【详解】解：由题意设 $\angle A = x$ ，则 $\angle B = 2x$ ， $\angle C = 6x$

根据三角形内角和定理，得 $x + 2x + 6x = 180^\circ$

解得 $x = 20^\circ$

因此 $\angle C = 6 \times 20^\circ = 120^\circ$, $\angle B = 2 \times 20^\circ = 40^\circ$

则 $\angle C - \angle B = 120^\circ - 40^\circ = 80^\circ$.

12. 命题“等角对等边”改成“如果……,那么……”的形式: _____

【答案】在同一个三角形中,如果有两个角相等,那么这两个角所对的边也相等.

【解析】

【分析】分析原命题,找出其条件与结论,然后写成“如果…那么…”形式即可.

【详解】解:因为条件是:在同一个三角形中,有两个角相等,结论为:这两个角所对的边也相等.

所以改写后为:在同一个三角形中,如果有两个角相等,那么这两个角所对的边也相等.

故答案为在同一个三角形中,如果有两个角相等,那么这两个角所对的边也相等.

【点睛】本题考查命题的定义,难度适中,正确找到条件与结论是解题关键.

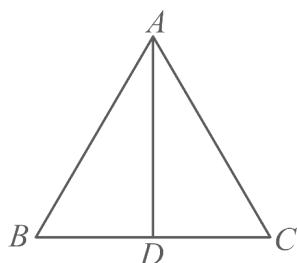
13. 在等边 $\triangle ABC$ 中,若过点 A 作 $AD \perp BC$,垂足为点 D ,则 $\angle BAD =$ _____°.

【答案】30

【解析】

【分析】根据等边三角形的性质得到 $\angle BAC = 60^\circ$,再结合等腰三角形三线合一的性质,可得 AD 平分 $\angle BAC$,即可计算出 $\angle BAD$ 的度数.

【详解】解:如图,



$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore \angle BAC = 60^\circ$,

$\because AD \perp BC$

$\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$,

$\therefore \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$.

14. 如果一个等腰三角形顶角的外角是 100° ,那么它的底角的度数是_____.

【答案】 50° ##50 度

【解析】

【分析】利用等腰三角形的性质，得到两底角相等，结合三角形内角与外角的关系：三角形的任一外角等于和它不相邻的两个内角之和，可直接得到结果.

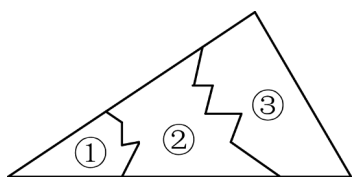
【详解】解： $\because$ 等腰三角形两底角相等，三角形的任一外角等于和它不相邻的两个内角之和，

$$\therefore \text{每一个底角为 } \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ,$$

故答案为： 50° .

【点睛】此题主要考查了等腰三角形的性质与三角形内角与外角的关系；本题比较简单，属于基础题.

15. 如图，一块三角形模具碎成了三块，可以只带其中一块碎片到商店去，就能配一块与原来一样的三角形模具，你选择带的那块编号是_____.



【答案】

③

【解析】

【分析】要配一块与原来一样的三角形模具，即要构造一个与原三角形全等的三角形，需根据全等三角形的判定定理寻找包含足够条件的碎片.

【详解】第①块只保留了一个角和部分边，无法确定三角形的形状和大小；

第②块不包含完整的边和角，无法确定三角形的形状和大小；

第③块保留了两个角和这两个角的夹边，根据全等三角形的判定定理“角边角”，即两角及其夹边对应相等的两个三角形全等，

$\therefore$ 带第③块去商店，可以配一块与原来一样的三角形模具.

16. 某次知识竞赛共有 25 道题，规定答对一道题得 4 分，答错一道题扣 1 分，不答题不得分. 在这次竞赛中，小海有两道题没有作答，若希望取得不低于 80 分的成绩，小海至少要答对几道题？设小海答对了 x 道题，那么由题意可列不等式为_____.

