

2025 学年第二学期

七年级数学

(满分 100 分, 完卷时间 90 分钟)

一、选择题 (本大题共 6 题, 每小题 3 分, 满分 18 分)

1. 如果 $a > b$, 那么下列不等式中不正确的是 ()

- A. $a - 2 > b - 2$ B. $\frac{a}{3} > \frac{b}{3}$ C. $-3a < -3b$ D. $1 - 3a > 1 - 3b$

【答案】D

【解析】

【分析】根据不等式的基本性质, 判断各选项即可.

【详解】解: A、若 $a > b$, 则 $a - 2 > b - 2$, 选项的不等式正确, 故选项不符合题意;

B、若 $a > b$, 则 $\frac{a}{3} > \frac{b}{3}$, 选项的不等式正确, 故选项不符合题意;

C、若 $a > b$, 则 $-3a < -3b$, 选项的不等式正确, 故选项不符合题意;

D、若 $a > b$, 则 $1 - 3a < 1 - 3b$, 选项的不等式不正确, 故选项符合题意.

2. 若一个三角形的三个内角的度数之比为 $1:1:2$, 则这个三角形是 ()

- A. 直角三角形 B. 锐角三角形 C. 钝角三角形 D. 无法确定

【答案】A

【解析】

【分析】本题主要考查三角形内角和, 熟练掌握三角形内角和是解题的关键; 因此此题可根据三角形内角和进行求解.

【详解】解: 由三角形的三个内角的度数之比为 $1:1:2$, 可设这三个内角分别为 $x, x, 2x$, 则有:

$$x + x + 2x = 180^\circ,$$

$$\text{解得: } x = 45^\circ,$$

$$\therefore 2x = 90^\circ,$$

即该三角形为直角三角形;

故选 A.

3. 下列命题是真命题的是 ()

- A. 同旁内角互补
B. 面积相等的两个三角形是全等三角形

- C. 三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和
- D. 如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行，那么这两个角相等

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了平行线的性质、三角形全等的判定、三角形外角的定义及性质、判断命题的真假，根据平行线的性质、三角形全等的判定、三角形外角的定义及性质逐项分析即可得解.

【详解】解：A、两直线平行，同旁内角互补，故原说法错误，是假命题，不符合题意；

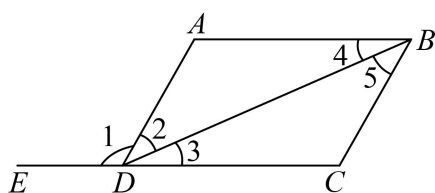
B、面积相等的两个三角形不一定是全等三角形，故原说法错误，是假命题，不符合题意；

C、三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和，故原说法正确，是真命题，符合题意；

D、如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行，那么这两个角相等或互补，故原说法错误，是假命题，不符合题意；

故选：C.

4. 如图，下列能判断 $AB \parallel CD$ 的条件是 ()



- A. $\angle A + \angle ABC = 180^\circ$ B. $\angle 2 = \angle 5$ C. $\angle 3 = \angle 4$ D. $\angle 1 = \angle C$

【答案】C

【解析】

【分析】根据内错角相等，两直线平行；同旁内角互补，两直线平行；同位角相等，两直线平行进行判定即可.

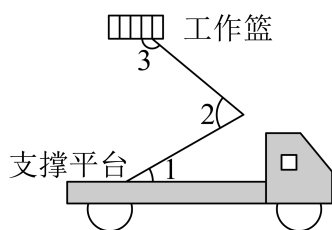
【详解】解：A、 $\angle A + \angle ABC = 180^\circ$ ，则 $AD \parallel BC$ ，不符合题意；

B、 $\angle 2 = \angle 5$ ，则 $AD \parallel BC$ ，不符合题意；

C、 $\angle 3 = \angle 4$ ，则 $AB \parallel CD$ ，符合题意；

D、 $\angle 1 = \angle C$ ，则 $AD \parallel BC$ ，不符合题意.

5. 如图是路政工程车的工作示意图，工作篮底部与支撑平台平行. 如果 $\angle 1 = 30^\circ$ ， $\angle 2 = 70^\circ$ ，那么 $\angle 3$ 的度数为 ()



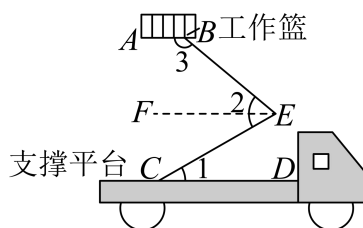
- A. 130° B. 140° C. 150° D. 160° .

【答案】B

【解析】

【分析】设工作篮底部的部分为 AB ，工程车平台的部分为 CD ，起落架由 BE 和 CE 组成，过点 E 作 $EF \parallel AB$ ，由 $AB \parallel CD$ ，得 $EF \parallel CD$ ，得 $\angle CEF = \angle 1 = 30^\circ$ ，得 $\angle BEF = \angle 2 - \angle CEF = 40^\circ$ 。即得 $\angle 3 = 180^\circ - \angle BEF = 140^\circ$ 。

【详解】解：如图，设工作篮底部的部分为 AB ，工程车平台的部分为 CD ，起落架由 BE 和 CE 组成，过点 E 作 $EF \parallel AB$ ，则 $\angle BEF + \angle 3 = 180^\circ$ ，



$\because AB \parallel CD$,

$\therefore EF \parallel CD$,

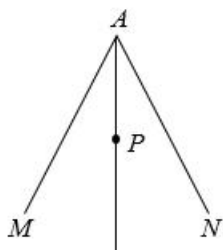
$\therefore \angle CEF = \angle 1 = 30^\circ$,

$\therefore \angle 2 = 70^\circ$,

$\therefore \angle BEF = \angle 2 - \angle CEF = 40^\circ$.

