

七年级数学下学期期末考试试卷

(沪教版)

(时间 90 分钟 满分 100 分)

注意事项:

1. 答题前请务必将自己的姓名、考试证号用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔填写在试卷及答题卡上指定的位置.
2. 答案必须按要求填涂、书写在答题卡上, 在试卷、草稿纸上答题一律无效.
3. 测试范围: 沪教版 (2024) 七年级下册全册.

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 2 分, 共 12 分)

1. 如果 $a < b$, 那么下列不等式正确的是 ()

A. $a+c > b+c$ B. $a-2 < b-2$ C. $-\frac{a}{2} < -\frac{b}{2}$ D. $\frac{a}{3} > \frac{b}{3}$

【答案】B

【详解】解: $\because a < b$,

$\therefore a+c < b+c$, A 错误;

$a-2 < b-2$, B 正确;

$\therefore$ 不等式两边同时乘或除以同一个负数, 不等号方向改变,

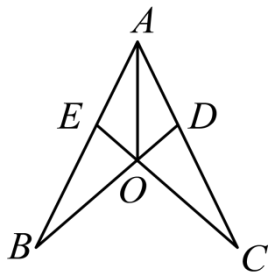
$\therefore$ 由 $a < b$, 两边同乘 $-\frac{1}{2}$, 得 $-\frac{a}{2} > -\frac{b}{2}$, C 错误;

$\therefore$ 不等式两边同时乘或除以同一个正数, 不等号方向不变,

$\therefore$ 由 $a < b$, 两边同除以 3, 得 $\frac{a}{3} < \frac{b}{3}$, D 错误;

综上, 正确答案是 B.

2. 如图, 已知 $AB = AC$, 要根据 “SSS” 判定 $\triangle ABO \cong \triangle ACO$, 还需添加的条件是 ()



A. $AD = AE$ B. $OD = OE$ C. $OB = OC$ D. $BD = CE$

【答案】C

【详解】解: 还需添加的条件是 $OB = OC$, 理由是:

在 $\triangle ABO$ 和 $\triangle ACO$ 中,

$$\begin{cases} AB = AC \\ AO = AO, \\ OB = OC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABO \cong \triangle ACO (SSS)$.

故选：C.

3. 已知等腰三角形的一边长为 8cm ，周长为 20cm ，则另两边长为 ()

A. $8\text{cm}, 4\text{cm}$

B. $6\text{cm}, 4\text{cm}$

C. $6\text{cm}, 6\text{cm}$

D. $4\text{cm}, 8\text{cm}$ 或 $6\text{cm}, 6\text{cm}$

【答案】D

【详解】解：当 8cm 是腰时，底边是 $20 - 8 \times 2 = 4\text{cm}$ ，即另外两边是 8cm ， 4cm ，能构成三角形；

当底边是 8cm 时，腰长是 $\frac{20-8}{2} = 6\text{cm}$ ，即另外两边是 6cm ， 6cm ，能构成三角形.

故选：D.

4. 下列命题属于真命题的是 ()

A. 两个角对应相等的两个三角形全等

B. 两条边相等的两个直角三角形全等

C. 腰相等的两个等腰三角形全等

D. 斜边相等的两个等腰直角三角形全等

【答案】D

【详解】解：A、有两个角和一条边对应相等的两个三角形全等，所以 A 选项错误；

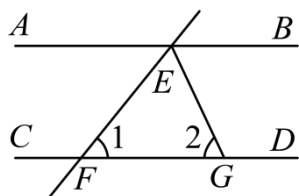
B、已知两条边对应相等的两个直角三角形不能判定全等，所以 B 选项错误；

C、腰相等的两个等腰三角形不一定全等，所以 C 选项错误；

D、斜边相等的两个等腰直角三角形全等，利用 ASA 可证得，所以 D 选项正确，

故选：D.

