

2025-2026 学年七年级数学下学期期中模拟卷

(考试时间：90 分钟 试卷满分：100 分)

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如
需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。
写
在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。
4. 测试范围：：沪教版（五四制）七年级下册考试范围第 15~16 章：一元一次不等式+相交线与平行线。

第一部分（选择题 共 12 分）

一、**选择题**(本大题共 6 小题，每小题 2 分，共 12 分.每小题列出的四个备选项中只有一个符合题目要求)

1. 下列表达式中是不等式的有（ ）个

① $-2 < 0$ ；② $2x + 3y < 0$ ；③ $x = 1$ ；④ $x^2 + 3x - 1$ ；⑤ $x + 2y = 4$ ；⑥ $x + 3 < y - 3$

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

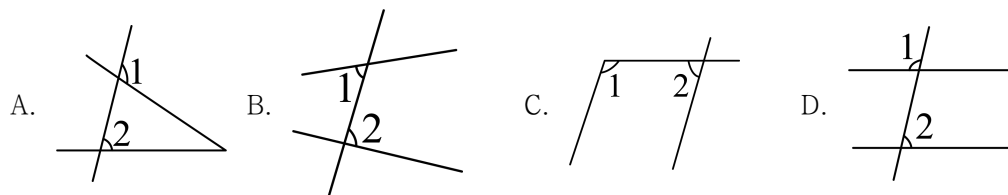
【答案】C

【分析】本题考查不等式的定义，解题思路是根据不等式的定义逐个判断式子，统计符合要求的个数即可，用不等号表示不等关系的式子叫做不等式。

【详解】解：根据不等式的定义逐个判断：

- ∴ ① $-2 < 0$ 用不等号连接，是不等式；
② $2x + 3y < 0$ 用不等号连接，是不等式；
③ $x = 1$ 用等号连接，是等式，不是不等式；
④ $x^2 + 3x - 1$ 是代数式，没有不等号连接，不是不等式；
⑤ $x + 2y = 4$ 用等号连接，是等式，不是不等式；
⑥ $x + 3 < y - 3$ 用不等号连接，是不等式；
∴ 符合不等式定义的共有 3 个。

2. 下列图形中， $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是内错角的是（ ）



【答案】B

【分析】根据内错角定义：两条直线被第三条直线所截形成的角中，若两个角都在两直线之间，并且在第三条直线（截线）的两旁，则这样一对角叫做内错角进行解答即可。

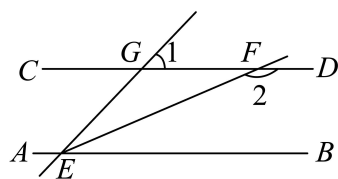
【详解】解：A. $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 不是内错角，故该选项不符合题意；

B. $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是内错角，故该选项符合题意；

C. $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 不是内错角，故该选项不符合题意；

D. $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 不是内错角，故该选项不符合题意；

3. 如图，已知直线 $AB \parallel CD$ ， $\angle GEB$ 的平分线 EF 交 CD 于点 F ， $\angle 1 = 46^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数为（ ）



A. 138°

B. 148°

C. 157°

D. 159°

【答案】C

【分析】根据平行线的性质可得 $\angle GEB = \angle 1 = 46^\circ$ ，然后根据 EF 为 $\angle GEB$ 的平分线可得出 $\angle FEB$ 的度数，根据两直线平行，同旁内角互补即可得出 $\angle 2$ 的度数。

【详解】解： $\because AB \parallel CD$ ，

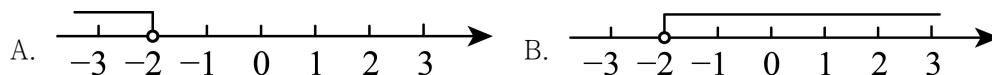
$\therefore \angle GEB = \angle 1 = 46^\circ$ ， $\angle FEB + \angle 2 = 180^\circ$ ，

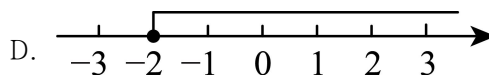
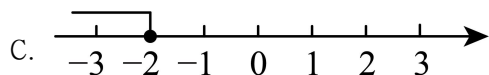
$\because EF$ 为 $\angle GEB$ 的平分线，

$\therefore \angle FEB = \frac{1}{2} \angle GEB = 23^\circ$ ，

$\therefore \angle 2 = 180^\circ - \angle FEB = 157^\circ$ 。

4. 在数轴上表示不等式 $\frac{x}{2} - 1 > x$ 的解集，正确的是（ ）





【答案】A

【分析】先解不等式，再根据在数轴上表示不等式解集的方法求解即可.

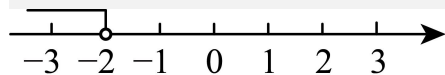
【详解】解: $\frac{x}{2} - 1 > x$,

移项, 得 $\frac{x}{2} - x > 1$,

合并同类项, 得 $-\frac{1}{2}x > 1$,

系数化为 1, 得 $x < -2$,

该解集在数轴上表示为:



5. 下列语句正确的有 ()

①过两点有且只有一条线段; ②若线段 $AP = PB = \frac{1}{2}AB$, 则 P 一定是 AB 中点; ③ A 与 B 两点间的距离是指连接 A 、 B 两点间的线段; ④两点之间, 线段最短.

A. 0 个

B. 1 个

C. 2 个

D. 3 个

【答案】C

【分析】依据“两点确定一条直线”“中点定义”“距离是长度”“两点之间线段最短公理”, 筛选出正确语句后统计数量.

【详解】解: ①: 过两点有且只有一条直线, 而线段可以有无数条, 错误;

②: 符合线段中点的定义, 正确;

③: A 与 B 两点间的距离是指连接 A 、 B 两点间的线段的长度, 而不是线段, 错误;

④: 两点之间, 线段最短是几何公理, 正确.

综上, 正确的语句有 2 个.

6. 随着 AI 技术广泛应用于人们日常生活, 为更好地服务广大读者, 某图书馆准备引进智能机器人服务读者. 经市场调研发现: 甲种型号机器人的单价为 13 万元, 乙种型号机器人的单价为 10 万元, 图书馆准备用不低于 114 万元的资金购进甲、乙两种型号的机器人共 10 套 (两种型号均有), 那么购买甲种型号的智能机器人多少套时, 所花资金最少? ()

A. 4 套

B. 5 套

C. 6 套

D. 7 套

【答案】B

【分析】由甲的单价高于乙, 因此总资金随甲的购买数量增大而增大, 只需找出满足资金要

求的甲的最小正整数值即可得到答案.