$\therefore \angle 3 = 180^\circ - \angle BEF = 140^\circ$.

6. 如图，已知 AP 平分 $\angle MAN$ ，点 B 、 C 分别在射线 AM 、 AN 上，如果添加一个条件，即可推出 $AB = AC$ ，那么下列条件不能得到 $AB = AC$ 的是（ ）



- A. $BP = CP$ B. $BC \perp AP$ C. $\angle APB = \angle APC$ D. $\angle ABP = \angle ACP$

【答案】A

【解析】

【分析】要判断能否推出 $AB = AC$ ，可根据已知条件 AP 平分 $\angle MAN$ ，结合各选项所给条件，看能否证明 $\triangle ABP$ 和 $\triangle ACP$ 全等，若全等则可推出 $AB = AC$ 。

【详解】解： $\because AP$ 平分 $\angle MAN$ ，点 B 、 C 分别在射线 AM 、 AN 上，

$\therefore$ 在 $\triangle BAP$ 和 $\triangle CAP$ 中， $\angle BAP = \angle CAP$ ， $AP = AP$ ，

选项 A：若 $BP = CP$ ，则不能推出 $\triangle ABP \cong \triangle ACP$ ，

$\therefore$ 不能得出 $AB = AC$ ，符合题意；

选项 B： $\because BC \perp AP$ ，

$\therefore \angle APC = \angle APB$ ，

在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle ACP$ 中，

$$\therefore \begin{cases} \angle BAP = \angle CAP \\ AP = AP \\ \angle APB = \angle APC \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle ACP (ASA)$ ，

$\therefore AB = AC$ ，不符合题意；

选项 C：在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle ACP$ 中，

$$\therefore \begin{cases} \angle BAP = \angle CAP \\ AP = AP \\ \angle APB = \angle APC \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle ACP (ASA)$ ，

$\therefore AB = AC$ ，不符合题意，

选项 D：在 $\triangle ABP$ 和 $\triangle ACP$ 中，

$$\therefore \begin{cases} \angle ABP = \angle ACP \\ \angle BAP = \angle CAP \\ AP = AP \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABP \cong \triangle ACP (AAS)$ ，

$\therefore AB = AC$ ，不符合题意。

二、填空题（本大题共 12 题，每题 3 分，满分 36 分）

7. 用适当的不等式表示“ m 的 3 倍减去 2 的差是一个正数”_____。

【答案】 $3m - 2 > 0$

【解析】

【分析】 先根据题意表示出 m 的 3 倍与 2 的差，再根据正数大于 0 的性质列出不等式即可.

【详解】 解： m 的 3 倍为 $3m$ ，减去 2 的差为 $3m - 2$ ，

因此列不等式得 $3m - 2 > 0$.

8. 如果既满足 $x \geq a$ 又满足 $x \leq 1$ 的 x 的值只有一个，那么 $a =$ _____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 根据一元一次不等式组的解集的定义，即可确定 a 的值.

【详解】 解：当 $a < 1$ 时，不等式组的解集为 $a \leq x \leq 1$ ，包含无数个实数，不符合题意；

当 $a > 1$ 时，不等式组无解，没有满足条件的 x ，不符合题意；

当 $a = 1$ 时，不等式组的解为 $x = 1$ ，仅有一个满足条件的 x ，符合题意.

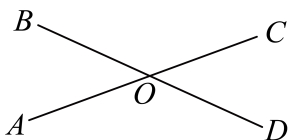
9. 直线 AC ， BD 相交于点 O ，如果 $\angle BOC = 130^\circ$ ，那么直线 AC 与直线 BD 的夹角为_____度.

【答案】 50

【解析】

【分析】 先利用邻补角互补计算出相交形成的锐角，即可得到两直线的夹角.

【详解】 解： $\because$ 直线 AC ， BD 相交于点 O ，如图，



$$\therefore \angle AOB + \angle BOC = 180^\circ,$$

$$\because \angle BOC = 130^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ,$$

故直线 AC 与直线 BD 的夹角为 50° 度.

10. 命题“两个全等三角形的周长相等”的逆命题是_____.

【答案】 周长相等的两个三角形全等

【解析】

【分析】 根据逆命题定义：将一个命题的题设与结论对调即可得到命题的逆命题，直接求解即可得到答案；

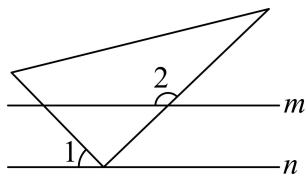
【详解】 解：由题意可得，

命题“两个全等三角形的周长相等”的逆命题是“周长相等的两个三角形全等”，

故答案为：周长相等的两个三角形全等；

【点睛】本题考查逆命题定义：将一个命题的题设与结论对调即可得到命题的逆命题，解题的关键是找到原命题的题设与结论.