5. 直线 $AB \parallel CD$ ，直线 EF 分别交 AB 、 CD 于点 E 、 F ， EG 平分 $\angle BEF$ ，若 $\angle 1 = 50^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数为 ()



A. 50°

B. 55°

C. 60°

D. 65°

【答案】D

【详解】解： $\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle 1 + \angle BEF = 180^\circ$, $\angle 2 = \angle BEG$,

$$\therefore \angle 1 = 50^\circ,$$

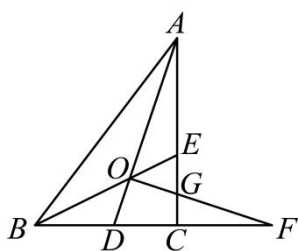
$$\therefore \angle BEF = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ,$$

$$\therefore EG \text{ 平分 } \angle BEF,$$

$$\therefore \angle FEG = \angle BEG = \frac{1}{2} \angle BEF = \frac{1}{2} \times 130^\circ = 65^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = 65^\circ.$$

6. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\triangle ABC$ 的角平分线 AD , BE 相交于点 O , 过点 O 作 $OF \perp AD$ 交 BC 的延长线于点 F , 交 AC 于点 G , 下列结论: ① $\angle BOD = 45^\circ$; ② $\triangle BOA \cong \triangle BOF$; ③ $BD + AG = AB$. 其中正确的结论是 ()



A. ①②

B. ①③

C. ②③

D. ①②③

【答案】 D

【详解】 解: ① $\because \triangle ABC$ 的角平分线 AD 、 BE 相交于点 O ,

$$\therefore \angle ABO = \angle CBO = \frac{1}{2} \angle ABC, \quad \angle BAO = \angle OAC = \frac{1}{2} \angle BAC,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ACB + \angle ABC + \angle BAC = 180^\circ$,

$$\therefore \angle ABC + \angle BAC = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle ABO + \angle BAO = \frac{1}{2} \angle ABC + \frac{1}{2} \angle BAC$$

$$= \frac{1}{2} (\angle ABC + \angle BAC)$$

$$= \frac{1}{2} \times 90^\circ$$

$$= 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BOD = \angle ABO + \angle BAO = 45^\circ, \text{ 故 ① 正确;}$$

$$\text{② } \because \angle BOD + \angle BOA = 180^\circ, \quad \angle BOD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BOA = 180^\circ - \angle BOD = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

$$\because OF \perp AD,$$

$$\therefore \angle DOF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BOF = \angle BOD + \angle DOF = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ,$$

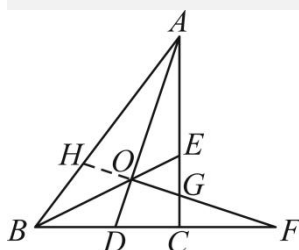
$$\therefore \angle BOA = \angle BOF,$$

在 $\triangle BOA$ 和 $\triangle BOF$ 中,

$$\begin{cases} \angle ABO = \angle CBO \\ OB = OB \\ \angle BOA = \angle BOF \end{cases}$$

$\therefore \triangle BOA \cong \triangle BOF$ (ASA), 故 ② 正确;

如图所示, 延长 FO 交 AB 于 H ,



$$\therefore \angle AOG = \angle AOH = 90^\circ,$$

又 $\because \angle HAO = \angle GAO, AO = AO,$

$\therefore \triangle AOH \cong \triangle AOG$ (ASA),

$$\therefore AG = AH, OG = OH,$$

$$\therefore \angle BOH = 180^\circ - \angle BOD - \angle DOF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BOH = \angle BOD = 45^\circ,$$

又 $\because \angle OBH = \angle OBD, BO = BO,$

$\therefore \triangle BOD \cong \triangle BOH$ (ASA),

$$\therefore BD = BH, OH = OD,$$

$\therefore AB = AH + BH = AG + BD$, 即 $BD + AG = AB$, 故 ③ 正确;

综上所述, 其中正确的结论是 ①②③.

故选: D.

二、填空题 (本题共 12 小题, 每小题 2 分, 共 24 分)

7. 三角形的两边长分别为 1 和 5, 则第三条边 a 的取值范围是_____.

【答案】 $4 < a < 6$

【详解】 解: 设第三边的长为 a , 根据三角形任意两边之和大于第三边, 任意两边之差小于第三边, 得:

$$5 - 1 < a < 5 + 1,$$

$$\therefore 4 < a < 6.$$

8. 已知关于 x 的不等式 $(4-a)x > 2$ 的解集为 $x < \frac{2}{4-a}$, 则 a 的取值范围是_____

【答案】 $a > 4$

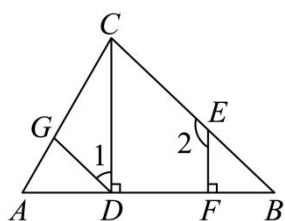
【详解】解: $\because$ 关于 x 的不等式 $(4-a)x > 2$ 的解集为 $x < \frac{2}{4-a}$,

$$\therefore 4-a < 0,$$

解得 $a > 4$,

故答案为: $a > 4$

9. 如下图, $CD \perp AB$ 于 D , $EF \perp AB$ 于 F , $\angle DGC = 100^\circ$, $\angle BCG = 80^\circ$, $\angle 1 = 50^\circ$ 则 $\angle 2 =$ _____.



