

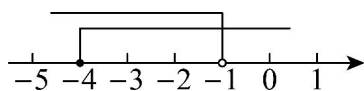
上海市宝山区 2025-2026 学年第二学期宝山实验学校七年级期末考试

数学试卷

2025 学年第二学期七年级数学期末测试卷

一、单选题（每题 2 分）

1. 一个不等式组的解集在数轴上表示如图，则该不等式组的解集是（ ）



- A. $-4 \leq x \leq -1$ B. $-4 < x < -1$
C. $-4 < x \leq -1$ D. $-4 \leq x < -1$

【答案】D

【解析】

【分析】根据一元一次不等式的解集在数轴上的表示方法以及包含用实心点，不包含用空心点解答即可.

【详解】解：由数轴图可知，该不等式组的解集是 $-4 \leq x < -1$.

2. 下列说法中，正确的是（ ）

- A. 两个等边三角形一定全等 B. 两个全等三角形的周长相等
C. 面积相等的两个三角形一定全等 D. 三个角对应相等的两个三角形全等

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查全等三角形的性质，根据全等三角形的定义和性质判断各选项的正确性.

【详解】解：∵全等三角形的对应边相等，

∴它们的周长相等，故 B 正确；

A 项两个等边三角形可能大小不同，不一定全等；

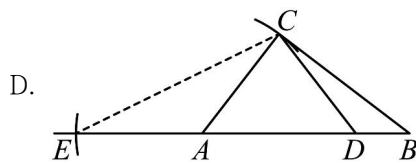
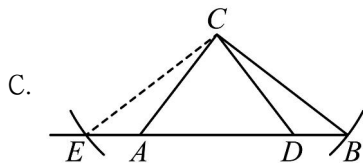
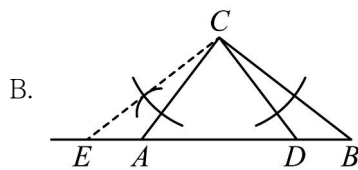
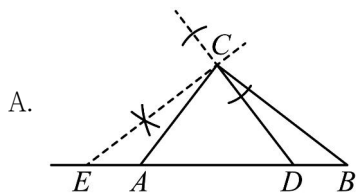
C 项面积相等的三角形形状可能不同，不一定全等；

D 项三个角对应相等的三角形相似，但不一定全等，

故选：B.

3. 如图，点 B ， B' ， C ， C' 在同一直线上，已知 $\angle ABC = \angle A'B'C'$ ， $BB' = CC'$ ，添加下列一个条件，不能判定 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ 的是（ ）

使得 $CE \perp CD$ ，垂足为 C 。下面选项中尺规作图的痕迹错误的是（ ）



【答案】D

【解析】

【详解】解：A. 由作法可知 $CE \perp CD$ ，符合题意；

B. 由作法可知 $\angle ECA = \angle DCB$ ，

$$\therefore \angle ACD + \angle DCB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD + \angle ECA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ECD = 90^\circ,$$

$\therefore CE \perp CD$ ，符合题意；

C. 由作法可知 $CE = CB$ ，

$$\therefore \angle CEA = \angle CBD.$$

$$\therefore AC = CD,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle CDA,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle CDB,$$

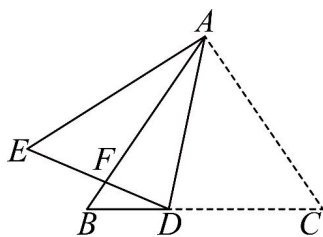
$$\therefore \triangle CAE \cong \triangle CDB (\text{AAS}),$$

$$\therefore \angle ECA = \angle DCB,$$

由 B 可知， $CE \perp CD$ ，符合题意；

D. 由作法可知 $AE = AC$ ，由此作法无法说明 $CE \perp CD$ ，故不符合题意.

6. 如图，在三角形纸片 ABC 中， $AB = AC$ ，点 D 在边 BC 上（点 B ， D 不重合， $CD > BD$ ），将 $\triangle ACD$ 沿 AD 折叠后得到 $\triangle AED$ ， DE 交 AB 于点 F 。若 $AD = AF$ ，则 $\angle EAD$ 与 $\angle BAC$ 的数量关系正确的是（ ）



A. $\angle EAD = \frac{3}{4} \angle BAC$

B. $\angle EAD = \frac{2}{3} \angle BAC$

C. $\angle EAD = \frac{3}{5} \angle BAC$

D. $\angle EAD = \frac{4}{7} \angle BAC$

【答案】B

【解析】

【分析】设 $\angle BAC = \alpha$ ， $\angle EAD = x$ ，利用折叠对应角相等、等腰三角形底角相等，结合三角形外角与内角和定理建立方程，化简推导两角数量关系即可.