【答案】 $4x - (23 - x) \geq 80$

【解析】

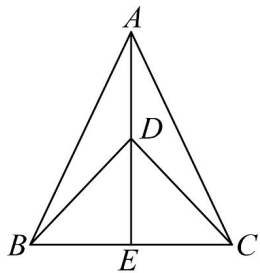
【分析】本题考查一元一次不等式的实际应用. 解题思路为：先根据已知条件确定答错的题数. 再根据得分规则与成绩要求，结合“不低于”的含义列出对应不等式.

【详解】解：由题意可知，小海答对 x 道题，共有 2 道题未作答，总题数为 25 道，因此答错的题数为 $(25 - 2 - x) = (23 - x)$ 道。

答对一道题得 4 分，因此答对总分为 $4x$ ，答错一道题扣 1 分，因此答错总扣分为 $(23 - x)$ ，

成绩不低于 80 分，即总得分大于等于 80，因此可列不等式： $4x - (23 - x) \geq 80$ 。

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 E 在边 BC 上，点 D 在线段 AE 上，且 $\angle ABD = \angle ACD$ ，请添加一个条件_____作为已知条件，通过推理能得到 $BE = CE$ （只需填写一个满足的条件）。



【答案】

$AB = AC$ （答案不唯一）

【解析】

【分析】要得到 $BE = CE$ ，即点 E 为 BC 的中点，结合图形可考虑利用等腰三角形“三线合一”的性质。已知 $\angle ABD = \angle ACD$ ，若添加 $AB = AC$ ，可利用等边对等角及角的和差关系推出 $DB = DC$ ，进而证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ ，得到 $\angle BAD = \angle CAD$ ，最后利用等腰三角形顶角平分线也是底边中线的性质即可得证。

【详解】解：添加条件： $AB = AC$ ；

理由如下：因为 $AB = AC$ ，

所以 $\angle ABC = \angle ACB$ ，

因为 $\angle ABD = \angle ACD$ ，

所以 $\angle ABC - \angle ABD = \angle ACB - \angle ACD$ ，即 $\angle DBC = \angle DCB$ ，

所以 $DB = DC$ ，

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中，
$$\begin{cases} AB = AC \\ AD = AD, \\ DB = DC \end{cases}$$

所以 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (SSS)，

所以 $\angle BAD = \angle CAD$ ，

即 AE 平分 $\angle BAC$ ，

在 $\triangle ABC$ 中，因为 $AB = AC$ ， AE 平分 $\angle BAC$ ，

所以 $BE = CE$.

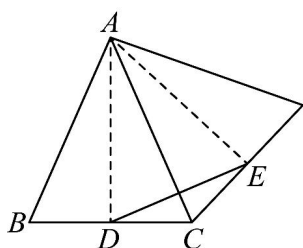
18. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC$ 的角度记为 n° , D 为边 BC 的中点, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 按逆时针方向旋转 n° , 得点 D 的对应点 E , 连接 DE , 那么 $\angle BDE$ 的大小为_____. (用含 n 的代数式表示)

【答案】 $\left(180 - \frac{n}{2}\right)^\circ$

【解析】

【分析】 先根据旋转得到对应边相等和旋转角, 再利用等腰三角形三线合一得到垂直关系, 最后通过角度和的关系计算出 $\angle BDE$ 的度数.

【详解】 解: 如图, 连接 AD 、 AE ,



根据旋转的性质可知, $AD = AE$, $\angle DAE = n^\circ$;

因为 $AB = AC$, D 为 BC 的中点,

所以 $AD \perp BC$,

所以 $\angle ADB = 90^\circ$;

在 $\triangle ADE$ 中, $AD = AE$,

所以 $\triangle ADE$ 是等腰三角形,

所以 $\angle ADE = \frac{180^\circ - \angle DAE}{2} = \frac{180^\circ - n^\circ}{2} = 90^\circ - \frac{n^\circ}{2}$;

所以 $\angle BDE = \angle ADB + \angle ADE$

$= 90^\circ + \left(90^\circ - \frac{n^\circ}{2}\right)$

$= \left(180 - \frac{n}{2}\right)^\circ$.