11. 如图，已知直线 $m \parallel n$ ，将三角尺的直角顶点放在直线 n 上，若 $\angle 1 = 46^\circ$ ，则 $\angle 2 =$ _____ 度.



【答案】 136

【解析】

【详解】解：由题意可知， $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ ，

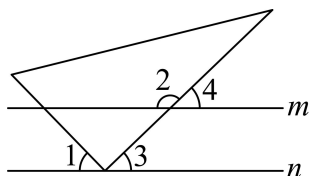
$\because \angle 1 = 46^\circ$ ，

$\therefore \angle 3 = 44^\circ$ ，

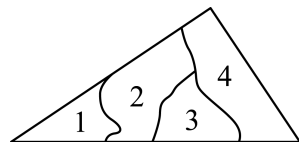
$\because m \parallel n$ ，

$\therefore \angle 4 = \angle 3 = 44^\circ$ ，

$\therefore \angle 2 = 180^\circ - \angle 4 = 136^\circ$.



12. 小明不慎将一块三角形的玻璃摔碎成如图所示的四块（即图中标有 1、2、3、4 的四块），你认为将其中的哪一块带去，就能配一块与原来一样大小的三角形？应该带第 _____ 块.



【答案】 4

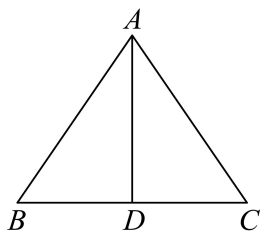
【解析】

【分析】本题主要考查三角形全等的判定，本题应先假定选择哪块，再对应三角形全等判定的条件进行验证即可得到结论.

【详解】解：1、2、3 块玻璃不同时具备包括一完整边在内的三个证明全等的要素，所以不能带它们去，

只有第4块有完整的两角及夹边，符合 ASA ，满足三角形全等的条件，是符合题意的，
故答案为：4.

13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， D 为 BC 的中点， $\angle BAD = 35^\circ$ ，则 $\angle C =$ _____.



【答案】 55°

【解析】

【分析】利用等腰三角形的性质和三角形内角和定理求解.

【详解】解： $\because AB = AC$ ， D 为 BC 的中点，

$$\therefore \angle BAC = 2\angle BAD = 70^\circ, \quad \angle B = \angle C,$$

$$\therefore \angle C = \frac{1}{2} \times (180^\circ - \angle BAC) = \frac{1}{2} \times 110^\circ = 55^\circ.$$

【点睛】注意掌握等腰三角形的性质和三角形内角和定理.

14. 等腰三角形的周长为16，其一边长为4，那么它的腰为_____.

【答案】6

【解析】

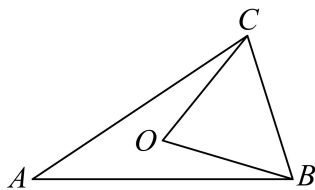
【分析】此题考查了等腰三角形的定义，三角形三边关系，当等腰三角形给定的一边长没有明确是腰长或是底边长时，应分情况讨论，此题分两种情况讨论求出腰长即可.

【详解】当腰长为4时，则底边长为 $16 - 4 - 4 = 8$ ，因为 $4 + 4 = 8$ ，不能构成三角形，故舍去；

当底边长为4时，腰长为 $\frac{1}{2} \times (16 - 4) = 6$ ，此时可以构成三角形，

故答案为：6.

15. 如图，点 O 是 $\triangle ABC$ 各边垂直平分线的交点，连接 BO 、 CO . 如果 $\angle A = 34^\circ$ ，那么 $\angle BOC =$ _____度.

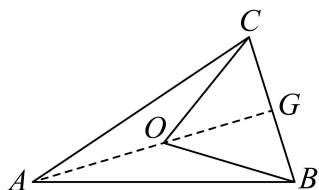


【答案】68

【解析】

【分析】根据线段垂直平分线的性质得到 $OA = OB = OC$ ，根据等腰三角形的性质、三角形内角和外角的性质计算，得到答案.

【详解】解：连接 AO 并延长，交 BC 于点 G ，



$\because O$ 为 $\triangle ABC$ 三边垂直平分线的交点，

$$\therefore OA = OB = OC,$$

$$\therefore \angle OBA = \angle OAB, \quad \angle OCA = \angle OAC,$$

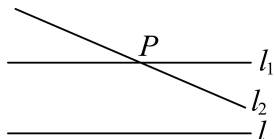
$$\therefore \angle OBA + \angle OCA = \angle OAB + \angle OAC = \angle BAC = 34^\circ,$$

$$\because \angle BOG = \angle ABO + \angle BAO = 2\angle BAO, \quad \angle COG = \angle CAO + \angle OAC = 2\angle CAO,$$

$$\therefore \angle BOC = \angle BOG + \angle COG = 2(\angle BAO + \angle CAO) = 2\angle BAC,$$

$$\therefore \angle BOC = 2 \times 34^\circ = 68^\circ.$$

16. 在学习反证法后，乐乐尝试用反证法证明“如图，已知 P 是直线 l 外一点，直线 l_1 、 l_2 相交于点 P ，且 $l_1 \parallel l$ ，则直线 l_2 与直线 l 必相交”这一命题：他假设直线 l_2 与直线 l 不相交，则有 $l_2 \parallel l$ ，又因为 $l_1 \parallel l$ ，所以 l_1 与 l_2 平行，这与_____矛盾，故假设不成立，所以直线 l_2 与直线 l 必相交.