【详解】解：设 $\angle BAC = \alpha$ ， $\angle EAD = x$ ，

$\because$ 将 $\triangle ACD$ 沿 AD 折叠得到 $\triangle AED$ ，

$$\therefore \angle CAD = \angle EAD = x,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle BAC - \angle CAD = \alpha - x,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle B = \angle C = \frac{180^\circ - \alpha}{2},$$

$$\therefore \angle ADC = \angle B + \angle BAD = \frac{180^\circ - \alpha}{2} + (\alpha - x) = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}x,$$

$$\text{由折叠得 } \angle ADE = \angle ADC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}x,$$

$$\because AD = AF,$$

$$\therefore \angle ADF = \angle AFD,$$

在 $\triangle ADF$ 中， $\angle BAD + \angle ADF + \angle AFD = 180^\circ$ 即 $\angle BAD + 2\angle ADF = 180^\circ$ ，

$$\therefore (\alpha - x) + 2\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}x\right) = 180^\circ,$$

$$\therefore \alpha - x + 180^\circ + \alpha - 2x = 180^\circ,$$

$$\therefore 2\alpha = 3x,$$

$$\therefore x = \frac{2}{3}\alpha,$$

$$\text{即 } \angle EAD = \frac{2}{3} \angle BAC.$$

二、填空题 (每题 3 分)

7. 已知 $a < b$ ，则 $2 - a$ _____ $2 - b$. (填 “>”、“<” 或 “=”)

【答案】>

【解析】

【分析】利用不等式的性质对已知不等式进行变形，即可比较两个代数式的大小.

【详解】解：∵ $a < b$ ，不等式两边同时乘以 -1 ，根据不等式的性质，不等号方向改变，得 $-a > -b$ ，
不等式两边同时加上 2 ，根据不等式的性质，不等号方向不变，得 $2 - a > 2 - b$.

8. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A > \angle C$ ，则 AB _____ BC . (填 “>”、“<” 或 “=”)

【答案】<

【解析】

【分析】确定两个角对应的对边，利用大角对大边即可比较边长大小.

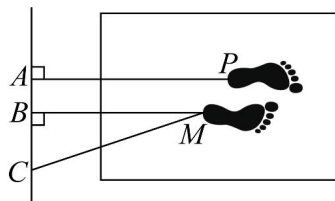
【详解】解：在 $\triangle ABC$ 中，根据三角形边角关系：在同一个三角形中，大角对大边.

$\angle A$ 的对边为 BC ， $\angle C$ 的对边为 AB ，

已知 $\angle A > \angle C$ ，

可得 $BC > AB$ ，即 $AB < BC$.

9. 如图，直线 AB 是起跳线，脚印是小明跳入沙坑时留下的痕迹，体育老师测得线段_____的长度作为小明此次的跳远成绩.



【答案】 BM

【解析】

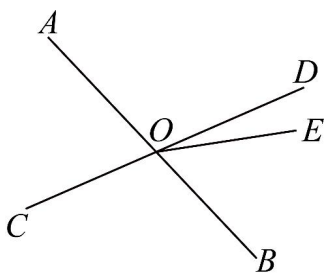
【分析】根据跳远成绩的测量规则，即测量后脚脚后跟落地点到起跳线的垂直距离，结合图形中的垂直符号确定对应的线段.

【详解】解：根据跳远运动的规则，成绩是后脚脚后跟落地点到起跳线的垂直距离.

由图可知，线段 BM 垂直于起跳线，线段 CM 不垂直于起跳线，点 P 不是后脚脚后跟，

因此，体育老师测得线段 BM 的长度作为小明此次的跳远成绩.

10. 如图，直线 AB ， CD 相交于点 O ， $\angle AOD = 110^\circ$ ， $\angle BOC = 2\angle BOE$ ，则 $\angle BOE$ 的度数为_____.



【答案】

55°

【解析】

【分析】根据对顶角相等得到 $\angle BOC = \angle AOD = 110^\circ$ ，再根据 $\angle BOC = 2\angle BOE$ ，即可求出 $\angle BOE$ 的度数.

【详解】解： $\because \angle AOD = 110^\circ$,

$\therefore \angle BOC = \angle AOD = 110^\circ$.

$\because \angle BOC = 2\angle BOE$,

$\therefore \angle BOE = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2} \times 110^\circ = 55^\circ$.

11. 如果 $a > b$ ，那么 $a^2 > b^2$ ，这个命题是_____命题（填“真”或“假”）.

【答案】假

【解析】

【分析】举反例说明其为假命题即可.

【详解】解：取 $a = 0$ ， $b = -1$ ，符合 $a > b$ ，

此时 $a^2 = 0, b^2 = 1, a^2 < b^2$ ，

$\therefore$ 如果 $a > b$ ，那么 $a^2 > b^2$ ，这个命题是假命题.

12. 等腰三角形的两边 a 、 b 满足 $(a-3)^2 + |b-8| = 0$ ，则该等腰三角形的周长是_____.

【答案】19

【解析】

【分析】根据非负数的性质求出 a 、 b 的值，分情况讨论等腰三角形的腰长，结合三角形三边关系判断能否构成三角形，进而计算周长.

【详解】解： $\because (a-3)^2 + |b-8| = 0$ ，且 $(a-3)^2 \geq 0$ ， $|b-8| \geq 0$ ，

$\therefore a-3 = 0, b-8 = 0$ ，

解得 $a = 3, b = 8$,

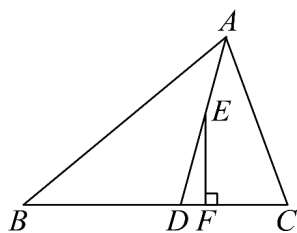
∴ 该三角形是等腰三角形,

∴ 三边长为 $3, 3, 8$ 或 $8, 8, 3$,

∵ $3 + 3 < 8$, 不满足三角形三边关系, 该情况不合题意, 舍去,

∴ 等腰三角形的周长为 $8 + 8 + 3 = 19$.