【答案】 130°

【详解】解: $\because \angle DGC = 100^\circ$, $\angle BCG = 80^\circ$,

$$\therefore \angle DGC + \angle BCG = 180^\circ,$$

$$\therefore DG \parallel BC,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle BCD = 50^\circ,$$

$$\because CD \perp AB, EF \perp AB,$$

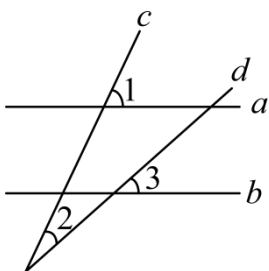
$$\therefore CD \parallel EF,$$

$$\therefore \angle 2 + \angle BCD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ.$$

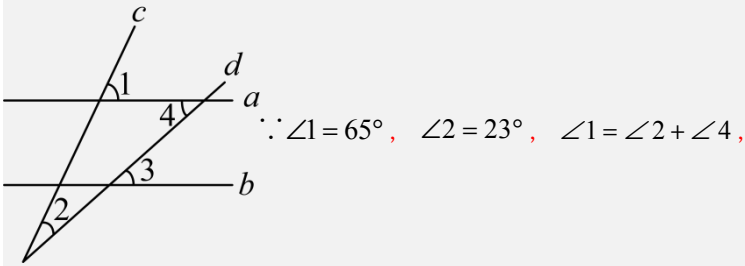
故答案为: 130° .

10. 如图, 已知直线 a , b 被直线 c , d 所截, 且 $a \parallel b$, $\angle 1 = 65^\circ$, $\angle 2 = 23^\circ$, 则 $\angle 3$ 的度数为_____°.



【答案】 42

【详解】解：如图，



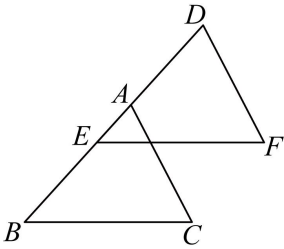
$$\therefore \angle 4 = \angle 1 - \angle 2 = 65^\circ - 23^\circ = 42^\circ,$$

$$\because a \parallel b,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 4 = 42^\circ.$$

故答案为：42.

11. 如图， $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ， $BE = 2$ ， $AE = 1$ ，则 DE 的长是 _____.



【答案】3

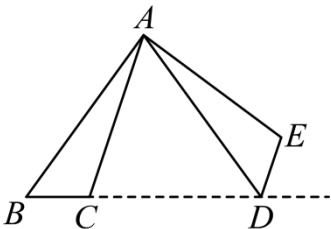
【详解】解： $\because BE = 2$ ， $AE = 1$ ，

$$\therefore AB = AE + BE = 1 + 2 = 3$$

$$\because \triangle ABC \cong \triangle DEF,$$

$$\therefore DE = AB = 3$$

12. 如图，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 70° ，得到 $\triangle ADE$ ．若点 D 在线段 BC 的延长线上，则 $\angle ADE =$ _____ $^\circ$ ．



【答案】55

【详解】解：由旋转的性质可得 $AD = AB$ ， $\angle ADE = \angle B$ ， $\angle BAD = 70^\circ$ ，

$$\therefore \angle B = \angle ADB = \frac{180^\circ - \angle BAD}{2} = 55^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = 55^\circ,$$

故答案为：55.

13. 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x < m+1 \\ x > 2m-1 \end{cases}$ 无解， m 应满足的条件_____.

【答案】 $m \geq 2$

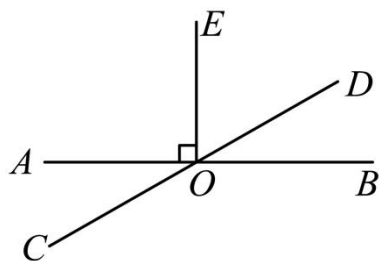
【详解】解： $\because$ 不等式组 $\begin{cases} x < m+1 \\ x > 2m-1 \end{cases}$ 无解，

$$\therefore 2m-1 \geq m+1,$$

移项得 $2m-m \geq 1+1$,

合并同类项得 $m \geq 2$.