【详解】设购买甲种型号机器人 x 套, 则购买乙种型号机器人 $(10-x)$ 套, x 为正整数, 且 $1 \leq x \leq 9$,

$$\text{总资金} = 13x + 10(10-x) = 3x + 100,$$

$\therefore$ 资金不低于 114 万元,

$$\therefore 3x + 100 \geq 114,$$

$$\text{解得 } x \geq \frac{14}{3} \approx 4.67,$$

$\therefore$ 当 x 取满足条件的最小值时, 所花资金最小,

$\therefore x$ 为正整数,

$\therefore x$ 的最小值为 5,

即购买甲种型号智能机器人 5 套时, 所花资金最少.

第二部分 (非选择题 共 88 分)

二、填空题(本题共 12 小题, 每小题 3 分, 共 36 分)

7. 若不等式组 $\begin{cases} x < 2-a \\ x > 3 \end{cases}$ 无解, 则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a \geq -1$

【分析】根据不等式组无解的判定规则, 列出关于 a 的一元一次不等式, 求解即可得到 a 的取值范围.

【详解】解: $\because$ 不等式组 $\begin{cases} x < 2-a \\ x > 3 \end{cases}$ 无解,

$$\therefore 2-a \leq 3,$$

$$\text{移项得 } -a \leq 3-2,$$

$$\text{合并同类项得 } -a \leq 1,$$

$$\text{解得 } a \geq -1.$$

8. 把命题“互为相反数的两个数之和等于 0”改写成“如果……那么……”形式

_____.

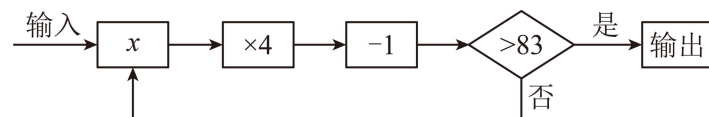
【答案】 如果两个数互为相反数, 那么这两个数的和为零

【分析】本题考查命题的改写, 找准命题中的题设与结论是解题的关键; 将原命题分解为题设和结论, 并用“如果”引导题设, “那么”引导结论.

【详解】解：把命题“互为相反数的两个数之和等于0”改写成“如果……那么……”形式为“如果两个数互为相反数，那么这两个数的和为零”。

故答案为：如果两个数互为相反数，那么这两个数的和为零。

9. 按照如下程序操作，规定：从“输入一个值 x ”到“结果是否大于83”为一次程序操作。如果结果得到的数小于或等于83，则用得到的这个数进行下一次操作。如果程序操作执行两次才停止，则输入的 x 的取值范围是_____。



【答案】 $\frac{11}{2} < x \leq 21$

【分析】 本题主要考查了一元一次不等式组的应用，先根据程序图的操作过程得出不等式组，再求出不等式组的解集。

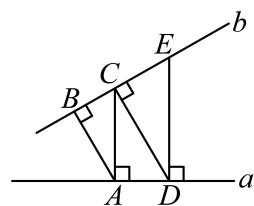
【详解】解：根据题意，得

$$\begin{cases} 4x-1 \leq 83 \\ 4(4x-1)-1 > 83 \end{cases}$$

解得 $\frac{11}{2} < x \leq 21$ 。

故答案为： $\frac{11}{2} < x \leq 21$ 。

10. 如图，点 A ， D 在直线 a 上，点 B ， C ， E 在直线 b 上，连接 AB ， AC ， CD ， DE ，且 $AB \perp b$ ， $DC \perp b$ ， $CA \perp a$ ， $ED \perp a$ 。则图中能表示点 D 到直线 b 的距离的是线段_____的长。



【答案】

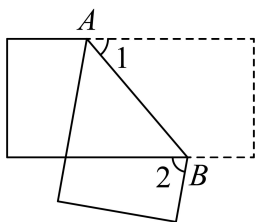
DC

【分析】 根据点到直线的距离是垂线段的长度这一概念直接解答即可。

【详解】解： $\because DC \perp b$ ，

$\therefore$ 线段 DC 的长度表示点 D 到直线 b 的距离。

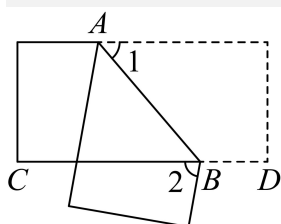
11. 如图，把一张长方形纸片沿 AB 折叠，若 $\angle 1 = 50^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数为_____。



【答案】 80°

【分析】由平行线的性质可得 $\angle ABC$ 的度数，则由平角的定义可得 $\angle ABD$ 的度数，再由折叠的性质可得 $\angle ABC + \angle 2 = \angle ABD$ ，据此可得答案.

【详解】解：如图所示，



$\because$ 长方形纸片的对边平行， $\angle 1 = 50^\circ$

$\therefore \angle ABC = \angle 1 = 50^\circ$,

$\therefore \angle ABD = 180^\circ - \angle ABC = 130^\circ$,

由折叠的性质可得 $\angle ABC + \angle 2 = \angle ABD = 130^\circ$,

$\therefore \angle 2 = 80^\circ$.

12. 2025 年 4 月 19 日，北京举行全球第一次机器人马拉松比赛，此次比赛意义重大. 如图 1，这是某款机器人跑步的姿态，图 2 为其某一瞬间姿态的平面示意图，其中 $\angle ABC = 160^\circ$ ， $\angle ABD = 3\angle CBD$ ， $\angle BDF = 120^\circ$. 若 $AB \parallel HG$ ， $FG \perp HG$ 于点 G ，则 (1) $\angle ABD =$ _____ 度；(2) $\angle DFG =$ _____ 度.

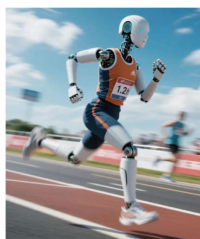


图1

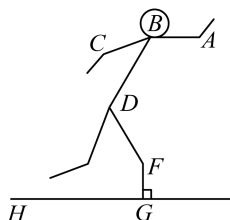


图2

【答案】 120 150

【分析】由已知可得 $\angle ABD = \frac{3}{4}\angle ABC = 120^\circ$ ，过点 D 作 $DE \parallel AB$ ，过点 F 作 $FM \parallel AB$ ，可得 $AB \parallel DE \parallel FM \parallel HG$ ，再根据平行线的性质解答即可求解，正确作出辅助线是解题的关键.