三、解答题 (本大题共 7 题, 满分 46 分)

19. 解不等式组
$$\begin{cases} 5x - 1 \geq 2x + 5 & \text{①} \\ \frac{x - 3}{3} \leq 3 - x & \text{②} \end{cases}$$

【答案】 $2 \leq x \leq 3$

【解析】

【分析】 本题先分别求解不等式组中两个一元一次不等式的解集，再根据不等式组解集的确定法则得到最终结果，运用一元一次不等式的基本求解方法即可解题.

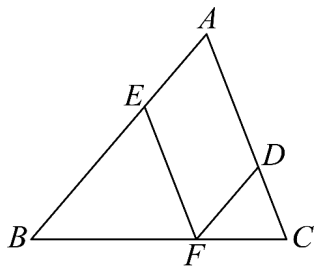
【详解】 解：
$$\begin{cases} 5x-1 \geq 2x+5 \textcircled{1} \\ \frac{x-3}{3} \leq 3-x \textcircled{2} \end{cases}$$

解不等式①得： $x \geq 2$

解不等式②得： $x \leq 3$

$\therefore$ 不等式组的解集为： $2 \leq x \leq 3$.

20. 如图，已知： D 、 E 、 F 分别是线段 AC 、 AB 、 BC 上的点， $DF \parallel AB$ ， $\angle DFE = \angle A$. 求证： $\angle EFB = \angle C$. 把以下解答过程补充完整.



证明： $\because DF \parallel AB$,

$\therefore \angle BEF = \angle$ _____ (_____),

又 $\because \angle DFE = \angle A$,

$\therefore \angle$ _____ $= \angle A$,

$\therefore$ _____ $\parallel$ _____ (_____),

$\therefore \angle EFB = \angle C$. (两直线平行，同位角相等)

【答案】

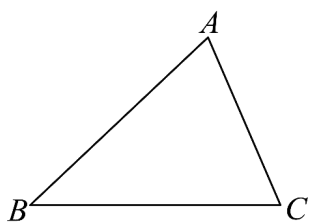
DFE (两直线平行，内错角相等), BEF , $AC \parallel EF$ (同位角相等，两直线平行)

【解析】

【分析】 根据平行线的判定和性质证明即可.

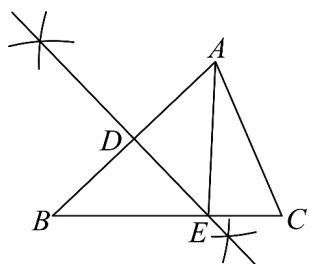
【详解】 略

21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AB 的垂直平分线交边 AB 于点 D ，交边 BC 于点 E .



- (1) 尺规作图：请用无刻度的直尺和圆规，在线段 BC 上作点 E （要求：不写作法，保留作图痕迹）；
 (2) 连接 AE ，如果 $BC = 12$ ， $AC = 10$ ，求 $\triangle AEC$ 的周长.

【答案】(1)



(2) 22

【解析】

【分析】(1) 根据线段垂直平分线的作图方法作线段 AB 的垂直平分线，交边 AB 于点 D ，交边 BC 于点 E ，则点 E 即为所求.

(2) 由垂直平分线的性质得 $AE = BE$ ，从而可求出 $\triangle AEC$ 的周长.

【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

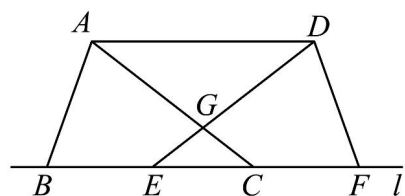
解：由作图得： DE 是 AB 的垂直平分线，

$$\therefore AE = BE,$$

$$\because BC = 12, AC = 10,$$

$$\therefore \triangle AEC \text{ 的周长} = AE + EC + AC = BE + EC + AC = BC + AC = 12 + 10 = 22.$$

22. 如图， B 、 E 、 C 、 F 是直线 l 上的四点， AC 、 DE 相交于点 G ， $AB = DF$ ， $AC = DE$ ， $BC = EF$.