14. 如图，直线 AB 与直线 CD 相交于点 O ， $OE \perp AB$ 于点 O ，且 $\angle BOD : \angle EOD = 1:2$ ，则 $\angle EOC$ 的度数为_____.



【答案】 120° / 120 度

【详解】解： $\because OE \perp AB$,

$$\therefore \angle BOE = 90^\circ,$$

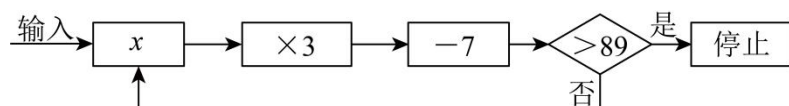
$$\because \angle BOD : \angle EOD = 1:2,$$

$$\therefore \angle DOE = \frac{2}{3} \angle BOE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EOC = 180^\circ - \angle DOE = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

故答案为： 120° .

15. 对于一个实数 x ，按如图所示的程序进行操作，规定：程序运行从“输入一个实数 x ”到“结果是否大于89？”为一次操作，如果进行两次操作后停止，则 x 的取值范围是_____.

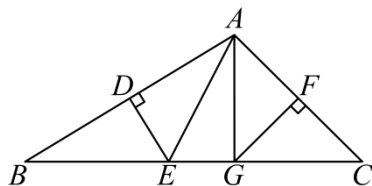


【答案】 $13 < x \leq 32$

【详解】解：由题意得 $\begin{cases} 3x-7 \leq 89 \\ (3x-7) \times 3-7 > 89 \end{cases}$

解得 $13 < x \leq 32$.

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, DE , FG 分别是边 AB , AC 的垂直平分线, 分别交 BC 于 E , G 两点, 连接 AE , AG , 若 $\triangle AEG$ 的周长为 8, 则 $BC =$ _____.



【答案】 8

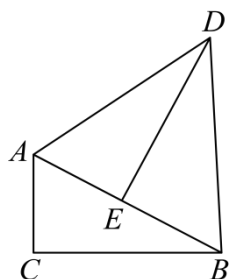
【详解】解: $\because DE$ 、 FG 分别是 AB 、 AC 的垂直平分线,

$\therefore AE = BE$, $AG = CG$,

$\therefore \triangle AEG$ 的周长 $= AE + EG + AG = BE + EG + CG = BC = 8$,

故答案为: 8.

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle ABC = 28^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转得到 $\triangle ADE$, 若点 C 的对应点 E 落在 AB 上, 连接 BD , 则 $\angle BDE$ 的大小为 _____.



【答案】 31°

【详解】解: $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle ABC = 28^\circ$,

$\therefore \angle BAC = 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ$.

由旋转的性质得 $AE = AC$ 、 $AD = AB$, $\angle DAE = 62^\circ$, $\angle ADE = \angle ABC = 28^\circ$,

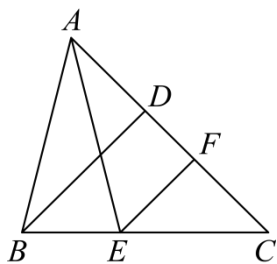
$\therefore \triangle ADB$ 为等腰三角形,

$\therefore \angle ABD = \frac{180^\circ - 62^\circ}{2} = 59^\circ$,

$\therefore \angle BDE = 59^\circ - 28^\circ = 31^\circ$.

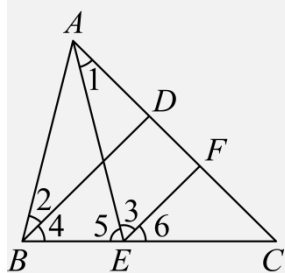
故答案为: 31° .

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $BD \perp AC$ 于点 D , 点 E 在边 BC 上, 且 $AE = AB$, $\angle CAE = \angle ABD$, 过点 E 作 $EF \perp AC$ 于点 F . 已知 $CF = 3$, 则 $AD =$ _____.