【详解】解：∵ $\angle ABC = 160^\circ$ ， $\angle ABD = 3\angle CBD$ ，

$$\therefore \angle ABD = \frac{3}{4}\angle ABC = 120^\circ,$$

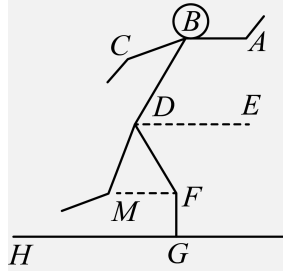


图2

过点 D 作 $DE \parallel AB$ ，过点 F 作 $FM \parallel AB$ ，

$$\therefore AB \parallel HG,$$

$$\therefore AB \parallel DE \parallel FM \parallel HG,$$

$$\therefore \angle BDE = 180^\circ - \angle ABD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BDF = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle EDF = \angle BDF - \angle BDE = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DFM = \angle EDF = 60^\circ,$$

$$\therefore FG \perp HG \text{ 于点 } G,$$

$$\therefore \angle FGH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MFG = 180^\circ - \angle FGH = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DFG = \angle DFM + \angle MFG = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ.$$

13. 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x+a < 1 \\ 1-2x \leq 5 \end{cases}$ 有 4 个整数解，则 a 的取值范围为_____.

【答案】 $-1 \leq a < 0$

【分析】先求出不等式组的解集，根据不等式组有 4 个整数解，得到关于 a 的不等式组，进行求解即可.

【详解】解：解不等式组 $\begin{cases} x+a < 1 \\ 1-2x \leq 5 \end{cases}$ ，得 $\begin{cases} x < 1-a \\ x \geq -2 \end{cases}$ ，

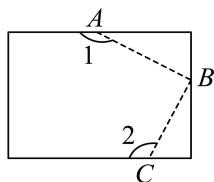
∴ 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x+a < 1 \\ 1-2x \leq 5 \end{cases}$ 有 4 个整数解，

$$\therefore \text{不等式组的解集为 } -2 \leq x < 1-a, \text{ 整数解为 } -2, -1, 0, 1,$$

$$\therefore 1 < 1-a \leq 2,$$

$$\therefore -1 \leq a < 0.$$

14. 如图：按虚线剪去长方形纸片的相邻两个角，并使 $\angle 1 = 150^\circ$ ， $AB \perp BC$ ，则 $\angle 2$ 的度数为_____.

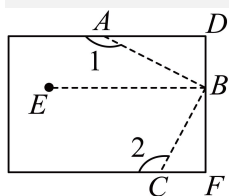


【答案】 120° / 120 度

【分析】 本题主要考查了平行线的性质，解题的关键是正确添加平行线.

设长方形右上角为 D ，右下角为 F 点，过点 B 向左作 $BE \parallel AD$ ，则 $AD \parallel BE \parallel CF$ ，求得 $\angle 1 + \angle ABE + \angle CBE + \angle 2 = 360^\circ$ ，即 $\angle 1 + \angle ABC + \angle 2 = 360^\circ$ ，再代入数据求解即可.

【详解】 解：设长方形右上角为 D ，右下角为 F 点，如图，



过点 B 向左作 $BE \parallel AD$ ，

$\therefore AD \parallel CF$ ，

$\therefore AD \parallel BE \parallel CF$ ，

$\therefore \angle 1 + \angle ABE = 180^\circ$ ， $\angle CBE + \angle 2 = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle 1 + \angle ABE + \angle CBE + \angle 2 = 360^\circ$ ，

$\therefore \angle 1 + \angle ABC + \angle 2 = 360^\circ$ ，

$\because AB \perp BC$ ，

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$ ，

又 $\because \angle 1 = 150^\circ$ ，

$\therefore \angle 2 = 360^\circ - 90^\circ - 150^\circ = 120^\circ$.

故答案为： 120° .

15. 如图，直尺的对边平行，将一个直角三角板按图 1 和图 2 两种方式摆放，则对 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ ， $\angle 3$ 与 $\angle 4$ 的关系描述：① $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互补；② $\angle 1 - \angle 2 = 90^\circ$ ；③ $\angle 3$ 与 $\angle 4$ 互余；④ $\angle 3 = \angle 4$. 正确的是_____.

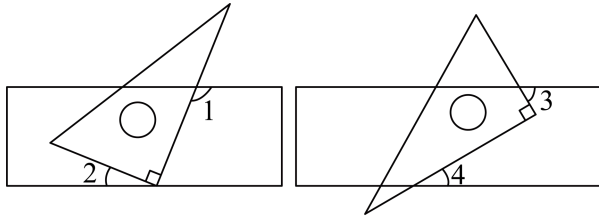


图1

图2

【答案】②③

【分析】先标注字母，角度，再结合平行线的性质与平行公理进行解答即可.

【详解】解：如图 1，

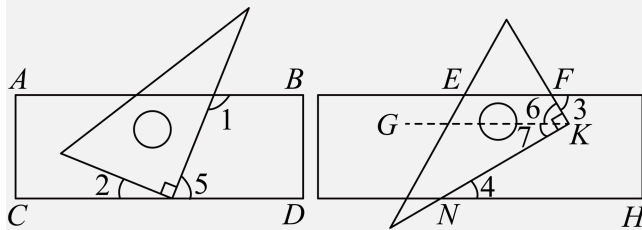


图1

图2

$\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle 5 = 180^\circ - \angle 1$,

$\because \angle 2 + 90^\circ + \angle 5 = 180^\circ$,

$\therefore \angle 2 + 90^\circ + 180^\circ - \angle 1 = 180^\circ$,

$\therefore \angle 1 - \angle 2 = 90^\circ$ ，故①错误，②正确；

如图 2，过 K 作 $KG \parallel EF$ ，

$\because EF \parallel NH$ ，

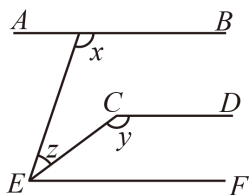
$\therefore EF \parallel GK \parallel NH$ ，

$\therefore \angle 3 = \angle 6$ ， $\angle 4 = \angle 7$ ，

$\therefore \angle 3 + \angle 4 = \angle 6 + \angle 7 = 90^\circ$ ；

$\therefore$ ③正确，④错误；

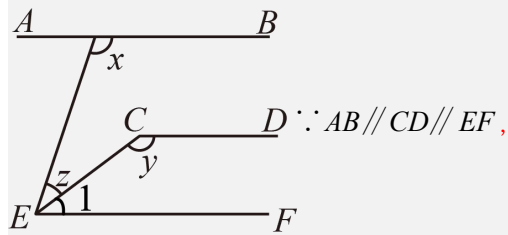
16. 如图，若 $AB \parallel CD \parallel EF$ ，则 $\angle x$ ， $\angle y$ ， $\angle z$ 三者之间的数量关系是_____.