13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 平分 $\angle BAC$, E 为线段 AD 上一点, 过点 E 作 $EF \perp BC$, 若 $\angle B = 40^\circ$, $\angle C = 70^\circ$, 则 $\angle DEF =$ _____ $^\circ$.



【答案】 15

【解析】

【分析】 根据三角形内角和定理得出 $\angle BAC = 70^\circ$, 确定 $\angle BAD = \angle CAD = 35^\circ$, 得出 $\angle EDF = 75^\circ$, 再由三角形内角和定理即可求解.

【详解】 解: ∵ $\angle B = 40^\circ$, $\angle C = 70^\circ$,

∴ $\angle BAC = 180^\circ - 40^\circ - 70^\circ = 70^\circ$,

∵ AD 平分 $\angle BAC$,

∴ $\angle BAD = \angle CAD = 35^\circ$,

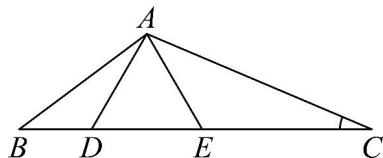
∴ $\angle EDF = 180^\circ - 35^\circ - 70^\circ = 75^\circ$,

∵ $EF \perp BC$,

∴ $\angle EFD = 90^\circ$,

∴ $\angle DEF = 180^\circ - 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$.

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAD = \angle C$, $\triangle ADE$ 是等边三角形, 则 $\angle BAC =$ _____ 度.



【答案】 120

【解析】

【分析】 根据等边三角形的性质可得 $\angle ADE = \angle DAE = \angle AED = 60^\circ$, 根据三角形的外角性质得到

$\angle B + \angle BAD = \angle ADE = 60^\circ$, $\angle C + \angle CAE = \angle AED = 60^\circ$, 结合 $\angle BAD = \angle C$, 推出 $\angle B = \angle CAE$, 在 $\triangle ABC$ 中, 根据三角形的内角和定理求出 $\angle BAD + \angle CAE = 60^\circ$, 即可求解.

【详解】解: $\because \triangle ADE$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle ADE = \angle DAE = \angle AED = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle B + \angle BAD = \angle ADE = 60^\circ, \angle C + \angle CAE = \angle AED = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle B + \angle BAD = \angle CAE + \angle C,$$

$$\because \angle BAD = \angle C,$$

$$\therefore \angle B = \angle CAE,$$

$$\therefore \angle B + \angle BAE + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle B + \angle BAD + \angle DAE + \angle CAE + \angle C = 180^\circ$$

$$2\angle BAD + 2\angle CAE + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\angle BAD + \angle CAE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle BAD + \angle CAE + \angle DAE = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ,$$

故答案为: 120° .

15. 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x+5 > 0 \\ x-m \leq 1 \end{cases}$ 有 3 个整数解, 则实数 m 的取值范围是_____.

【答案】 $-3 \leq m < -2$

【解析】

【分析】解不等式组, 根据不等式组有 3 个整数解得出关于 m 的不等式组, 进而可求得 m 的取值范围.

【详解】解: 解不等式组 $\begin{cases} x+5 > 0 \\ x-m \leq 1 \end{cases}$ 得: $-5 < x \leq m+1$,

$\therefore$ 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x+5 > 0 \\ x-m \leq 1 \end{cases}$ 有 3 个整数解,

$\therefore$ 这 3 个整数解为 $-4, -3, -2$,

$$\therefore -2 \leq m+1 < -1,$$

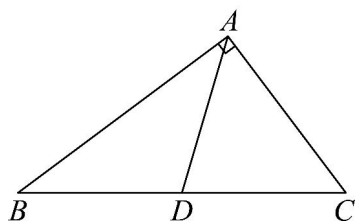
解得: $-3 \leq m < -2$,

故答案为: $-3 \leq m < -2$.

【点睛】本题考查了解一元一次不等式组, 一元一次不等式组的整数解, 正确得出关于 m 的不等式组是解题的关键.

16. 如图, $Rt\triangle ABC$ 中, $AB=8$, $AC=6$, $BC=10$, D 为 BC 的中点. 动点 P 从点 B 出发, 沿 $B \rightarrow A \rightarrow C$

的路径在 $\triangle ABC$ 的边上运动，当 $\triangle BDP$ 的面积为 6 时，点 P 运动的路程长为_____.



【答案】 4 或 11

【解析】

【分析】 根据中线的性质可得 $S_{ABD} = S_{ACD} = \frac{1}{2}S_{ABC} = 12$ ，然后分两种情况：当点 P 在 AB 边上时，当点 P 在 AC 边上时，即可求解.