【答案】 3

【详解】解： 如下图，



$\because BD \perp AC, EF \perp AC,$

$\therefore \angle BDA = \angle AFE = 90^\circ,$

在 $\triangle BDA$ 和 $\triangle AFE$ 中,

$$\begin{cases} \angle BDA = \angle AFE \\ \angle ABD = \angle CAE, \\ AB = AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle BDA \cong \triangle AFE (AAS),$

$\therefore AD = EF, \angle 1 = \angle 2,$

$\because EF \perp AC,$

$\therefore \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ,$

$\because AB = AE,$

$\therefore \angle ABE = \angle AEB,$ 即 $\angle 2 + \angle 4 = \angle 5,$

$\because BD \perp AC, EF \perp AC,$

$\therefore BD \parallel EF,$

$\therefore \angle 4 = \angle 6,$

$\because \angle 3 + \angle 5 + \angle 6 = 180^\circ,$

$\therefore \angle 3 + \angle 2 + \angle 4 + \angle 6 = 90^\circ + 2\angle 6 = 180^\circ,$

$\therefore \angle 6 = 45^\circ,$

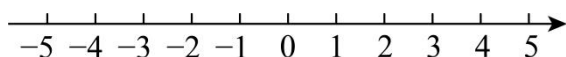
$$\therefore \angle C = 90^\circ - \angle 6 = 45^\circ = \angle 6,$$

$$\therefore EF = CF = 3,$$

$$\therefore AD = EF = 3.$$

三、解答题 (本题共 8 小题, 共 64 分)

19. (本题共 6 分) 解不等式组: $\begin{cases} 4x \geq 3x - 1 \\ \frac{5x - 4}{3} < 2x \end{cases}$ 并把它解集在数轴上表示出来.



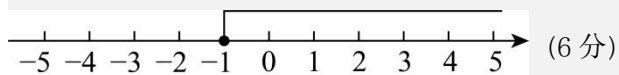
【详解】解: 由题知,

解不等式 $4x \geq 3x - 1$ 得, $x \geq -1$; (2 分)

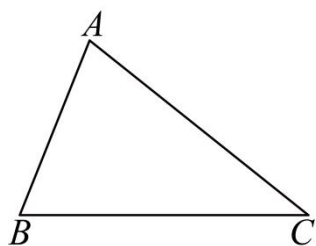
解不等式 $\frac{5x - 4}{3} < 2x$ 得, $x > -4$; (4 分)

所以不等式组的解集为: $x \geq -1$.

数轴表示如下:



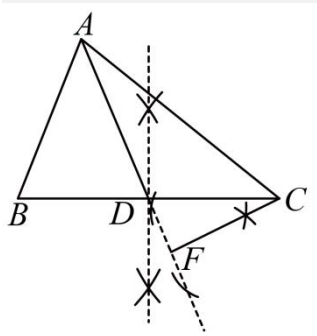
20. (本题共 6 分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ ($AB < AC$).



(1) 画 BC 边上的中线 AD , 画 $\triangle ADC$ 的 AD 边上的高 CF ;

(2) 若 $AD = 5$, $CF = 3$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【详解】(1) 解: 如图, 尺规作图作 BC 中垂线交 BC 于点 D , AD 即为所求; 过 C 尺规作图作 AD 的垂线交 AD 于 F , CF 即为所求;



(4 分)

(2) 解: $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CF = \frac{1}{2} \times 5 \times 3 = \frac{15}{2}$,

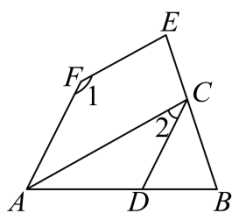
$\therefore AD$ 为中线,

$\therefore BD = CD$,

$\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ADC}$,

$\therefore S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ADC} = 15$. (6 分)

21. (本题共 6 分) 如图, 已知 $AC \parallel FE$, $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$.



求证: $\angle FAB = \angle BDC$.

【详解】证明: $\because AC \parallel EF$ (已知)

$\therefore \angle 1 + \angle FAC = 180^\circ$ (①两直线平行, 同旁内角互补) (2 分)

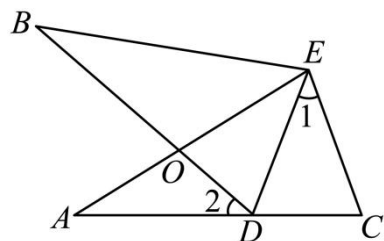
又 $\because \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (②已知)

$\therefore \angle FAC = \angle 2$ (同角的补角相等) (4 分)

$\therefore FA \parallel CD$, (④内错角相等, 两直线平行)

$\therefore \angle FAB = \angle BDC$ (⑤两直线平行, 同位角相等) (6 分)

22. (本题共 8 分) 如图, $\angle A = \angle B$, 点 D 在 AC 边上, AE 和 BD 相交于点 O.