【答案】 $\angle x + \angle z = \angle y$

【分析】根据两直线平行，同旁内角互补进行求解即可.

【详解】解：如图，



∴ $\angle x + \angle z + \angle 1 = 180^\circ$ ①, $\angle y + \angle 1 = 180^\circ$ ②, (两直线平行, 同旁内角互补),

① - ② 得 $\angle x + \angle z - \angle y = 0$, 即 $\angle x + \angle z = \angle y$.

17. 将一箱苹果分给若干个小朋友, 若每位小朋友分 5 个苹果, 则还剩 12 个苹果; 若每位小朋友分 8 个苹果, 则有 1 位小朋友能分到不足 5 个苹果. 这一箱苹果的个数是_____, 小朋友的人数是_____.

【答案】 42 6

【分析】本题考查了一元一次不等式组的应用, 正确建立不等式组是解题关键. 设有 x 位小朋友, 则这一箱苹果的个数是 $(5x+12)$ 个, 根据若每位小朋友分 8 个苹果, 则有 1 位小朋友能分到, 但不足 5 个苹果建立不等式组, 求出不等式组的解集, 再根据 x 为正整数求解即可得.

【详解】解: 设有 x 位小朋友, 则这一箱苹果的个数是 $(5x+12)$ 个,

由题意得:
$$\begin{cases} (5x+12)-8(x-1)>0 \\ (5x+12)-8(x-1)<5 \end{cases},$$

解得 $5 < x < \frac{20}{3}$,

∵ x 为正整数,

∴ $x = 6$,

∴ $5x+12 = 5 \times 6 + 12 = 42$,

即这一箱苹果的个数是 42, 小朋友的人数是 6.

故答案为: 42, 6.

18. 反证法是数学中一种常用的证明方法, 通常先假设求证的结论是错误的, 再由此推导出与已知、公理、定理或条件等相矛盾的结果, 从而否定开始的假设, 肯定先前求证结论的正确性. 在证明“两直线平行, 内错角相等”时, 采用反证法.

如图 1, 已知: $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是直线 AB , CD 被直线 EF 所截得到的一对内错角, $AB \parallel CD$, 直线 AB , CD 分别与直线 EF 相交于点 M , N . 求证: $\angle 1 = \angle 2$.

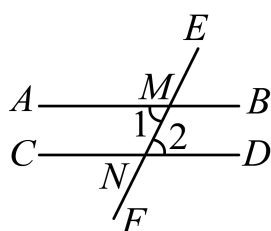


图1

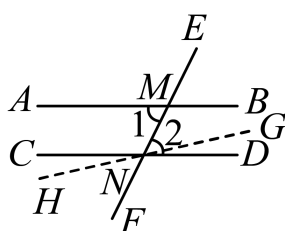


图2

证明：假设_____，过点 N 画一条直线 GH ，使得 $\angle 1 = \angle ENG$ ，

如图 2 所示，根据_____，可得 $AB \parallel GH$ ，

又因为 $AB \parallel CD$ ，这样直线 GH 、 CD 都过点 N ，这与_____矛盾。

说明假设不成立，所以 $\angle 1$ _____ $\angle 2$ 。

【答案】 $\angle 1 \neq \angle 2$ 内错角相等，两直线平行 过直线外一点，有且只有一条直线与已知直线平行 =

【分析】 本题考查的是反证法，利用反证法的一般步骤解答即可。

【详解】 证明：假设 $\angle 1 \neq \angle 2$ ，

过点 N 画一条直线 GH ，使得 $\angle 1 = \angle ENG$ ，如图 2 所示，根据内错角相等，两直线平行，可得 $AB \parallel GH$ ，

又因为 $AB \parallel CD$ ，这样直线 GH 、 CD 都过点 N ，

这与过直线外一点，有且只有一条直线与这条直线平行矛盾。

说明假设不成立，所以 $\angle 1 = \angle 2$ ，

故答案为： $\angle 1 \neq \angle 2$ ；内错角相等，两直线平行；过直线外一点，有且只有一条直线与这条直线平行， =。

三、解答题(本大题共有 6 题，第 19~21 题每题 6 分，第 22~24 题每题 8 分，第 25 题 10 分，满分 52 分)

19. 解下列不等式，并将其解集表示在数轴上。

(1) $x + 3 < -1$.

(2) $3x > 27$.

(3) $-\frac{x}{3} > 2$.

【答案】 (1) $x < -4$ ，见解析

(2) $x > 9$ ，见解析

(3) $x < -6$ ，见解析

【分析】本题考查了一元一次不等式的解法及数轴表示解集，解题关键是熟练掌握不等式的基本性质，特别是在乘除负数时要注意改变不等号的方向.

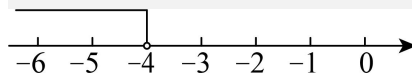
- (1) 利用不等式的基本性质，两边同时减去3，即可求解；
- (2) 利用不等式的基本性质，两边同时除以3，不等号方向不变；
- (3) 利用不等式的基本性质，两边同时乘以-3，不等号方向改变.

【详解】(1) 解: $x+3 < -1$

$$x+3-3 < -1-3$$

$$x < -4$$

将不等式的解集在数轴上表示如图所示.

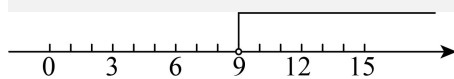


(2) 解: $3x > 27$

$$\frac{3x}{3} > \frac{27}{3}$$

$$x > 9$$

将不等式的解集在数轴上表示如图所示.

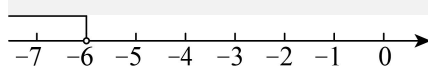


(3) 解: $-\frac{x}{3} > 2$

$$-\frac{x}{3} \times (-3) < 2 \times (-3)$$

$$x < -6$$

将不等式的解集在数轴上表示如图所示.



20. 解不等式组 $\begin{cases} 4(x+1)+3 > x & \text{①} \\ \frac{x-4}{2} \leq \frac{x-5}{3} & \text{②} \end{cases}$ ，并写出它的所有正整数解.