【答案】直线 l_1 、 l_2 相交

【解析】

【分析】假设直线 l_2 与直线 l 不相交，则有 $l_2 \parallel l$ ，根据平行线的传递性得出 l_1 与 l_2 平行，得出与条件：直线 l_1 、 l_2 相交矛盾结论即可.

【详解】解：假设直线 l_2 与直线 l 不相交，则有 $l_2 \parallel l$ ，

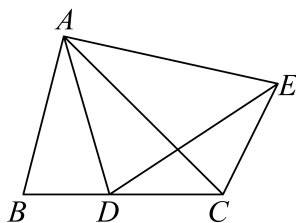
又因为 $l_1 \parallel l$ ，

所以 l_1 与 l_2 平行，

这与直线 l_1 、 l_2 相交矛盾，故假设不成立，

所以直线 l_2 与直线 l 必相交.

17. 如图, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 按逆时针方向旋转, 得到 $\triangle ADE$, 使点 B 的对应点 D 落在边 BC 上, 连接 EC , 如果 $\angle EDC = \alpha$, 那么 $\angle AEC =$ _____. (用含 α 的代数式表示)



【答案】 $90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$

【解析】

【分析】 先由旋转的性质得出 $AB = AD$, $AC = AE$, $\angle BAD = \angle CAE$, 然后根据平角的定义和等边对等角求得 $\angle ABD$, 从而由三角形内角和定理得到 $\angle CAE$, 进而可求得答案.

【详解】 解: $\because$ 旋转,

$$\therefore AB = AD, AC = AE, \angle ABC = \angle ADE, \angle BAC = \angle DAE$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ADB = \angle ADE, \angle ACE = \angle AEC, \angle BAC - \angle CAD = \angle DAE - \angle CAD, \text{ 即} \\ \angle BAD = \angle CAE,$$

$$\therefore \angle EDC = \alpha, \angle ADB + \angle ADE + \angle EDC = 180^\circ$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ADB = \angle ADE = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle EDC) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle BAD = 180^\circ - \angle ABD - \angle ADB = \alpha,$$

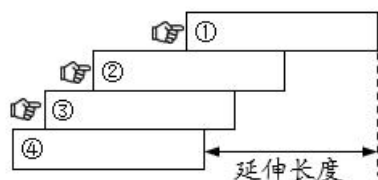
$$\therefore \angle AEC = \angle ACE = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle CAE) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha.$$

18. 预备知识: 1. 一个长方体积木组合的重心的水平位置偏移其最下方长方体积木重心的水平距离, 等于组合中各个长方体积木重心偏移最下方长方体积木重心的水平距离的平均数.

2. 一个长方体积木组合的重心的高度等于组合中各个长方体积木重心高度的平均数.

3. 两个长方体积木组合叠在一起组成一个新的组合, 当上方组合的重心在水平方向上超过下方组合的边缘, 就会倒下.

在数学综合与实践课《积木能叠多远?》的探究活动中, 同学们探究了积木堆叠平衡问题, 并根据相关预备知识进行了推导, 请你回顾并解决以下问题: 取 4 块长、宽、高分别对应相同且材质均匀、质量相等的积木, 将它们四边对齐叠放, 从上到下编号依次为①、②、③、④, 向右沿平行于积木长边的方向依次推动积木①、②、③, 如图所示, 如果每块积木的长度为 l , 在不倾倒的前提下, 积木①②③组合的最远延伸长度是 _____. (用含 l 的代数式表示)

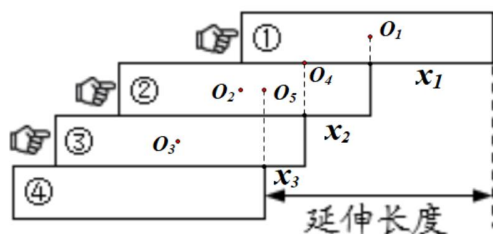


【答案】 $\frac{11}{12}l$

【解析】

【分析】根据预备知识 2、3，分别找到长方体①、②、③的重心 O_1 、 O_2 、 O_3 、长方体组合①②的重心 O_4 、长方体组合①②③的重心 O_5 以及它们的位置，然后根据预备知识 1，求得 O_1 和 O_2 的水平距离，从而得到 O_2 和 O_4 的水平距离；进而求得 O_1 和 O_3 的水平距离和 O_2 和 O_3 的水平距离，从而得到 O_3 和 O_5 的水平距离，即可求得长方体①、②、③相对各自下方的长方体的延伸长度，进而解答.