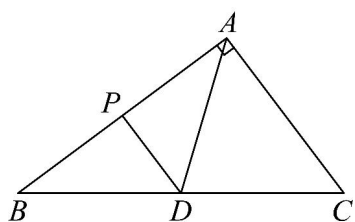
【详解】 解： $\because Rt\triangle ABC$ 中， $AB=8$ ， $AC=6$ ， $BC=10$ ，

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \times AC = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24,$$

$\because D$ 为 BC 的中点，

$$\therefore S_{ABD} = S_{ACD} = \frac{1}{2}S_{ABC} = 12,$$

当点 P 在 AB 边上时，如图，



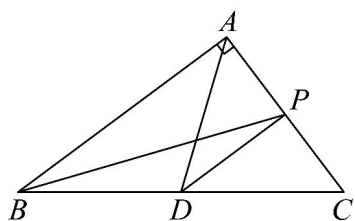
$\because \triangle BDP$ 的面积为 6，

$$\therefore S_{\triangle BDP} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABD},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 为 } AB \text{ 的中点，即 } BP = \frac{1}{2}AB = 4,$$

此时点 P 运动的路程长为 4；

当点 P 在 AC 边上时，如图，



$\because D$ 为 BC 的中点， $\triangle BDP$ 的面积为 6，

$$\therefore S_{\triangle BDP} = S_{\triangle DCP} = 6,$$

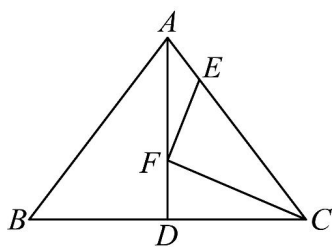
$$\therefore S_{\triangle DCP} = \frac{1}{2} S_{\triangle ACD},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 为 } AC \text{ 的中点, 即 } AP = \frac{1}{2} AC = 3,$$

此时点 P 运动的路程长为 $8+3=11$;

综上所述, 点 P 运动的路程长为 4 或 11.

17. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB=AC=10$, $BC=12$, $AD=8$, $AD \perp BC$, E 、 F 分别为 AC 、 AD 上两动点, 连接 CF , EF , 则 $CF+EF$ 的最小值为_____.

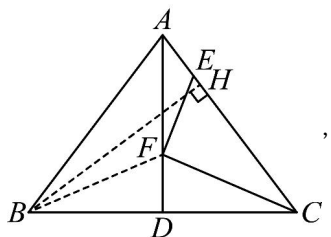


【答案】 $\frac{48}{5}$

【解析】

【分析】根据题意得到点 B, C 关于直线 AD 对称, 利用对称点的性质, 将求 $CF+EF$ 的最小值转化为求 $BF+EF$ 的最小值, 再利用点到直线垂线段最短求解.

【详解】解: 如图所示, 连接 BF , 过点 B 作 $BH \perp AC$ 于点 H ,



$$\therefore AB=AC=10, BC=12, AD=8,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} BC \cdot AD,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times 10 BH = \frac{1}{2} \times 12 \times 8,$$

$$\text{解得 } BH = \frac{48}{5},$$

$$\therefore AB=AC, AD \perp BC,$$

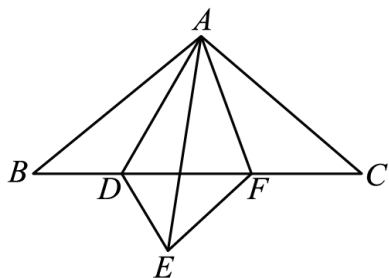
$\therefore AD$ 所在直线是线段 BC 的垂直平分线,

∴ 点 B, C 关于直线 AD 对称,

$$\therefore BF = CF, CF + EF = BF + EF \geq BH = \frac{48}{5},$$

$$\therefore CF + EF \text{ 的最小值为 } \frac{48}{5}.$$

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 100^\circ$, D 是 BC 上的动点, 连接 AD , 将 $\triangle ABD$ 沿 AD 折叠, 得到 $\triangle AED$, 且点 E 在直线 BC 的下方, AF 平分 $\angle CAE$, 交 BC 于点 F , 连接 EF . 若 $\triangle DEF$ 是等腰三角形, 则 $\angle BAD$ 的度数可以是_____.



【答案】 25° 或 10° 或 40°

【解析】

【分析】 先根据等腰 $\triangle ABC$ 的边长和角度条件, 计算出底角 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的度数, 设 $\angle BAD$ 的度数为 x , 利用折叠的性质得到对应边、对应角相等的关系, 用 x 表示出 $\angle DAE$ 、 $\angle BAE$, 进而表示出 $\angle CAE$ 的度数, 根据角平分线的性质, 得到 $\angle EAF$ 和 $\angle CAF$ 的度数表达式, 结合角度和差关系推导 $\triangle AEF$ 和 $\triangle ACF$ 的全等条件, 得到 $\angle AEF$ 的度数, 用 x 表示出 $\triangle DEF$ 三个内角的度数, 再分三种情况讨论等腰 $\triangle DEF$ 的腰的对应关系, 分别列方程求解 x .