【答案】不等式组的解集为 $-\frac{7}{3} < x \leq 2$ ，它的所有正整数解为1,2

【详解】解: 解不等式①, 得 $x > -\frac{7}{3}$,

解不等式②, 得 $x \leq 2$,

$\therefore$ 不等式组的解集为 $-\frac{7}{3} < x \leq 2$,

$\therefore$ 它的所有正整数解为1,2.

21. 某水果店计划在春节购进杨梅、龙眼两种水果. 已知购进杨梅2斤, 龙眼3斤共需69元; 购进杨梅1斤, 龙眼4斤共需72元.

(1) 杨梅、龙眼每斤的价格分别是多少元?

(2) 该水果店计划用不超过540元购进杨梅、龙眼共40斤, 且杨梅的斤数不超过龙眼斤数的3倍. 若杨梅的购进斤数为整数, 则共有多少种进货方案? (不需要一一列出)

【答案】 (1) 杨梅每斤的价格是12元, 龙眼每斤的价格是15元;

(2) 共有11种进货方案.

【分析】 本题考查了二元一次方程组的应用, 一元一次不等式组的应用, 读懂题意, 正确列出二元一次方程组或一元一次不等式组是解题的关键.

(1) 设杨梅每斤的价格是 a 元, 龙眼每斤的价格是 b 元, 根据题意得
$$\begin{cases} 2a + 3b = 69 \\ a + 4b = 72 \end{cases}$$
, 然后解方程组即可;

(2) 设杨梅购进 x 斤, 则龙眼购进 $(40-x)$ 斤, 由题意可得
$$\begin{cases} x \leq 3(40-x) \\ 12x + 15(40-x) \leq 540 \end{cases}$$
, 然后解不等式组即可.

【详解】 (1) 解: 设杨梅每斤的价格是 a 元, 龙眼每斤的价格是 b 元,

根据题意, 得
$$\begin{cases} 2a + 3b = 69 \\ a + 4b = 72 \end{cases}$$
, 解得
$$\begin{cases} a = 12 \\ b = 15 \end{cases}$$
,

答: 杨梅每斤的价格是12元, 龙眼每斤的价格是15元;

(2) 解: 设杨梅购进 x 斤, 则龙眼购进 $(40-x)$ 斤,

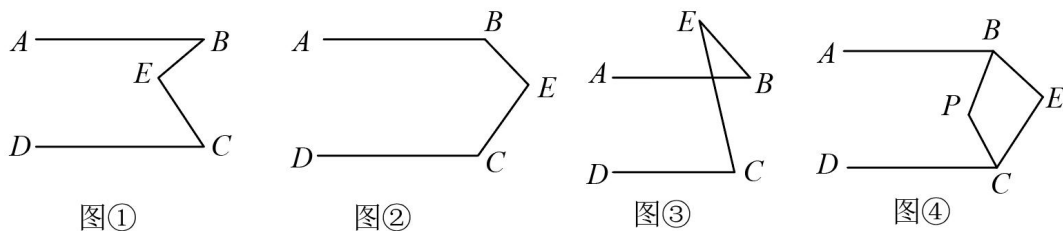
由题意, 可得
$$\begin{cases} x \leq 3(40-x) \\ 12x + 15(40-x) \leq 540 \end{cases}$$
,

解得 $20 \leq x \leq 30$,

$\because x$ 为整数,

$\therefore$ 共有11种进货方案.

22. 小明在学习了“平行线的判定和性质”知识后, 对下面问题进行探究: 在平面内, 直线 $AB \parallel CD$, E 为平面内一点, 连接 BE 、 CE , 根据点 E 的位置探究 $\angle B$ 和 $\angle C$ 、 $\angle BEC$ 的数量关系.



(1) 当点 E 分别在如图 1、图 2 和图 3 所示的位置时，请你直接写出三个图形中相应的 $\angle B$ 和 $\angle C$ 、 $\angle BEC$ 的数量关系：图①中：_____；图②中：_____，图③中：_____。

(2) 请将结论③加以证明。

(3) 运用上面的结论解决问题：如图 4， $AB \parallel CD$ ， BP 平分 $\angle ABE$ ， CP 平分 $\angle DCE$ ， $\angle BEC = 100^\circ$ ， $\angle BPC$ 的度数是_____。（直接写出结果，不用写计算过程）

【答案】 (1) $\angle BEC = \angle B + \angle C$ ； $\angle BEC + \angle B + \angle C = 360^\circ$ ； $\angle C = \angle B + \angle BEC$

(2) 证明见解析

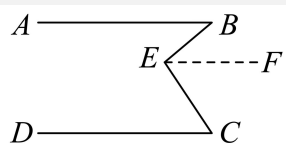
(3) 130°

【分析】 (1) 图①：过点 E 作 $EF \parallel AB$ ，利用两直线平行内错角相等，将 $\angle BEC$ 拆分为两个分别与 $\angle B$ 、 $\angle C$ 相等的角，即可得 $\angle BEC = \angle B + \angle C$ ；图②：过点 E 作 $EF \parallel AB$ ，利用两直线平行同旁内角互补，通过两组互补角求和，即可得 $\angle BEC + \angle B + \angle C = 360^\circ$ ；图③：过点 E 作 $EF \parallel AB$ ，结合内错角相等与角的和差关系，即可得 $\angle C = \angle B + \angle BEC$ ；

(2) 过点 E 作 $EF \parallel AB$ ，结合已知 $AB \parallel CD$ ，根据平行公理的推论推出 $AB \parallel CD \parallel EF$ ，随后利用“两直线平行，内错角相等”的性质，将 $\angle B$ 转化为 $\angle BEF$ 、 $\angle C$ 转化为 $\angle CEF$ ；最后结合图形中 $\angle CEF = \angle BEF + \angle BEC$ 的和差关系，通过等量代换，即可证明 $\angle C = \angle B + \angle BEC$ ；

(3) 过点 E 作 $EF \parallel AB$ ，过点 P 作 $PG \parallel AB$ ，根据平行公理的推论推出 $AB \parallel CD \parallel EF \parallel PG$ ，可得 $\angle ABE + \angle BEF = 180^\circ$ ， $\angle DCE + \angle CEF = 180^\circ$ ， $\angle ABP = \angle BPG$ ， $\angle DCP = \angle CPG$ ，结合 $\angle BEC = 100^\circ$ ，可得 $\angle ABE + \angle DCE = 260^\circ$ ，利用角平分线的性质，得到 $\angle ABP = \frac{1}{2} \angle ABE$ ， $\angle DCP = \frac{1}{2} \angle DCE$ ，进而得 $\angle ABP + \angle DCP = 130^\circ$ ，最后由 $\angle BPC = \angle BPG + \angle CPG = \angle ABP + \angle DCP$ 即可得出。