【详解】解：如图， O_1 、 O_2 、 O_3 分别是长方体①、②、③的重心，根据预备知识 2、3 可知，在不倾倒的前提下，当积木①②③组合的延伸长度最远时， O_1 与长方体①的右边缘对齐； O_4 是长方体组合①②的重心，且与长方体③的右边缘对齐； O_5 是长方体组合①②③的重心，且与长方体④的右边缘对齐，



设此时长方体①相对于长方体②的延伸长度为 x_1 ，长方体②相对于长方体③的延伸长度为 x_2 ，长方体③相对于长方体④的延伸长度为 x_3 ，

$$\text{则 } x_1 = \frac{1}{2}l,$$

$$\text{此时 } O_1 \text{ 和 } O_2 \text{ 的水平距离为 } \frac{1}{2}l,$$

$$\text{则由预备知识 1, 得 } O_2 \text{ 和 } O_4 \text{ 的水平距离为 } \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}l\right) = \frac{1}{4}l,$$

$$\therefore x_2 = \frac{1}{2}l - \frac{1}{4}l = \frac{1}{4}l;$$

此时 O_1 和 O_3 的水平距离为 $x_2 + \frac{1}{2}l = \frac{1}{4}l + \frac{1}{2}l = \frac{3}{4}l$; O_2 和 O_3 的水平距离为 $\frac{1}{2}l - \frac{1}{4}l = \frac{1}{4}l$,

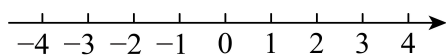
则由预备知识 1, 得 O_3 和 O_5 的水平距离为 $\frac{1}{3}\left(0 + \frac{3}{4}l + \frac{1}{4}l\right) = \frac{1}{3}l$,

$$\therefore x_3 = \frac{1}{2}l - \frac{1}{3}l = \frac{1}{6}l,$$

$\therefore$ 在不倾倒的前提下, 积木①②③组合的最远延伸长度是 $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2}l + \frac{1}{4}l + \frac{1}{6}l = \frac{11}{12}l$.

三、简答题 (本大题共 7 题, 第 19、20、21 题 5 分, 第 22 题 6 分, 第 23 题 7 分、第 24 题 8 分、第 25 题 10 分, 满分 46 分)

19. 解不等式组: $\begin{cases} \frac{x-2}{3} \leq x \text{ ①} \\ 5(x-2) < 8-x \text{ ②} \end{cases}$, 并在数轴上表示出解集.



【答案】 $-1 \leq x < 3$;

【解析】

【详解】解: $\begin{cases} \frac{x-2}{3} \leq x \text{ ①} \\ 5(x-2) < 8-x \text{ ②} \end{cases}$

解不等式①得 $x \geq -1$,

解不等式②得 $x < 3$,

$\therefore$ 原不等式组的解集为 $-1 \leq x < 3$,

数轴表示见答案.

20. 根据篮球赛的规则, 在三分线外投篮命中可得 3 分, 在三分线内投篮命中可得 2 分. 某球队在一场篮球赛中不算罚篮共投中 34 个球, 罚篮得 14 分, 并且总分超过 90 分. 该球队至少投中了多少个三分球?

【答案】 该球队至少投中 9 个三分球.

【解析】

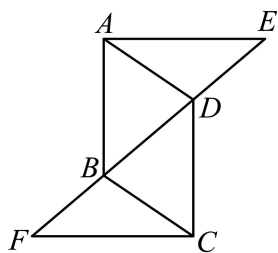
【详解】解: 设球队投中了 x 个三分球,

则根据题意可得: $3x + 2(34 - x) + 14 > 90$,

解得: $x > 8$,

答: 该球队至少投中 9 个三分球.

21. 如图, 已知: 点 F 、 B 、 D 、 E 在同一直线上, $AE = CF$, $DE = BF$, $\angle E = \angle F$. 求证: $AB \parallel CD$.



把以下证明过程补完整.

证明: $\because DE = BF$,

$$\therefore \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}},$$

$$\therefore BE = DF.$$

在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle CDF$ 中,

$$\therefore \begin{cases} AE = CF, \\ \angle E = \angle F, \\ BE = DF, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF \text{ (} \underline{\hspace{2cm}} \text{)}.$$

$$\therefore \angle \underline{\hspace{2cm}} = \angle \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\therefore AB \parallel CD. \text{ (} \underline{\hspace{2cm}} \text{)}.$$

【答案】 DE ; BD ; BF ; BD ; SAS ; ABE ; CDF ; 内错角相等, 两直线平行

【解析】

【分析】 根据等式的性质得出 $BE = DF$, 根据 SAS 证明 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$, 得出 $\angle ABE = \angle CDF$, 然后根据平行线的判定即可得证.

【详解】 证明: $\because DE = BF$,

$$\therefore DE + BD = BF + BD,$$

$$\therefore BE = DF.$$

在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle CDF$ 中,

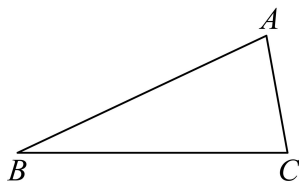
$$\therefore \begin{cases} AE = CF, \\ \angle E = \angle F, \\ BE = DF, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF (SAS).$$

$$\therefore \angle ABE = \angle CDF.$$

$$\therefore AB \parallel CD. \text{ (内错角相等, 两直线平行)}.$$

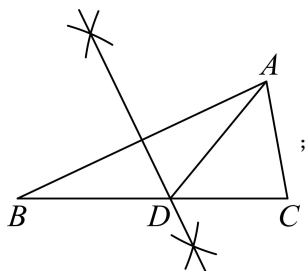
22. 如图，已知 $\triangle ABC$ ，请根据下列要求作图并回答问题.