【详解】 $\because AB = AC$, $\angle BAC = 100^\circ$,

$$\therefore \angle B = \angle C = 40^\circ,$$

$\because$ 折叠,

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle AED, \text{ 设 } \angle BAD = \alpha,$$

$$\therefore AB = AE, \angle BAD = \angle EAD = \alpha, \angle AED = \angle B = 40^\circ,$$

$$\text{又 } \because AB = AC,$$

$$\therefore AE = AC;$$

且 AF 平分 $\angle CAE$,

$$\therefore \angle EAF = \angle CAF,$$

结合 $AF = AF$,

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle ACF (SAS),$$

$$\therefore \angle AEF = \angle C = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle DEF = \angle AED + \angle AEF = 40^\circ + 40^\circ = 80^\circ,$$

$$\angle EDF = \angle ADE - \angle ADF = \angle ADB - \angle ADF = (180^\circ - 40^\circ - \alpha) - (40^\circ + \alpha) = 100^\circ - 2\alpha,$$

当 $DF = EF$ 时,

$$\therefore \angle EDF = \angle DEF = 80^\circ, \text{ 即 } 100^\circ - 2\alpha = 80^\circ,$$

解得 $\alpha = 10^\circ$,

当 $DE = EF$ 时,

$$\therefore \angle EDF = \angle DFE = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ, \text{ 即 } 100^\circ - 2\alpha = 50^\circ,$$

解得 $\alpha = 25^\circ$,

当 $DE = DF$ 时,

$$\therefore \angle DFE = \angle DEF = 80^\circ, \angle EDF = 180^\circ - 80^\circ - 80^\circ = 20^\circ,$$

即 $100^\circ - 2\alpha = 20^\circ$,

解得 $\alpha = 40^\circ$,

$\therefore \angle BAD$ 的度数为 10° 、 25° 或 40° .

【点睛】 本题考查了等腰三角形的性质、折叠变换的性质、角平分线的定义、全等三角形的判定与性质以及分类讨论思想相关知识点，其中利用折叠性质和角平分线定义推导线段角的关系、证明三角形全等，再结合分类讨论思想分析等腰三角形的不同情况是解题的关键.

三、解答题 (19 题 5 分, 20、22 题 6 分, 21、24 题 8 分, 23 题 7 分, 25 题 12 分)

19. 解不等式 $\frac{2x+1}{2} > \frac{x-2}{4} - 1$.

【答案】 $x > -\frac{8}{3}$

【解析】

【详解】 解: $\frac{2x+1}{2} > \frac{x-2}{4} - 1$,

不等式两边同乘 4, 得 $2(2x+1) > x-2-4$,

去括号, 得 $4x+2 > x-6$,

移项, 得 $4x-x > -6-2$,

合并同类项，得 $3x > -8$ ，

系数化为 1，得 $x > -\frac{8}{3}$ ．

20. 解不等式组： $\begin{cases} 3x+1 > 2(x-1) \\ \frac{2x+2}{3} \geq \frac{3x}{2}-1 \end{cases}$ ，并写出满足不等式组的所有整数解．

【答案】 $-3 < x \leq 2$ ；整数解为 $-2, -1, 0, 1, 2$

【解析】

【分析】 先分别求解两个不等式，再取公共部分得到不等式的解集，最后在解集中写出所有整数解即可．

【详解】 $\begin{cases} 3x+1 > 2(x-1) \text{ ①} \\ \frac{2x+2}{3} \geq \frac{3x}{2}-1 \text{ ②} \end{cases}$

解不等式①，得 $3x - 2x > -2 - 1$

解得 $x > -3$ ，

解不等式②，得 $4x + 4 \geq 9x - 6$

解得 $x \leq 2$ ，

$\therefore$ 原不等式组的解集为 $-3 < x \leq 2$

$\therefore$ 不等式组的所有整数解为 $-2, -1, 0, 1, 2$ ．

21. 为丰富我校学生的文化生活，打造书香校园，学校计划购买一批图书．若同时购进甲种图书 7 本和乙种图书 4 本，共需 290 元；若同时购进甲种图书 3 本和乙种图书 6 本，共需 210 元．

(1) 求甲、乙两种图书的单价各是多少元？

(2) 若学校计划购买这两种图书共 60 本，要求每种都要购买，且甲种图书的数量不少于乙种图书的数量，又根据学校预算，购买总金额不能超过 1520 元，请问学校共有哪几种购买方案？

【答案】 (1) 甲种图书的单价是 30 元，乙种图书的单价是 20 元；

(2) 学校共有 3 种购买方案，分别是：方案一：购买甲种图书 30 本，乙种图书 30 本；方案二：购买甲种图书 31 本，乙种图书 29 本；方案三：购买甲种图书 32 本，乙种图书 28 本．

【解析】

【分析】 (1) 设甲、乙两种图书的单价为未知数，根据题干给出的两种购买总花费列出二元一次方程组，求解即可得到单价；

(2) 设购买甲种图书的数量，根据题目中的购买限制条件列出一元一次不等式组，取范围内的正整数即可得到所有购买方案．

【小问 1 详解】

解：设甲种图书的单价是 x 元，乙种图书的单价是 y 元.

$$\text{根据题意得} \begin{cases} 7x + 4y = 290 \\ 3x + 6y = 210 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 30 \\ y = 20 \end{cases},$$

答：甲种图书的单价是 30 元，乙种图书的单价是 20 元；

【小问 2 详解】

解：设购买甲种图书 a 本，则购买乙种图书 $(60 - a)$ 本.

$$\text{根据题意得} \begin{cases} a \geq 60 - a \\ 30a + 20(60 - a) \leq 1520 \\ a > 0 \\ 60 - a > 0 \end{cases},$$

解不等式 $a \geq 60 - a$ ，得 $a \geq 30$ ；

解不等式 $30a + 20(60 - a) \leq 1520$ ，得 $a \leq 32$ ；

解不等式 $60 - a > 0$ 得， $a < 60$ ；

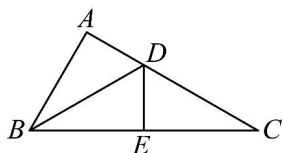
$\therefore$ 不等式组的解集为 $30 \leq a \leq 32$.