- (1) 求证： $\triangle GEC$ 是等腰三角形；
 (2) 求证： $AD \parallel EC$.

【答案】(1) 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DFE$ 中，

$$\begin{cases} AB = DF \\ AC = DE, \\ BC = EF \end{cases}$$

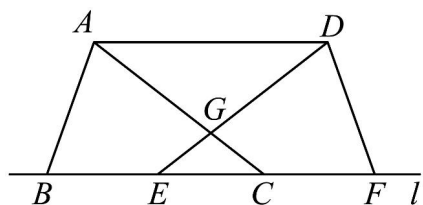
$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DFE$ (SSS),

$\therefore \angle ACB = \angle DEF$,

$\therefore EG = CG$,

$\therefore \triangle GEC$ 是等腰三角形;

(2) $\because AC = DE$, $EG = CG$,



$\therefore AC - CG = DE - EG$,

$\therefore AG = DG$,

$\therefore \angle GAD = \angle GDA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AGD)$,

$\therefore \angle ACE = \angle DEF = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle CGE)$,

$\therefore \angle AGD = \angle EGC$,

$\therefore \angle CAD = \angle ACB$,

$\therefore AD \parallel EC$.

【解析】

【分析】(1) 证明 $\triangle ABC \cong \triangle DFE$, 得到 $\angle ACB = \angle DEF$, 即可得证;

(2) 根据线段的和差关系, 易得 $AG = DG$, 根据三角形的内角和定理, 得到 $\angle CAD = \angle ACB$, 即可得出结论.

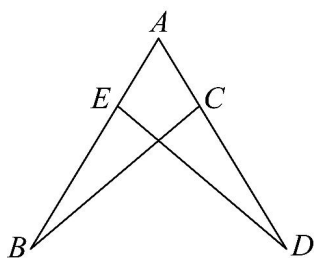
【小问 1 详解】

证明: 略

【小问 2 详解】

证明: 略

23. 如图, 已知: 点 E 、 C 分别在线段 AB 、 AD 上, $AE = AC$, $\angle B = \angle D$.



(1) 求证: $\triangle ADE \cong \triangle ABC$;

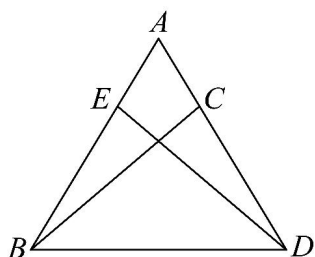
(2) 不添加任何字母, 请你连接图中两点, 得到一组全等的三角形是: _____ 并给出证明.

【答案】(1) 证明: 在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABC$ 中,

$$\begin{cases} \angle D = \angle B \\ \angle A = \angle A, \\ AE = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle ABC (\text{AAS})$$

(2) 方法一: 如图, 连接 BD , 得到 $\triangle BCD \cong \triangle DEB$,



证明: $\because \triangle ADE \cong \triangle ABC$,

$$\therefore AB = AD, \quad BC = DE,$$

$$\text{又} \because AE = AC,$$

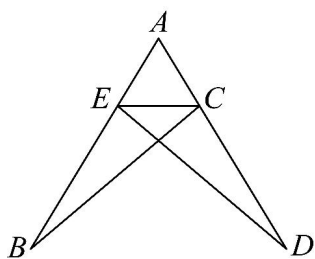
$$\therefore AB - AE = AD - AC, \quad \text{即} \quad BE = CD,$$

在 $\triangle BCD$ 和 $\triangle DEB$ 中,

$$\begin{cases} CD = BE \\ BC = DE, \\ BD = DB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BCD \cong \triangle DEB (\text{SSS});$$

方法二: 如图, 连接 EC , 得到 $\triangle BEC \cong \triangle DCE$,



$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle ABC,$$

$$\therefore AB = AD, \quad BC = DE,$$

$$\text{又} \because AE = AC,$$

$$\therefore AB - AE = AD - AC, \quad \text{即} \quad BE = CD,$$

在 $\triangle BEC$ 和 $\triangle DCE$ 中,

$$\begin{cases} BE = CD \\ \angle B = \angle D, \\ BC = DE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BEC \cong \triangle DCE \text{ (SAS)}$$