(1) 若 $\angle 2 = 36^\circ$, 求 $\angle AEB$ 的度数;

(2)若 $\angle 1 = \angle 2$, $AE = BE$, 求证: $BD = AC$.

【详解】(1) 解: $\because \angle AOD = \angle BOE$, $\angle A = \angle B$, $\angle AOD + \angle A + \angle 2 = \angle BOE + \angle B + \angle AEB = 180^\circ$,
 $\therefore \angle AEB = \angle 2 = 36^\circ$. (3 分)

(2) 证明: 由 (1) 可知: $\angle AEB = \angle 2$,

$\because \angle 2 = \angle 1$,

$\therefore \angle 1 = \angle AEB$,

$\therefore \angle 1 + \angle AED = \angle AEB + \angle AED$,

又 $\because \angle AEC = \angle 1 + \angle AED$, $\angle BED = \angle AEB + \angle AED$,

$\therefore \angle AEC = \angle BED$, (6 分)

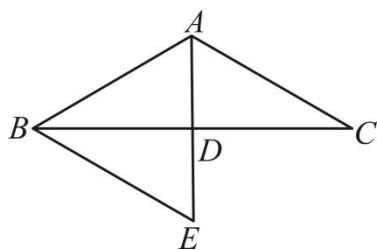
在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle BED$ 中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle B \\ AE = BE \\ \angle AEC = \angle BED \end{cases},$$

$\therefore \triangle AEC \cong \triangle BED$ (ASA), (7 分)

$\therefore BD = AC$. (8 分)

23. (本题共 8 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 为 BC 边的中点, 过点 B 作 $BE \parallel AC$ 交 AD 的延长线于点 E .



(1)求证: $\triangle BDE \cong \triangle CDA$.

(2)若 $AD \perp BC$, 求证: $BA = BE$

$\therefore BD = CD$.

$\because BE \parallel AC$,

$\therefore \angle E = \angle DAC, \angle DBE = \angle C$;

在 $\triangle BDE$ 和 $\triangle CDA$ 中,
$$\begin{cases} \angle E = \angle DAC \\ \angle DBE = \angle C \\ BD = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle BDE \cong \triangle CDA$ (AAS); (4 分)

(2) 证明: $\because \triangle BDE \cong \triangle CDA$,

$\therefore ED = AD$
 $\because AD \perp BC$,
 $\therefore BD$ 垂直平分 AE ,
 $\therefore BA = BE$. (8 分)

24. (本题共 8 分) 某厨具店购进一批电饭煲和电压力锅两种电器, 其进价与售价如表:

	进价 (元/台)	售价 (元/台)
电饭煲	200	250
电压力锅	160	200

(1) 一季度, 厨具店购进这两种电器共 40 台, 用去了 7400 元, 并且全部售完, 问厨具店在该买卖中盈利多少元?

(2) 为了满足市场需求, 二季度厨具店决定用不超过 9000 元的资金采购电饭煲和电压力锅共 50 台, 且电饭煲的数量不少于电压力锅的 $\frac{5}{6}$, 问厨具店有哪几种进货方案?

【详解】(1) 解: 设购买电饭煲 m 台, 购买电压力锅 n 台,

由题意得,
$$\begin{cases} m + n = 40 \\ 200m + 160n = 7400 \end{cases},$$

解得
$$\begin{cases} m = 25 \\ n = 15 \end{cases},$$

$\therefore$ 购买电饭煲 25 台, 电压力锅 15 台,

$\therefore$ 厨具店在该买卖中盈利为 $(250 - 200) \times 25 + (200 - 160) \times 15 = 1850$ 元; (5 分)

(2) 解: 设购买电饭煲 y 台, 则购买电压力锅 $(50 - y)$ 台,

由题意得,
$$\begin{cases} 200y + 160(50 - y) \leq 9000 \\ y \geq \frac{5}{6}(50 - y) \end{cases},$$