$\therefore a$ 为正整数，

$\therefore a$ 的取值为 30, 31, 32.

答：学校共有 3 种购买方案，分别是：方案一：购买甲种图书 30 本，乙种图书 30 本. 方案二：购买甲种图书 31 本，乙种图书 29 本. 方案三：购买甲种图书 32 本，乙种图书 28 本.

22. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， BD 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 D ， E 为 BC 上一点， $AB = EB$ ，连接 DE . 求证： $DE \perp CB$.



【答案】见解析

【解析】

【分析】 BD 是角平分线可得 $\angle ABD = \angle EBD$ ，已知 $AB = EB$ ，且两个三角形有公共边 BD . 所以可根据 SAS 判定定理证明 $\triangle ABD \cong \triangle EBD$. 由全等三角形对应角相等，可得 $\angle DEB = \angle A$ ，如果 $\angle A = 90^\circ$ ，

那么 $\angle DEB = 90^\circ$ ，即可推出 $DE \perp CB$ 。

【详解】证明： $\because BD$ 平分 $\angle ABC$ ，

$$\therefore \angle ABD = \angle EBD,$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle EBD$ 中，

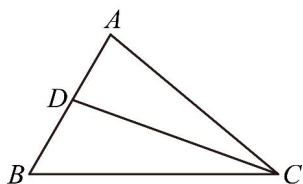
$$\begin{cases} AB = EB \\ \angle ABD = \angle EBD, \\ BD = BD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle EBD (SAS),$$

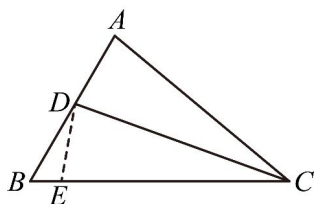
$$\therefore \angle BED = \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore DE \perp CB.$$

23. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， CD 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 D ，且 $\angle A = 2\angle B$ ，求证： $BC = AD + AC$ 。



【答案】证明：如图，在 BC 边上取点 E ，使 $EC = AC$ ，连接 DE ，



$\because CD$ 平分 $\angle ACB$ ，

$$\therefore \angle ACD = \angle ECD,$$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ECD$ 中，

$$\begin{cases} AC = EC \\ \angle ACD = \angle ECD, \\ DC = DC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle ECD (SAS),$$

$$\therefore CE = AC, \quad AD = DE, \quad \angle A = \angle DEC,$$

$$\therefore \angle A = 2\angle B, \quad \angle DEC = \angle B + \angle BDE,$$

$$\therefore \angle B = \angle BDE,$$

$$\therefore BE = DE = AD,$$

$$\therefore BC = BE + CE = AD + AC.$$

【解析】

【分析】在 BC 边上取点 E ，使 $EC = AC$ ，连接 DE ，由角平分线的定义可得 $\angle ACD = \angle ECD$ ，再利用 SAS 证明 $\triangle ACD \cong \triangle ECD$ ，可得 $CE = AC$ ， $AD = DE$ ， $\angle A = \angle DEC$ ，再结合三角形外角的定义及性质得出 $\angle B = \angle BDE$ ，推出 $BE = DE = AD$ ，即可得证。

【详解】略。

24. 综合与实践.

【了解定义】如图 1，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 中， $AB = AC$ ， $DB = DC$ ，点 A ， D 在底 BC 的同侧。我们把具有这种位置关系的两个等腰三角形叫做同位等腰三角形。在同位等腰三角形中，两个三角形中腰的夹角叫做腰角，顶角顶点的连线叫做轴线。如图 1 中 $\angle ABD$ 和 $\angle ACD$ 是腰角，线段 AD 是轴线。

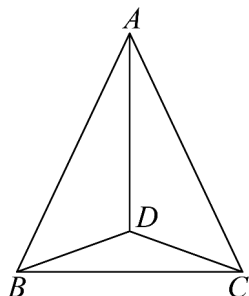


图1

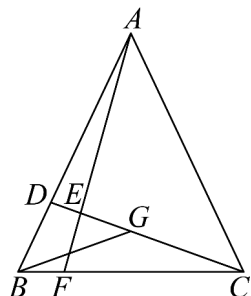


图2

(1) 【探究性质】小明通过测量、折纸的方法猜想同位等腰三角形有以下性质：同位等腰三角形的两个腰角相等，轴线所在的直线垂直平分底边。小明利用图 1 给出如下已知、求证，请帮助小明完成证明。

已知：如图 1， $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 是同位等腰三角形，连接 AD 。求证： $\angle ABD = \angle ACD$ ，直线 AD 是线段 BC 的垂直平分线。

(2) 【探究运用】如图 2，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 D 在 AB 上， $\angle ACD = 45^\circ$ ， $AE \perp CD$ ，垂足为 E ， AE 的延长线与 BC 交于点 F ，点 G 在线段 EC 上，且 $EG = EF$ ，连接 BG 。求证： $\triangle ABC$ 和 $\triangle GBC$ 是同位等腰三角形。

【答案】(1) 证明： $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 是同位等腰三角形，

$$\therefore AB = AC, DB = DC.$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB, \angle DBC = \angle DCB.$$

$$\therefore \angle ABC - \angle DBC = \angle ACB - \angle DCB, \text{ 即 } \angle ABD = \angle ACD.$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \text{点 } A \text{ 在线段 } BC \text{ 的垂直平分线上.}$$

$$\because DB = DC,$$

$\therefore$ 点 D 在线段 BC 的垂直平分线上.