【解析】

【分析】(1) 在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABC$ 中, 结合已知的 $\angle D = \angle B$ 、公共角 $\angle A$ 与 $AE = AC$, 依据 AAS 即可证明两三角形全等;

(2) 可连接 BD , 得到 $\triangle BCD \cong \triangle DEB$; 由 (1) 得 $\triangle ADE \cong \triangle ABC$, 由全等性质可知 $AB = AD$ 、 $BC = DE$, 结合 $AE = AC$ 推得 $BE = CD$, 再根据三边对应相等, 依据 SSS 即可证明 $\triangle BCD \cong \triangle DEB$; 也可连接 EC , 得到 $\triangle BEC \cong \triangle DCE$, 同上得 $BC = DE$ 、 $BE = CD$, 依据 SAS 即可证明 $\triangle BEC \cong \triangle DCE$.

【小问 1 详解】

略

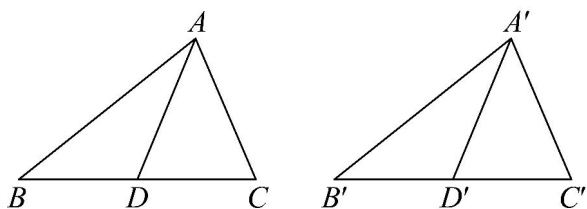
【小问 2 详解】

略

24. 在学习全等三角形及其性质中例题 16 后, 受此启发, 小海和小明有了新的探究.

例 16 证明: 两边对应相等且其中一组等边上的中线相等的两个三角形全等.

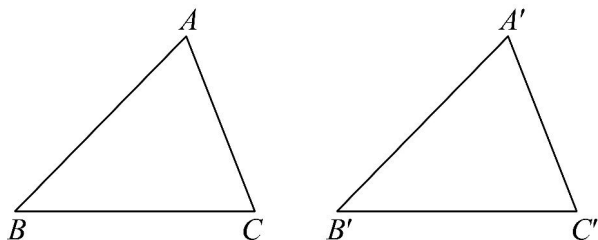
如图, 已知: 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, AD 、 $A'D'$ 分别是边 BC 、 $B'C'$ 上的中线, 且 $AD = A'D'$. 求证: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.



(1) 小海发现：“两角对应相等且其中一组等角的平分线相等的两个三角形全等”是真命题.

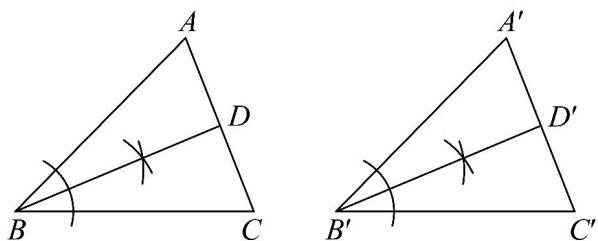
①如图，请根据题意在图中画出示意图；并根据条件和结论，参照你的示意图，写出“已知”和“求证”；

②写出由条件推出结论的完整过程.



(2) 小明发现：“两边对应相等且其中一组等边上的高相等的两个三角形全等”是真命题. 该结论是否正确？请简单说明理由，无需完整过程.

【答案】(1) ①如图：



已知：在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中， $\angle A = \angle A'$ ， $\angle ABC = \angle A'B'C'$ ， BD 平分 $\angle ABC$ ， $B'D'$ 平分 $\angle A'B'C'$ ，且 $BD = B'D'$ ；求证： $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ 。

② 证明： $\because BD$ 平分 $\angle ABC$ ， $B'D'$ 平分 $\angle A'B'C'$ ，

$$\therefore \angle ABD = \frac{1}{2} \angle ABC, \quad \angle A'B'D' = \frac{1}{2} \angle A'B'C',$$

$$\text{又} \because \angle ABC = \angle A'B'C',$$

$$\therefore \angle ABD = \angle A'B'D',$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle A'B'D'$ 中，

$$\begin{cases} \angle A = \angle A' \\ \angle ABD = \angle A'B'D' \\ BD = B'D' \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle A'B'D' \text{ (AAS)},$$