(1) 点 D 在边 BC 上，请你用直尺和圆规在图中作出点 D ，使得 $AD + CD = BC$ ；(保留作图痕迹，不写作法)

(2) 在 (1) 所作的图形中，若 $\angle B = 25^\circ$ ， $\angle BAC = 3\angle BAD$ ，求证： $AB > BC$.

【答案】(1) 所作图形如图：



(2) 由作图知： $AB = AD$ ，

$$\therefore \angle B = \angle BAD = 25^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 3\angle BAD,$$

$$\therefore \angle BAC = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle B + \angle BAC + \angle C = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle C > \angle BAC,$$

$$\therefore AB > BC.$$

【解析】

【分析】(1) 作 AB 的垂直平分线交 BC 于点 D ，则 $AD = BD$ ，则 $AD + CD = BC$ ；

(2) 求得 $\angle BAC = 75^\circ$ ， $\angle C = 80^\circ$ ，推出 $\angle C > \angle BAC$ ，即 $AB > BC$.

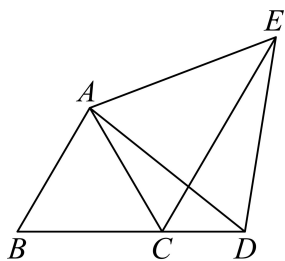
【小问 1 详解】

解：作图略

【小问 2 详解】

解：略

23. 如图，已知： $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 都是等边三角形，点 B 、 C 、 D 在一直线上，连接 CE .



(1) 求证: $\triangle ABD \cong \triangle ACE$;

(2) 若 $CE \perp AD$, 求证: $\angle EDC = 90^\circ$.

【答案】 (1) 证明: $\because \triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 都是等边三角形,

$$\therefore AB = AC, AD = AE, \angle BAC = \angle DAE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle CAD = \angle DAE + \angle CAD,$$

$$\text{即 } \angle BAD = \angle CAE,$$

在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACE$ 中,

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE, \\ AD = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE (\text{SAS});$$

(2) 证明: $\because \triangle ADE$ 是等边三角形,

$$\therefore AE = ED, \angle ADE = \angle AED = 60^\circ,$$

$$\because CE \perp AD,$$

$$\therefore \angle AEC = \angle CED = \frac{1}{2} \angle AED = 30^\circ,$$

$$\because \triangle ABD \cong \triangle ACE,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle AEC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE + \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\text{即 } \angle EDC = 90^\circ.$$

【解析】

【分析】 (1) 根据等边三角形的性质得到 $AB = AC, AD = AE, \angle BAC = \angle DAE = 60^\circ$, 进而得到 $\angle BAD = \angle CAE$, 根据 SAS 即可证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$;

(2) 根据等边三角形的性质得到 $AE = ED, \angle ADE = \angle AED = 60^\circ$, 进而根据三线合一得到

$\angle AEC = \angle CED = \frac{1}{2} \angle AED = 30^\circ$ ，根据全等三角形的性质得到 $\angle ADB = \angle AEC = 30^\circ$ ，进而得到 $\angle ADE + \angle ADB = 90^\circ$ ，即可证明 $\angle EDC = 90^\circ$ 。

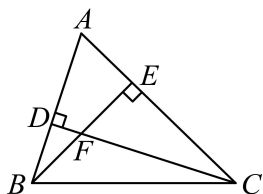
【小问 1 详解】

略；

【小问 2 详解】

略。

24. 如图， $\triangle ABC$ 的两条高 BE 、 CD 相交于点 F ， $CF = AB$ 。



(1) 求证： $AE = EF$ ；

(2) 连接 AF ，过点 F 作 $FG \parallel BC$ ，交 AC 边于点 G ，求证： $AF = FG$ 。

【答案】(1) 证明： $\because BE$ 、 CD 分别是 AC 、 AB 边上的高，

$$\therefore \angle AEB = \angle FEC = \angle ADC = 90^\circ;$$

$$\because \angle DAC + \angle ACD = 90^\circ, \angle EFC + \angle ACD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle EFC,$$

在 $\triangle AEB$ 与 $\triangle FEC$ 中

$$\begin{cases} \angle BAE = \angle FEC \\ \angle AEB = \angle FEC, \\ AB = FC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEB \cong \triangle FEC (\text{AAS})$$

$$\therefore AE = EF;$$

(2) 证明： $\because \triangle AEB \cong \triangle FEC$,

$$\therefore EB = EC, AE = EF,$$

$$\therefore \angle EBC = \angle ECB,$$

$$\therefore FG \parallel BC,$$

$$\therefore \angle EFG = \angle EBC, \angle EGF = \angle ECB,$$

$$\therefore \angle EGF = \angle EFG,$$

$$\therefore EF = EG,$$

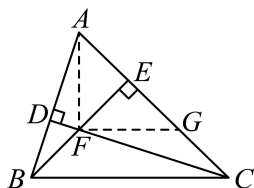
$$\therefore AE = EG,$$

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle GEF$ 中,

$$\begin{cases} AE = EG \\ \angle AEF = \angle GEF = 90^\circ, \\ EF = EF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle GEF \text{ (SAS)}$$

$$\therefore AF = FG.$$



【解析】

【分析】(1) 根据同角的余角相等, 得到 $\angle DAC = \angle EFC$, 再利用 “AAS” 证明全等即可;

(2) 利用等腰三角形的判定和性质, 得出 $EF = EG = AE$, 进而证明 $\triangle AEF \cong \triangle GEF$ (SAS) 即可.