$\therefore$ 直线 AD 是线段 BC 的垂直平分线.

(2) 证明: 如图, 作射线 AG 交 BC 于点 H .

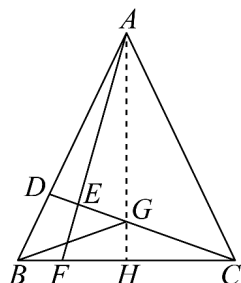


图2

$$\because AE \perp CD, \text{ 垂足为 } E,$$

$$\therefore \angle AEG = \angle CEF = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle GAE + \angle AGE = 90^\circ.$$

$$\because \angle ACE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle CAE = 90^\circ - \angle ACE = 45^\circ.$$

$$\therefore \angle CAE = \angle ACE.$$

$$\therefore AE = CE.$$

$$\because EF = EG,$$

$$\therefore \triangle AEG \cong \triangle CEF \text{ (SAS)}.$$

$$\therefore \angle GAE = \angle FCE.$$

$$\because \angle AGE = \angle CGH,$$

$$\therefore \angle CGH + \angle FCE = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle GHC = 180^\circ - \angle CGH - \angle FCE = 90^\circ.$$

$$\therefore AH \perp BC.$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore BH = CH.$$

$$\therefore GB = GC.$$

$\therefore \triangle ABC$ 和 $\triangle GBC$ 是同位等腰三角形.

【解析】

【分析】 (1) 利用同位等腰三角形的性质得 $AB = AC, DB = DC$, 得 $\angle ABC = \angle ACB, \angle DBC = \angle DCB$,

从而有 $\angle ABD = \angle ACD$ ；再由 $AB = AC, DB = DC$ ，结合线段垂直平分线的判定即可证明；

(2) 作射线 AG 交 BC 于点 H 。由已知 $\angle CAE = \angle ACE$ ，则 $AE = CE$ 。再证明 $\triangle AEG \cong \triangle CEF$ 得 $\angle GAE = \angle FCE$ ，即可得证；

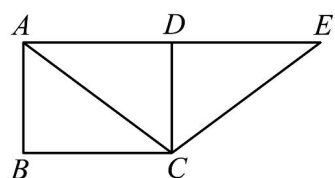
【小问 1 详解】

略

【小问 2 详解】

略

25. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 6$ ， $BC = 8$ ， $AC = 10$ ，将 $\triangle ABC$ 绕斜边中点旋转 180° 得到 $\triangle CDA$ ，再将 $\triangle CDA$ 沿 CD 翻折得到 $\triangle CDE$ 。动点 P 从 A 出发，沿线段 AE 以每秒 1 个单位长度的速度向点 E 运动，动点 Q 从 A 出发，沿 AC 以每秒 1 个单位长度的速度向点 C 运动，再沿 CB 以每秒 2 个单位长度的速度向点 B 运动。 P ， Q 两点同时出发，当点 Q 到达点 B 时， P ， Q 两点同时停止运动。设点 P 的运动时间为 t 秒 ($t > 0$)。



(1) 直接写出线段 AE 的长为_____；用含 t 的式子表示：当点 Q 在 AC 边上运动时， CQ 的长为_____，当点 Q 在 CB 边上运动时， CQ 的长为_____；

(2) 当点 Q 在 CB 边上运动时，是否存在 t 值，使以点 A ， C ， Q 为顶点的三角形与以点 C ， E ， P 为顶点的三角形全等？若存在，求出符合条件的 t 值，若不存在，请说明理由；

(3) 连接 PQ ，当直线 PQ 平分四边形 $ABCE$ 的面积时，求 t 的值；

(4) 当 t 满足_____条件时， $\triangle APQ$ 是以 PQ 为底或以 AP 为底的等腰三角形。

【答案】(1) 16， $10 - t$ ， $2t - 20$

(2) 存在， $t = 12$

(3) 当运动时间为 7 秒时直线 PQ 平分四边形 $ABCE$ 的面积

(4) $0 < t \leq 10$ 或 $t = \frac{56}{5}$

【解析】

【分析】本题考查了旋转、轴对称的性质、全等三角形的判定、等腰三角形的定义等知识。

- (1) 根据旋转、轴对称的性质求解即可；
- (2) 已知 $CE=AC=10$ ， $\angle ACQ = \angle CEP$ ，要使点 A ， C ， Q 为顶点的三角形与以点 C ， E ， P 为顶点的三角形全等，只需 $CQ=EP$ ，列出方程求解即可；
- (3) 分点 Q 在 AC 上运动和点 Q 在 CB 边上运动两种情况讨论，用含 t 的方程表示出左侧梯形的面积，解方程即可；
- (4) 分点 Q 在 AC 上运动和点 Q 在 CB 边上运动两种情况讨论：当点 Q 在 AC 上运动时， $\triangle APQ$ 是以 PQ 为底的等腰三角形；当点 Q 在 CB 边上运动时， $\triangle APQ$ 只可能是以 AP 为底的等腰三角形，列出方程求解即可。