【详解】 (1) 解：图①：如图，过点 E 作 $EF \parallel AB$ ，



图①

又 $\because AB \parallel CD$,

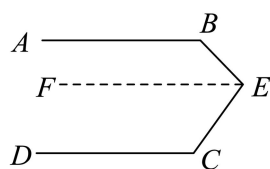
$\therefore AB \parallel CD \parallel EF$,

$\therefore \angle B = \angle BEF$, $\angle C = \angle CEF$,

$\therefore \angle BEC = \angle BEF + \angle CEF$,

$\therefore \angle BEC = \angle B + \angle C$;

图②: 如图, 过点 E 作 $EF \parallel AB$,



图②

又 $\because AB \parallel CD$,

$\therefore AB \parallel CD \parallel EF$,

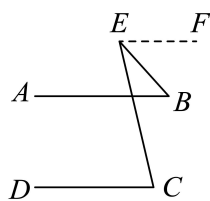
$\therefore \angle B + \angle BEF = 180^\circ$, $\angle C + \angle CEF = 180^\circ$,

$\therefore \angle B + \angle BEF + \angle C + \angle CEF = 360^\circ$,

$\therefore \angle BEC = \angle BEF + \angle CEF$,

$\therefore \angle BEC + \angle B + \angle C = 360^\circ$;

图③: 如图, 过点 E 作 $EF \parallel AB$,



图③

又 $\because AB \parallel CD$,

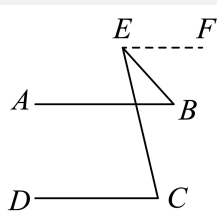
$\therefore AB \parallel CD \parallel EF$,

$\therefore \angle B = \angle BEF$, $\angle C = \angle CEF$,

$\therefore \angle CEF = \angle BEF + \angle BEC$,

$$\therefore \angle C = \angle B + \angle BEC;$$

(2) 证明: 如图, 过点 E 作 $EF \parallel AB$,



图③

又 $\because AB \parallel CD$,

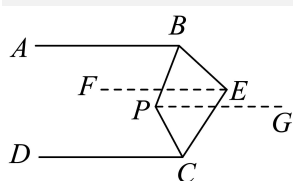
$$\therefore AB \parallel CD \parallel EF,$$

$$\therefore \angle B = \angle BEF, \quad \angle C = \angle CEF,$$

$$\therefore \angle CEF = \angle BEF + \angle BEC,$$

$$\therefore \angle C = \angle B + \angle BEC;$$

(3) 解: 如图, 过点 E 作 $EF \parallel AB$, 过点 P 作 $PG \parallel AB$,



图④

又 $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore AB \parallel CD \parallel EF \parallel PG,$$

$$\therefore \angle ABE + \angle BEF = 180^\circ, \quad \angle DCE + \angle CEF = 180^\circ, \quad \angle ABP = \angle BPG, \quad \angle DCP = \angle CPG,$$

$$\therefore \angle ABE + \angle BEF + \angle DCE + \angle CEF = 360^\circ, \quad \text{即 } \angle ABE + \angle BEC + \angle DCE = 360^\circ,$$

$$\therefore \angle BEC = 100^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE + \angle DCE = 260^\circ,$$

$$\therefore BP \text{ 平分 } \angle ABE, \quad CP \text{ 平分 } \angle DCE,$$

$$\therefore \angle ABP = \frac{1}{2} \angle ABE, \quad \angle DCP = \frac{1}{2} \angle DCE,$$

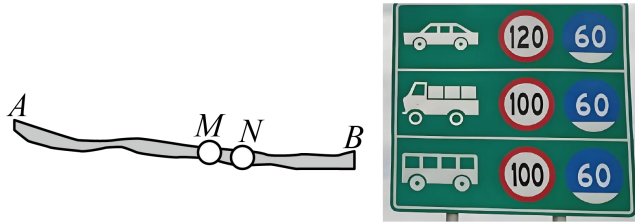
$$\therefore \angle ABP + \angle DCP = \frac{1}{2} \angle ABE + \frac{1}{2} \angle DCE = \frac{1}{2} (\angle ABE + \angle DCE) = 130^\circ,$$

$$\therefore \angle BPC = \angle BPG + \angle CPG = \angle ABP + \angle DCP = 130^\circ.$$

【点睛】过拐点作平行线, 是解决所有平行线拐点或折线问题的唯一通用万能方法, 本题的三个小问, 从探究、证明到应用, 全程围绕这一核心方法展开, 只要掌握“遇拐点、作平行、

用性质、转角度”的十二字逻辑，就能一通百通，搞定同类所有题型。

23. 如图(1)， A, B 两地间的公路长360km，其中有一段长10km的施工道路 MN ， M 距离 A 地200 km. 甲、乙两辆轿车分别从 A, B 两地出发，沿该公路相向而行，乙车比甲车晚出发20 min. 在非施工道路(其限速情况如图(2)所示)，甲车始终以100 km/h的速度行驶，乙车始终以 V km/h的速度行驶；在施工道路，两车均以40km/h的速度行驶。



图(1)

图(2)

(1)若 $V = 90$.

①甲车出发2h时，甲车行至_____处，乙车行至_____处；(填“ M ”“ N ”或“ MN 的中点”)

②甲车行至 MN 的中点时，乙车行驶的时间为_____h.

(2)已知两车在 P 处相遇.

①若 P 与 N 重合，求 V 的值；

②若 P 在非施工道路上(P 不与 M, N 重合)，直接写出 V 的取值范围.

【答案】 (1)① M, N ; ② $\frac{43}{24}$

(2)① $V = \frac{1800}{23}$, ② $60 \leq V < \frac{1800}{23}$ 或 $\frac{1800}{17} < V \leq 120$

【分析】 (1) ①根据题意，分别得到 $MA = 200\text{km}$ ， $MN = 10\text{km}$ ， $NB = 150\text{km}$ ，根据甲乙两车的速度，即可得到两车行驶的距离，即可得到结果；

②根据甲车在 AM 段和 MN 段的速度不同，得到甲车的行驶时间，结合乙车比甲车晚出发20min，得到乙车所用时间；

(2) ①两车在 P 处相遇(P 与 N 重合)，分别求出甲乙所用的时间，从而得到乙车的速度；

②分类讨论相遇点在 AM, NB 上，分别表示甲乙所行驶的路程，根据总路程为360km，得到等式，表示出速度，同时结合限速的要求，得到结果.