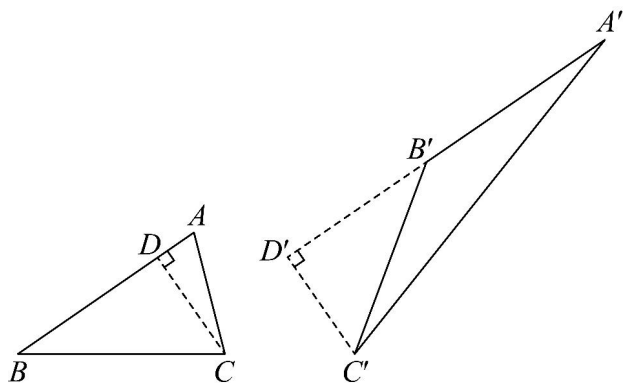
$$\therefore AB = A'B',$$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle A' \\ AB = A'B' \\ \angle ABC = \angle A'B'C' \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C' (ASA)$;

(2) 结论不正确, 理由: 可以构造反例: 两个三角形有两边对应相等, 且其中一组等边上的高相等, 但这两个三角形一个是锐角三角形, 一个是钝角三角形, 它们不全等. 如图:



$AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CD = C'D'$, 则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'D'$ 不全等.

【解析】

【分析】(1) ①在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中, 分别作 $\angle ABC$ 和 $\angle A'B'C'$ 的角平分线 BD 、 $B'D'$;

已知: 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中, $\angle B = \angle B'$, $\angle BAC = \angle B'A'C'$, BD 平分 $\angle ABC$, $B'D'$ 平分 $\angle A'B'C'$, 且 $BD = B'D'$; 求证: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

② 先证明 $\angle ABD = \angle A'B'D'$, 根据AAS证明 $\triangle ABD \cong \triangle A'B'D'$, 得 $AB = A'B'$, 再根据ASA即可证明 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$;

(2) 结论不正确, 可以举反例说明.

【小问1详解】

解: ①在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中, 分别作 $\angle ABC$ 和 $\angle A'B'C'$ 的角平分线 BD 、 $B'D'$;

②略

【小问2详解】

略

25. 取长度为 l 的相同积木, 四边对齐叠放, 如图1所示. 沿平行于积木长边的方向水平向右推动一块积木而不触碰其他积木, 在不倾倒的前提下研究积木可延伸多远. 结合课本中预备知识解决下列问题.

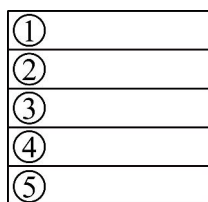


图1

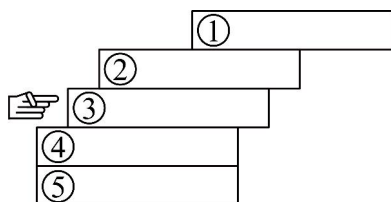


图2

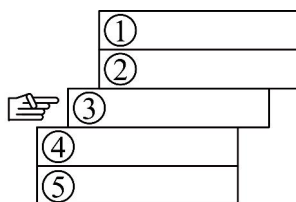


图3

(1) 先推动积木①至最远，那么积木①的最远延伸长度是_____；再保持积木①、②相对位置不变，推动积木②至最远；最后保持积木①、②、③相对位置不变，推动积木③至最远。如图 2，此时积木①②③组合的最远延伸长度是_____。（用含 l 的代数式表示）

(2) 不推动积木①，保持积木①、②相对位置不变，推动积木②至最远，那么积木①②组合的最远延伸长度是_____；保持积木①、②、③相对位置不变，推动积木③至最远。如图 3，此时积木①②③组合的最远延伸长度是_____。（用含 l 的代数式表示）

(3) 先推动积木①，使得积木①的延伸长度为 $\frac{1}{4}l$ ；再保持积木①、②相对位置不变，推动积木②至最远，此时积木①②组合的最远延伸长度是多少？然后保持积木①、②、③相对位置不变，推动积木③至最远，此时积木①②③组合的最远延伸长度是多少？（用含 l 的代数式表示）