【小问 1 详解】

解： $\because \triangle ABC$ 绕斜边 AC 的中点旋转 180° 得到 $\triangle CDA$ ，

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA,$$

$$\therefore AD = BC = 8, DC = AB = 6, \angle ADC = \angle ABC = 90^\circ, \angle DAC = \angle BCA.$$

又 $\because \triangle CDA$ 沿 CD 翻折得到 $\triangle CDE$ ，

$$\therefore DE = AD = 8, \text{ 且 } A, D, E \text{ 共线}, \angle DAC = \angle DEC$$

$$\therefore AE = AD + DE = 8 + 8 = 16.$$

当点 Q 在 AC 边上运动时，

$$\because AQ = t, AC = 10, \therefore CQ = AC - AQ = 10 - t.$$

当点 Q 在 CB 边上运动时，从点 C 到点 Q 的运动时间为 $(t-10)$ 秒，速度为 2 个单位长度/秒，

$$\therefore CQ = 2(t-10) = 2t - 20.$$

故答案为：16， $10-t$ ， $2t-20$ ；

【小问 2 详解】

解：当 Q 在 CB 边上运动时， $CQ = 2t - 20$ ， $AP = t$ ， $PE = AE - AP = 16 - t$ 。

$$\because CE = AC = 10, \angle ACQ = \angle CEP,$$

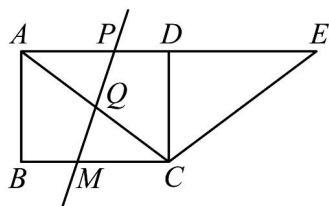
$\therefore$ 要使点 A ， C ， Q 为顶点的三角形与以点 C ， E ， P 为顶点的三角形全等，

只需 $CQ = EP$ ，即 $2t - 20 = 16 - t$ ，解得 $t = 12$ ；

【小问 3 详解】

解：如图，当点 Q 在 AC 上运动时，直线 PQ 交 BC 于点 M ， $0 \leq t \leq 10$ ， $AP = t$ ，

$$AQ = t, CQ = AC - AQ = 10 - t,$$



$$\therefore AP = AQ,$$

$$\therefore \angle QPA = \angle PQA,$$

$$\because \angle DAC = \angle BCA, \angle PQA = \angle MQC,$$

$$\therefore AP \parallel MC,$$

$$\therefore \angle QPA = \angle QMC = \angle MQC,$$

$$\therefore CM = CQ = 10 - t,$$

$$\therefore BM = 8 - (10 - t) = t - 2,$$

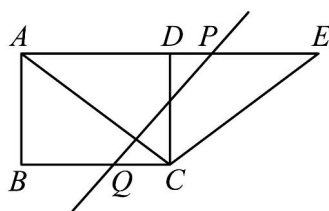
易得四边形 $ABCE$ 的面积为 72，

$\therefore$ 当直线 PQ 平分四边形 $ABCE$ 的面积时，

$$\text{四边形 } APMB \text{ 的面积为 } 36, \text{ 即 } \frac{1}{2}(t + t - 2) \times 6 = 36, \text{ 解得 } t = 7;$$

如图，当点 Q 在 CB 边上运动时， $10 < t \leq 14$ ， $AP = t$ ， $CQ = 2t - 20$ ，

$$\therefore BQ = 8 - (2t - 20) = 28 - 2t,$$



$$\text{四边形 } APMB \text{ 的面积为 } 36, \text{ 即 } \frac{1}{2}(t + 28 - 2t) \times 6 = 36, \text{ 解得 } t = 16 (\text{不满足题意}).$$

综上，当运动时间为 7 秒时直线 PQ 平分四边形 $ABCE$ 的面积；

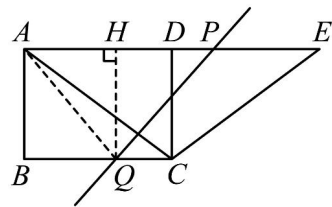
【小问 4 详解】

解：由 (3)，当点 Q 在 AC 上运动时， $0 \leq t \leq 10$ ， $\triangle APQ$ 是以 PQ 为底的等腰三角形；

当点 Q 在 CB 边上运动时, $\because BQ < BC = 8$, $AP > AD = 8$,

$\therefore \triangle APQ$ 只可能是以 AP 为底的等腰三角形, $AQ = PQ$.

如图, 连接 AQ , 过点 Q 作 $QH \perp AD$, 则 $QH = AB$, $HP = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{2}t$,



在 $\text{Rt}\triangle ABQ$ 和 $\text{Rt}\triangle QHP$ 中, $\begin{cases} AB = QH \\ AQ = PQ \end{cases}$,

$\therefore \triangle ABQ \cong \triangle QHP (HL)$,

$\therefore BQ = PH$, 即 $28 - 2t = \frac{1}{2}t$, 解得 $t = \frac{56}{5}$.

综上, 当 t 满足 $0 < t \leq 10$ 或 $t = \frac{56}{5}$ 时, $\triangle APQ$ 是以 PQ 为底或以 AP 为底的等腰三角形.

故答案为: $0 < t \leq 10$ 或 $t = \frac{56}{5}$.