本题考查了一元一次方程的应用，一元一次不等式组的应用，以及路程、速度、时间之间的关系的应用，正确理解题意是解题的关键.

【详解】(1) 解: ① ∵ 依题意, $MA = 200\text{km}$, $MN = 10\text{km}$, $AB = 360\text{km}$,

∴ $NB = 150\text{km}$,

∵ 甲车从 A 地出发, 始终以 100km/h 的速度行驶,

∴ 甲车 2 小时共行驶了 $2 \times 100 = 200(\text{km})$,

∴ 甲车出发 2 小时, 行至 M 处,

∵ 乙车从 B 地出发, 比甲车晚出发 $20\text{min} = \frac{1}{3}$ 小时, 以 90km/h 的速度行驶,

∴ 乙车共行驶了 $90 \times \left(2 - \frac{1}{3}\right) = 150(\text{km})$,

∴ 乙车行至 N 处,

故答案为: M, N ;

② 甲车行至 MN 的中点时, 所用时间为: $\frac{200}{100} + \frac{5}{40} = \frac{17}{8}(\text{h})$,

此时乙车行驶所用时间: $\frac{17}{8} - \frac{1}{3} = \frac{43}{24}(\text{h})$,

故答案为: $\frac{43}{24}$;

(2) ① 两车在 P 处相遇, P 与 N 重合,

甲车所用时间为 $\frac{200}{100} + \frac{10}{40} = \frac{9}{4}(\text{h})$,

此时乙车所用时间为 $\frac{9}{4} - \frac{1}{3} = \frac{23}{12}(\text{h})$,

∴ 乙车的速度为 $V = 150 \div \frac{23}{12} = \frac{1800}{23}(\text{km/h})$;

② P 在非施工道路上 (P 不与 M, N 重合),

若 P 在 AM 上, 设甲的行驶时间为 t , 则 $0 < t < 2$,

此时甲行驶路程为 $100t$, 乙行驶的路程为 $150 + 10 + V\left(t - \frac{1}{3} - \frac{150}{V} - \frac{10}{40}\right)$,

∴ $100t + 150 + 10 + V\left(t - \frac{1}{3} - \frac{150}{V} - \frac{10}{40}\right) = 360$,

∴ $t = \frac{350 + \frac{7}{12}V}{100 + V}$,

∴ $0 < \frac{350 + \frac{7}{12}V}{100 + V} < 2$,

解得 $V > \frac{1800}{17}$,

∵ 限速为 $60 \leq V \leq 120$,

$$\therefore \frac{1800}{17} < V \leq 120,$$

若 P 在 NB 上, 设甲的行驶时间为 t , $\frac{360-10}{100} + \frac{10}{40} = \frac{15}{4}$,

$$\text{则 } \frac{9}{4} < t < \frac{15}{4},$$

此时甲行驶路程为 $200 + 10 + 100\left(t - \frac{200}{100} - \frac{10}{40}\right)$, 乙行驶的路程为 $V\left(t - \frac{1}{3}\right)$,

$$\therefore 200 + 10 + 100\left(t - \frac{200}{100} - \frac{10}{40}\right) + V\left(t - \frac{1}{3}\right) = 360,$$

$$\therefore t = \frac{375 + \frac{1}{3}V}{100 + V},$$

$$\therefore \frac{9}{4} < \frac{375 + \frac{1}{3}V}{100 + V} < \frac{15}{4},$$

$$\text{解得 } 0 < V < \frac{1800}{23},$$

$\therefore$ 限速为 $60 \leq V \leq 120$,

$$\therefore 60 \leq V < \frac{1800}{23},$$

综上所述 $60 \leq V < \frac{1800}{23}$ 或 $\frac{1800}{17} < V \leq 120$.

24. 在图 1, 图 2 中, 已知 $AB \parallel CD$, 点 E 在 AB 上, 点 F 在 DC 上, 点 G 为射线 EF 上一点.

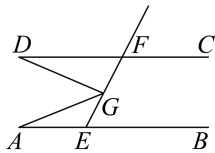


图1

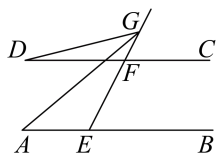


图2

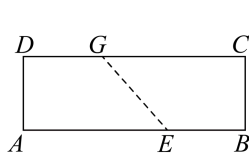


图3

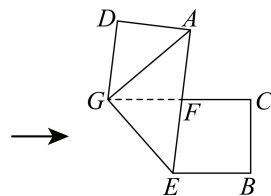


图4

【基础巩固】

(1) 在图 1 中, 求证: $\angle AGD = \angle A + \angle D$.

【类比探究】

(2) 在图 2 中, 当点 G 在线段 EF 延长线上时, 请写出 $\angle AGD$, $\angle A$, $\angle D$ 三者之间的数量关系并说明理由.

【应用拓展】

(3) 如图 3, 图 4, 将长方形纸条 $ABCD$ 沿 EG 折叠, 折叠后线段 AE 与 GC 交于点 F , 连接 AG , 若 AG 恰好平分 $\angle DGF$, $\angle AEG = 50^\circ$, 求 $\angle GAE$ 的度数.

【答案】(1)证明见解析

(2) $\angle A - \angle D = \angle AGD$ ，理由见解析

(3) 40°

【分析】(1) 过点 G 作 $MN \parallel AB$ ，则 $AB \parallel CD \parallel MN$ ，根据两直线平行内错角相等即可证明结论；

(2) 过点 G 作 $GH \parallel CD$ ， $AB \parallel CD \parallel GH$ ，根据两直线平行内错角相等和角度的和差，即可证得结论；

(3) 图 3 中，根据平行线的性质可得 $\angle DGE = 130^\circ$ ， $\angle EGC = 50^\circ$ ，从而得到图 4 中 $\angle DGF$ 的度数，然后根据角平分线的定义和两直线平行内错角相等即可求得答案.