解得 $\frac{250}{11} \leq y \leq 25$,

$\therefore y$ 是整数,

$\therefore y = 23$ 或 24 或 25 , (8 分)

$\therefore$ 有以下三种进货方案:

方案一: 购买电饭煲 23 台, 电压力锅 27 台;

方案二：购买电饭煲 24 台，电压力锅 26 台；

方案三：购买电饭煲 25 台，电压力锅 25 台. (10 分)

25. 【原创】(本题共 10 分) 定义：如果一条线段将一个三角形分成两个等腰三角形，我们把这条线段叫做这个三角形的“二分线”：如果两条线段将一个三角形分成三个等腰三角形，我们把这两条线段叫做这个三角形的“三分线”。

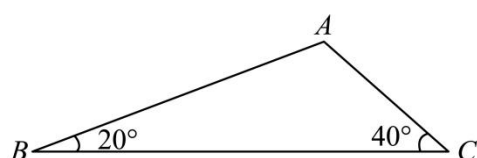


图1

(1) 三角形内角度数如图 1 所示，在图中画出“二分线”，并标出每个等腰三角形的顶角度数.

(2) 在 ABC 中，其中 $\angle C = 24^\circ$ ，过顶点 B 的一条直线把这个三角形分割成了两个等腰三角形，请直接写出 $\angle ABC$ 的度数.

【详解】(1) 解：如图即为所求：

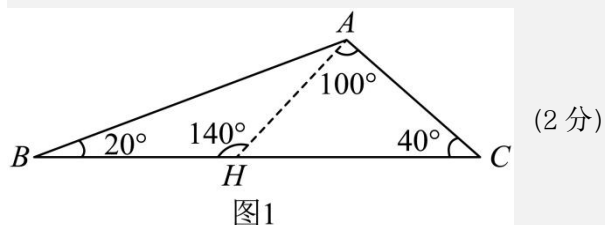
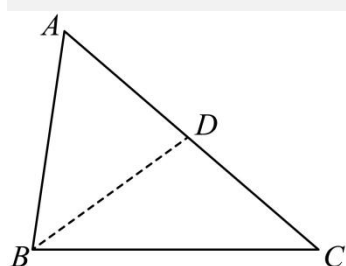


图1

(2) 如图



当 $BD = CD$ ， $BD = AB$ 时， $\angle DBC = \angle C = 40^\circ$ ，

$\therefore \angle A = \angle ADB = \angle C + \angle DBC = 80^\circ$ ，

$\therefore \angle ABC = 180^\circ - (\angle A + \angle C) = 60^\circ$ ；(4 分)

当 $BD = CD$ ， $AD = AB$ 时， $\angle DBC = \angle C = 40^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABD = \angle ADB = \angle C + \angle DBC = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 80^\circ + 40^\circ = 120^\circ; \quad (6 \text{ 分})$$

当 $BD = CD = AD$ 时, $\angle DBC = \angle C = 40^\circ$,

$$\therefore \angle ADB = \angle C + \angle DBC = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle ABD = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ADB) = \frac{1}{2}(180^\circ - 80^\circ) = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 50^\circ + 40^\circ = 90^\circ; \quad (8 \text{ 分})$$

当 $BD = BC$, $BD = AD$ 时, $\angle BDC = \angle C = 40^\circ$, $\angle A = \angle ABD$,

$$\therefore \angle A + \angle ABD = \angle BDC,$$

$$\therefore \angle A = \angle ABD = \frac{1}{2}\angle BDC = 20^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 20^\circ + 100^\circ = 120^\circ \quad (9 \text{ 分})$$

当 $DC = BC$, $BD = AD$ 时, $\angle BDC = \angle DBC = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ$,

$$\therefore \angle A = \angle ABD = \frac{1}{2}\angle BDC = 35^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 35^\circ + 70^\circ = 105^\circ \quad (10 \text{ 分})$$

综上所述, $\angle ABC$ 的度数为 60° 或 90° 或 105° 或 120° .

26. 【原创】(本题共 12 分) 已知点 A 在直线 l 上, $AB = AC$, 点 D 、 E 为直线 l 上的动点, 且 $\angle BDA = \angle BAC = \angle AEC = \alpha$.