【答案】(1) $\frac{1}{2}l$ ； $\frac{11}{12}l$

(2) $\frac{1}{2}l$ ； $\frac{2}{3}l$

(3) 积木①②组合的最远延伸长度是 $\frac{5}{8}l$ ；积木①②③组合的最远延伸长度是 $\frac{19}{24}l$

【解析】

【分析】(1) 根据题干性质求解即可；

(2) 根据题干性质求解即可；

(3) 根据题干性质求解即可。

【小问 1 详解】

解：均匀积木重心在中点，上层积木最多能超出下层 $\frac{1}{2}l$ ；多层依次外伸时，第 1 块相对第 2 块最多伸 $\frac{1}{2}l$ ，第 2 块相对第 3 块最多伸 $\frac{1}{4}l$ ，第 3 块相对第 4 块最多伸 $\frac{1}{6}l$ ， $\cdots$ ，第 n 块相对下一块最多伸 $\frac{1}{2n}l$ ；

只推积木①至最远：①相对②最多延伸 $\frac{1}{2}l$ ；

再固定①②推②：①②总质量为 $2m$ ，②相对③最多延伸 $\frac{1}{2 \times 2}l = \frac{1}{4}l$ ，

再叠加①相对②的 $\frac{1}{2}l$ ，总延伸 $= \frac{1}{2}l + \frac{1}{4}l = \frac{3}{4}l$ ；

再固定①②推③：①②②总质量为 $3m$ ，相对④最多延伸 $\frac{1}{2 \times 3}l = \frac{1}{6}l$ ，

$$\text{总延伸} = \frac{1}{2}l + \frac{1}{4}l + \frac{1}{6}l = \frac{11}{12}l;$$

$$\text{故答案为: } \frac{1}{2}l; \frac{11}{12}l;$$

【小问2详解】

解：固定①，推②至最远：②相对③最多伸 $\frac{1}{2}l$ ，①跟着②一起外伸，总延伸 $=\frac{1}{2}l$ ；

固定①②相对位置，三块①②③放在④上，推③至最远，

设③相对④向右伸出 x_3 ，支撑边界为④的右端，

各块重心坐标（以④右端为0，向右为正）：

$$\textcircled{1} x_3 + x_2 - \frac{l}{2} = x_3 + \frac{l}{2} - \frac{l}{2} = x_3$$

$$\textcircled{2} \text{同}\textcircled{1}, \text{为 } x_3,$$

$$\textcircled{3} x_3 - \frac{l}{2},$$

三块总重心等于0（临界平衡）：

$$\frac{m \cdot x_3 + m \cdot x_3 + m \left(x_3 - \frac{l}{2} \right)}{3m} = 0$$

$$3x_3 - \frac{l}{2} = 0,$$

$$\text{解得 } x_3 = \frac{l}{6}$$

总延伸长度（最右端超出④的总长）

$$x_2 + x_3 = \frac{l}{2} + \frac{l}{6} = \frac{3l + l}{6} = \frac{2l}{3}.$$

【小问3详解】

解：1. 积木①先延伸 $\frac{1}{4}l$ （相对②超出 $\frac{1}{4}l$ ），再固定①②推②：

设②相对③最远可伸 x ，

$$\text{由题意得 } m \left(\frac{1}{4}l + x - \frac{1}{2}l \right) + m \left(x - \frac{1}{2}l \right) = 0, \text{ 解得 } x = \frac{3}{8}l,$$

$$\text{所以}\textcircled{1}\textcircled{2}\text{组合总延伸: } \frac{l}{4} + \frac{3l}{8} = \frac{5l}{8};$$

2. 再固定①②推③：①②②总质量为 $3m$ ，③相对下层最远可伸 $\frac{1}{2 \times 3}l = \frac{1}{6}l$ ，

总延伸: $\frac{5}{8}l + \frac{1}{6}l = \frac{15+4}{24}l = \frac{19}{24}l$.