【详解】(1) 证明：如图 1，过点 G 作 $MN \parallel AB$ ，

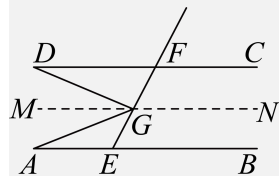


图1

$\because AB \parallel CD$ ，

$\therefore AB \parallel CD \parallel MN$ ，

$\therefore \angle A = \angle MGA$ ， $\angle D = \angle MGD$ ，

$\therefore \angle MGA + \angle MGD = \angle AGD$ ，

$\therefore \angle AGD = \angle A + \angle D$ ；

(2) 解： $\angle A - \angle D = \angle AGD$ ，理由如下：

如图 2，过点 G 作 $GH \parallel CD$ ，

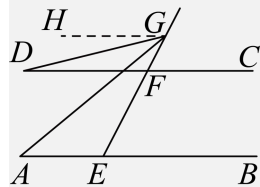


图2

$\because AB \parallel CD$ ，

$\therefore AB \parallel CD \parallel GH$ ，

$\therefore \angle A = \angle HGA$ ， $\angle D = \angle HGD$ ，

$\therefore \angle HGA - \angle HGD = \angle AGD$ ，

$\therefore \angle A - \angle D = \angle AGD$ ；

(3) 解: $\because$ 图 3 中, $AB \parallel CD$, $\angle AEG = 50^\circ$,
 $\therefore \angle DGE = 180^\circ - \angle AEG = 130^\circ$, $\angle EGC = \angle AEG = 50^\circ$,
 $\therefore$ 将长方形纸条 $ABCD$ 沿 EG 折叠, 得到图 4,
 $\therefore$ 图 4 中, $\angle DGE = 130^\circ$, $\angle EGC = 50^\circ$,
 $\therefore \angle DGF = \angle DGE - \angle EGC = 130^\circ - 50^\circ = 80^\circ$,
 $\therefore AG$ 恰好平分 $\angle DGF$,
 $\therefore \angle DGA = \frac{1}{2} \angle DGF = \frac{1}{2} \times 80^\circ = 40^\circ$,
 $\therefore DG \parallel AE$,
 $\therefore \angle EAG = \angle DGA = 40^\circ$.

25. 已知 $AB \parallel CD$, $\angle ABE = \angle DCE$.

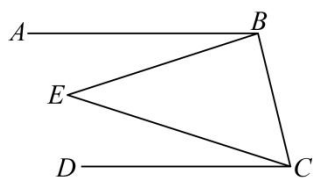


图 1

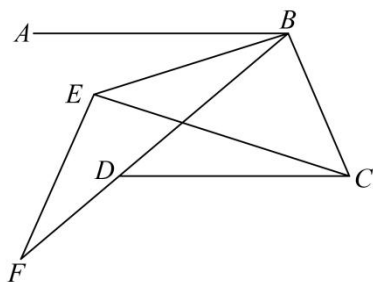


图 2

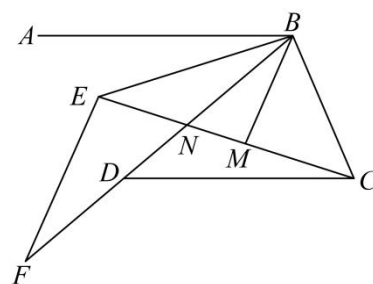
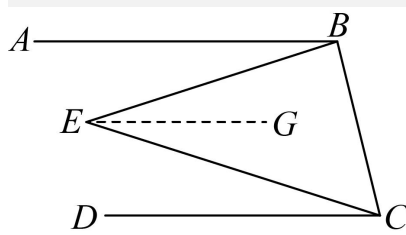


图 3

- (1) 如图 1, 求证: $\angle BEC = 2\angle ABE$;
 (2) 如图 2, $\angle EBF = \angle F$, 且 $\angle ABF = 45^\circ$, 求 $\angle FEC$ 的度数;
 (3) 如图 3, 在 (2) 的条件下, 过点 B 作 $BM \parallel EF$ 交 CE 于点 M , 若 $EN = 6$, $EF - BM = 1$, 当 $\triangle BEF$ 的面积为 8 时, 求 BM 的长.

【详解】(1) 证明: 在 E 右边作 $EG \parallel AB$,



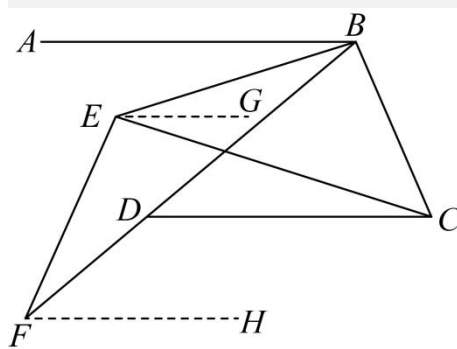
$\therefore \angle ABE = \angle BEG$,1 分
 $\because AB \parallel CD$,
 $\therefore EG \parallel CD$,
 $\therefore \angle DCE = \angle CEG$,1 分
 $\therefore \angle ABE = \angle DCE$,

$$\therefore \angle ABE = \angle BEG = \angle DCE = \angle CEG,$$

$$\therefore \angle BEC = \angle BEG + \angle CEG = 2\angle ABE; \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

(2) 解: 在 E 右边作 $EG \parallel AB$, 在 F 右边作 $FH \parallel AB$, 则

$$FH \parallel AB \parallel CD \parallel EG, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$



由 (1) 可得 $\angle BEC = 2\angle ABE$, $\angle ABE = \angle BEG = \angle DCE = \angle CEG$,

设 $\angle ABE = \angle BEG = \angle DCE = \angle CEG = \alpha$, $\angle EBF = \angle F = \beta$,

$$\therefore \angle ABF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle ABE + \angle EBF = \alpha + \beta = 45^\circ, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore FH \parallel AB,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle BFH = 45^\circ, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\therefore FH \parallel EG,$$

$$\therefore \angle GEF + \angle EFH = 180^\circ, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\therefore \angle GEC + \angle CEF + \angle EFB + \angle BFH = 180^\circ,$$

$$\therefore \alpha + \angle CEF + \beta + 45^\circ = 180^\circ, \text{ 即 } \angle CEF + 45^\circ + 45^\circ = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle CEF = 90^\circ; \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

(3) 解: 由 (2) 可得 $\angle CEF = 90^\circ$,

$$\therefore BM \parallel EF,$$

$$\therefore \angle CEF = \angle BMN = 90^\circ,$$

$$\therefore S_{\triangle BEF} = S_{\triangle NEF} + S_{\triangle BEN} = \frac{1}{2} EF \cdot EN + \frac{1}{2} BM \cdot EN = 8, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore EN = 6,$$

$$\therefore EF + BM = \frac{8}{3}, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\therefore EF - BM = 1,$$

∴ 两个式子相减得 $2BM = \frac{5}{3}$,

∴ $BM = \frac{5}{6}$2 分