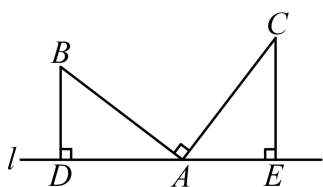


图 (1)

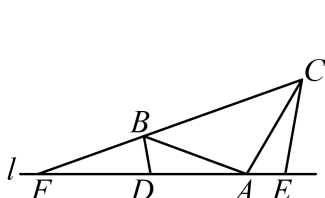


图 (2)

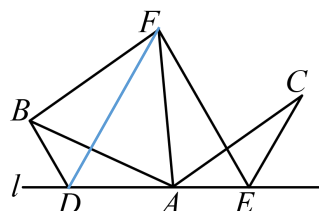


图 (3)

(1) 如图 (1), 当 $\alpha = 90^\circ$ 时, 猜想 DE 、 BD 、 CE 之间的数量关系为_____;

(2) 若 α 为任意角,

①如图 (2) 直线 l 与 CB 的延长线交于点 F ，若 $BC = 3BF$ ， $\triangle ABC$ 的面积是 S ，请用 S 表示 $\triangle FBD$ 与 $\triangle CEA$ 的面积之和；

②如图 (3) 已知 $\alpha = 120^\circ$ ，将线段 AB 绕点 A 顺时针旋转 60° ，使 B 点落在 F 点，连接 FE 、 FD ，求证： $\triangle FDE$ 是等边三角形。

【详解】(1) 解：猜想 $DE = BD + CE$ ，理由如下：

$$\because \angle BDA = \angle BAC = \angle AEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle EAC = \angle BAD + \angle DBA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DBA = \angle EAC,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \triangle DBA \cong \triangle EAC (\text{AAS}),$$

$$\therefore AD = CE, BD = AE,$$

$$\therefore DE = AD + AE = BD + CE; \quad (4 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 解：} \textcircled{1} \because \angle BDA = \angle BAC = \alpha,$$

$$\therefore \angle DBA + \angle BAD = \angle BAD + \angle CAE = 180^\circ - \alpha,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle ABD,$$

$$\text{在 } \triangle ADB \text{ 和 } \triangle CEA \text{ 中, } \begin{cases} \angle ABD = \angle CAE \\ \angle BDA = \angle CEA \\ AB = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADB \cong \triangle CEA (\text{AAS}),$$

$$\therefore AE = BD, AD = CE,$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CAE},$$

设 $\triangle ABC$ 的底边 BC 上的高为 h ，则 $\triangle ABF$ 的底边 BF 上的高为 h ，

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot h = S, \quad S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} BF \cdot h,$$

$$\because BC = 3BF,$$

$$\therefore S_{\triangle ABF} = \frac{1}{3} S,$$

$$\therefore S_{\triangle ABF} = S_{\triangle FBD} + S_{\triangle ABD} = S_{\triangle FBD} + S_{\triangle CEA} = \frac{1}{3} S,$$

$\therefore \triangle FBD$ 与 $\triangle CEA$ 的面积之和为 $\frac{1}{3}S$. (8 分)

②证明: $\because \angle BDA = \angle BAC = \angle AEC = 120^\circ$,

$\therefore \angle BAD + \angle EAC = \angle BAD + \angle DBA = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$,

$\therefore \angle DBA = \angle EAC$,

$\because AB = AC$,

$\therefore \triangle DBA \cong \triangle EAC$ (AAS),

$\therefore BD = AE$, $\angle ABD = \angle CAE$,

$\because \triangle ABF$ 为等边三角形,

$\therefore \angle FBA = \angle FAB = \angle BFA = 60^\circ$, $FB = FA$.

$\because \alpha = 120^\circ$,

$\therefore \angle FAC = \angle BAC - \angle FAB = 60^\circ$,

$\therefore \angle FAC = \angle FBA$,

$\therefore \angle FAC + \angle CAE = \angle FBA + \angle ABD$.

即 $\angle FBD = \angle FAE$.

在 $\triangle FBD$ 和 $\triangle FAE$ 中,
$$\begin{cases} FB = FA \\ \angle FBD = \angle FAE \\ BD = AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle FBD \cong \triangle FAE$ (SAS),

$\therefore FD = FE$, $\angle BFD = \angle AFE$,

$\therefore \angle DFE = \angle DFA + \angle AFE = \angle DFA + \angle BFD = \angle BFA = 60^\circ$.

$\therefore \triangle FDE$ 是等边三角形. (12 分)