【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

略

25. 数学探究课上, 老师给同学们展示了几道有趣的几何问题, 大家围绕图形中的面积关系、线段关系展开了思考和讨论, 请你也来尝试解决下面的问题.

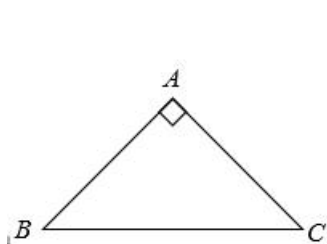


图 1

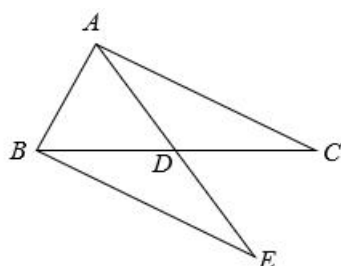


图 2

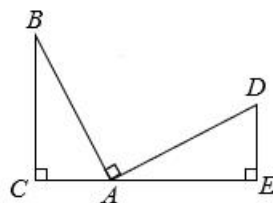


图 3

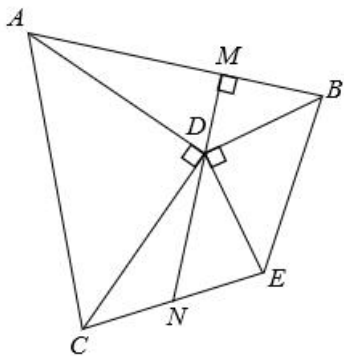


图 4

【探究初步】

探究 1 新定义：我们把两个面积相等但不全等的三角形叫做偏等积三角形.

(1) 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = 2$, D 为 AC 边上的一点, 若 $\triangle ABD$ 与 $\triangle CBD$ 为偏等积三角形, 则 $CD =$ _____;

(2) 如图 2, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2$, $AC = 4$, D 为 BC 边上的一点, 且满足 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 为偏等积三角形, 过点 B 作 $BE \parallel AC$, 交 AD 的延长线于点 E , 如果线段 AD 的长度为正整数, 那么 $AE =$ _____.

探究 2 如图 3, $\angle BAD = 90^\circ$, $AB = AD$, 过点 B 作 $BC \perp AC$ 于点 C , 过点 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E . 我们把这个数学模型称为 “K 字” 模型或 “一线三等角” 模型.

(3) 探究图 3 中线段 CE 、 BC 、 DE 之间的数量关系, 可得 _____.

【迁移应用】

(4) 如图 4, 已知 $\triangle ADC$ 与 $\triangle BDE$ 是有公共顶点且不全等的两个等腰三角形, 其中 $DA = DC$, $DB = DE$, $\angle ADC = \angle BDE = 90^\circ$, $\angle ADB > \angle CDE$, 过 D 作 $DM \perp AB$, 垂足为点 M , MD 的延长线与 CE 交于点 N , 请写出图中所有的偏等积三角形, 并选择其中一对进行证明.

【答案】 (1) 1; (2) 4;

(3) $CE = DE + BC$;

(4) 解: $\triangle CDN$ 与 $\triangle EDN$ 为偏等积三角形, $\triangle ADB$ 与 $\triangle CDE$ 为偏等积三角形, 证明如下:

如图所示, 过 E 作 $EP \perp DN$ 于点 P , 过 C 作 $CQ \perp DN$ 交 DN 延长线于点 Q .

$$\therefore \angle EPN = \angle EPD = \angle CQN = 90^\circ,$$

$$\because DM \perp AB,$$

$$\therefore \angle DMB = 90^\circ = \angle EPD,$$

$$\therefore \angle PDE + \angle PED = 90^\circ;$$

$$\therefore \angle BDE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PDE + \angle MDB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PED = \angle MDB,$$

$$\text{又} \because DE = BD,$$

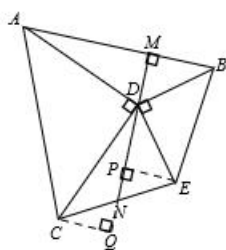
$$\therefore \triangle PED \cong \triangle MDB \text{ (AAS)},$$

$$\therefore PE = DM;$$

同理可证明 $\triangle QDC \cong \triangle MAD$,

$$\therefore CQ = DM,$$

$$\therefore CQ = PE,$$



$$\text{又} \because \angle QNC = \angle PNE, \angle CQN = \angle EPN,$$

$$\therefore \triangle EPN \cong \triangle CQN \text{ (AAS)},$$

$$\therefore CN = NE.$$

$$\therefore S_{\triangle CDN} = S_{\triangle EDN},$$

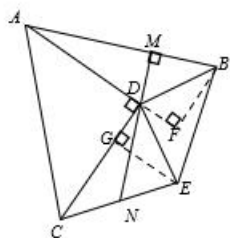
又 $\because \triangle ADC$ 与 $\triangle BDE$ 不全等,

$$\therefore DC \neq DE$$

$\therefore \triangle CDN$ 与 $\triangle EDN$ 不全等,

$\therefore \triangle CDN$ 与是偏等积三角形;

如图所示, 过 E 作 $EG \perp CD$ 于点 G , 过 B 作 $BF \perp AD$ 交 AD 延长线于点 F .



$$\therefore \angle BFD = \angle EGD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EDG + \angle ADB + \angle ADC + \angle BDE = 360^\circ, \quad \angle ADC = \angle BDE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EDG + \angle ADB = 180^\circ.$$

$$\text{又} \because \angle BDF + \angle ADB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle EDG = \angle BDF,$$

$$\text{又} \because DB = DE,$$

$$\therefore \triangle BFD \cong \triangle EGD \text{ (AAS)},$$

$$\therefore BF = EG.$$

$$\therefore S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BF, S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot EG,$$

$$\therefore S_{\triangle ADB} = S_{\triangle CDE},$$

$$\text{又} \because \angle ADB > \angle CDE, \quad AD = CD, DB = DE,$$

$$\therefore \triangle ADB \text{ 与 } \triangle CDE \text{ 不全等},$$

$$\therefore \triangle ADB \text{ 与 } \triangle CDE \text{ 是偏等积三角形}.$$

【解析】

【分析】(1) 根据定义可得 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CBD}$, 则可证明 $AD = CD$, 即 $CD = \frac{1}{2} AC = 1$;

(2) 根据定义可得 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{BD}{CD} = 1$, 则 $BD = CD$; 证明 $\triangle DBE \cong \triangle DCA$ 得到 $DE = DA, BE = AC = 4$;

根据三角形三边的关系求出 AD 的取值范围, 结合线段 AD 的长度为正整数, 求出 AD 的长即可求出 AE 的长;

(3) 证明 $\triangle CAB \cong \triangle EDA$ (AAS), 得到 $AC = DE, AE = BC$, 即可证明 $CE = AC + AE = DE + BC$;

(4) 过 E 作 $EP \perp DN$ 于点 P , 过 C 作 $CQ \perp DN$ 交 DN 延长线于点 Q . 证明 $\triangle PED \cong \triangle MDB$,

$\triangle QDC \cong \triangle MAD$, 推出 $CQ = PE$, 再证明 $\triangle EPN \cong \triangle CQN$, 得到 $CN = NE$, 则可推出 $S_{\triangle CDN} = S_{\triangle EDN}$,

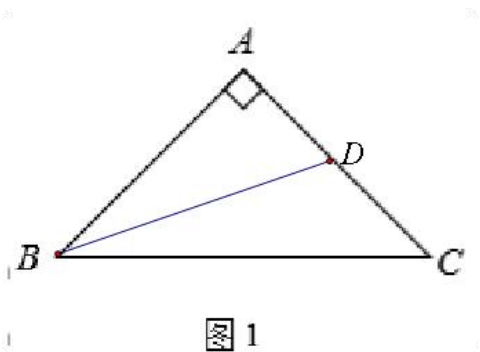
可证明 $DC \neq DE$, 则可证明 $\triangle CDN$ 与 $\triangle EDN$ 不全等, 故 $\triangle CDN$ 与是偏等积三角形; 过 E 作 $EG \perp CD$

于点 G , 过 B 作 $BF \perp AD$ 交 AD 延长线于点 F . 证明 $\triangle BFD \cong \triangle EGD$, 得到 $BF = EG$. 则可证明

$S_{\triangle ADB} = S_{\triangle CDE}$, 可证明 $\triangle ADB$ 与 $\triangle CDE$ 不全等, 则可证明 $\triangle ADB$ 与 $\triangle CDE$ 是偏等积三角形.

【小问 1 详解】

解: 如图 1 所示,



$\because \triangle ABD$ 与 $\triangle CBD$ 为偏等积三角形,

$$\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CBD},$$

$\because \angle BAC = 90^\circ$, 即 $AB \perp AC$,

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot AB, S_{\triangle CBD} = \frac{1}{2}CD \cdot AB,$$

$$\therefore \frac{1}{2}AD \cdot AB = \frac{1}{2}CD \cdot AB,$$

$$\therefore AD = CD, \text{ 即 } CD = \frac{1}{2}AC = 1;$$

【小问 2 详解】

解: $\because \triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 为偏等积三角形,

$$\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{BD}{CD} = 1,$$

$$\therefore BD = CD;$$

$$\because BE \parallel AC,$$

$$\therefore \angle DBE = \angle DCA, \angle DEB = \angle DAC,$$

$$\therefore \triangle DBE \cong \triangle DCA (\text{SAS})$$

$$\therefore DE = DA, BE = AC = 4;$$

在 $\triangle ABE$ 中, $BE - AB < AE < BE + AB$,

$$\therefore 4 - 2 < AE < 4 + 2, \text{ 即 } 2 < 2AD < 6,$$

$$\therefore 1 < AD < 3,$$

$\because$ 线段 AD 的长度为正整数,

$$\therefore AD = 2,$$

$$\therefore AE = 4;$$

【小问 3 详解】

解: $\because BC \perp AC, DE \perp AC,$

$$\therefore \angle C = \angle E = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B + \angle CAB = 90^\circ;$$

$$\because \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAB + \angle EAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle EAD,$$

又 $\because AB = DA,$

$$\therefore \triangle CAB \cong \triangle EDA (\text{AAS}),$$

$$\therefore AC = DE, AE = BC,$$

$$\therefore CE = AC + AE = DE + BC;$$

【小问 4 详解】

略