

七年级数学下册期末考前提升训练卷

(新教材沪教版五四制七下全部)

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

1. 下列判断正确的是 ()

A. 如果 $a > b$, 那么 $a + 2 > b + 1$ B. 如果 $a > b$, 那么 $a^2 > b^2$

C. 如果 $ac > bc$, 那么 $a > b$ D. 如果 $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$, 那么 $a > b$

【答案】A

【分析】根据不等式性质对各选项逐一判断即可得到结果.

【详解】解: 对选项 A: $\because a > b, \therefore a + 1 > b + 1$,

又 $\because a + 2 > a + 1, \therefore a + 2 > b + 1$, 故 A 正确.

对选项 B: 举反例, 若 $a = 1, b = -2$, 满足 $a > b$, 但 $a^2 = 1 < b^2 = 4$, 故 B 错误.

对选项 C: 当 $c < 0$ 时, 根据不等式性质, 不等式两边同时除以负数 c , 不等号方向改变, 可得 $a < b$, 故 C 错误.

对选项 D: 当 $c < 0$ 时, 不等式两边同时乘以负数 c , 不等号方向改变, 可得 $a < b$, 故 D 错误.

2. 用反证法证明: 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$ 、 $\angle B$ 的对边分别是 a 、 b , 若 $\angle A > \angle B$, 则 $a > b$. 第一步应假设 ()

A. $a = b$ B. $a \neq b$ C. $a \leq b$ D. $a < b$

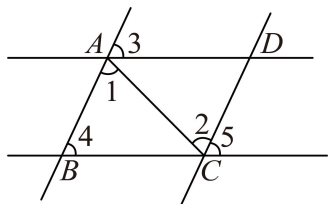
【答案】C

【分析】反证法第一步需要假设原命题的结论不成立, 正确写出原结论的否定即可得到答案.

【详解】解: $\because$ 原命题要证明的结论是 $a > b$,

$\therefore$ 结论不成立的否定为 $a \leq b$, 即第一步应假设 “若 $\angle A > \angle B$, 则 $a \leq b$ ”.

3. 如图, 下列推理不正确的是 ()



A. 因为 $\angle 1 = \angle 2$, 所以 $AB \parallel CD$ B. 因为 $AD \parallel BC$, 所以 $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$

C. 因为 $\angle 3 = \angle 4$, 所以 $AD \parallel BC$ D. 因为 $AB \parallel CD$, 所以 $\angle 4 = \angle 5$

【答案】B

【分析】根据平行线的性质与判定定理逐一判断即可.

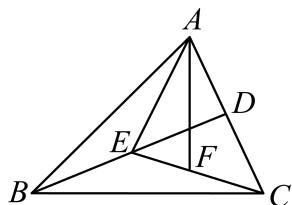
【详解】解：A、由 $\angle 1 = \angle 2$ ，可以根据内错角相等，两直线平行判定 $AB \parallel CD$ ，故此选项不符合题意；

B、由 $AD \parallel BC$ ，可以根据两直线平行，同旁内角互补得到 $\angle BAD + \angle 4 = 180^\circ$ ，不能得到 $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$ ，故此选项符合题意；

C、由 $\angle 3 = \angle 4$ ，可以根据同位角相等，两直线平行判定 $AD \parallel BC$ ，故此选项不符合题意；

D、由 $AB \parallel CD$ ，可以根据两直线平行，同位角相等得到 $\angle 4 = \angle 5$ ，故此选项不符合题意；

4. 如图， BD 为 $\triangle ABC$ 的中线， AE 为 $\triangle ABD$ 的中线， AF 为 $\triangle AEC$ 的中线，若 $\triangle AEF$ 的面积为 2cm^2 ，则 $\triangle ABC$ 的面积为（ ）



A. 8cm^2

B. 12cm^2

C. 16cm^2

D. 18cm^2

【答案】A

【分析】先由 AF 为 $\triangle AEC$ 的中线，求出 $S_{\triangle ACE} = 2S_{\triangle AEF} = 4\text{cm}^2$ ，根据 AE 为 $\triangle ABD$ 的中线可得

$S_{\triangle ADE} = S_{\triangle ABE}$ ， $S_{\triangle CDE} = S_{\triangle BCE}$ ，进而即可求解.

【详解】解： $\because AF$ 为 $\triangle AEC$ 的中线， $\triangle AEF$ 的面积为 2cm^2 ，

$$\therefore S_{\triangle ACE} = 2S_{\triangle AEF} = 4\text{cm}^2,$$

$\because AE$ 为 $\triangle ABD$ 的中线，

$$\therefore S_{\triangle ADE} = S_{\triangle ABE}, S_{\triangle CDE} = S_{\triangle BCE},$$

$$\therefore S_{\triangle ACE} = S_{\triangle ADE} + S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ACE} = 8\text{cm}^2.$$

5. 下列命题的逆命题是真命题的是（ ）

A. 全等三角形的对应角相等

B. 对顶角相等

C. 等边三角形的三个内角都等于 60°

D. 如果两个有理数相等，那么它们的平方相等

【答案】C

【分析】本题考查命题与逆命题的概念，全等三角形的判定与性质，等边三角形的判定与性质，准确写出逆命题是解题关键.

先写出各选项命题的逆命题，再依据全等三角形、对顶角、等边三角形的判定及有理数的性质，判断逆命题的真假，进而选出正确选项.

【详解】解：A 选项：原命题的逆命题为对应角相等的三角形是全等三角形，

$\therefore$ 对应角相等的三角形可能是相似三角形，不一定全等，

$\therefore$ 该逆命题是假命题；

B 选项：原命题的逆命题为相等的角是对顶角，

$\therefore$ 相等的角可能是同位角、内错角等，不一定是对顶角，

$\therefore$ 该逆命题是假命题；

C 选项：原命题的逆命题为如果一个三角形的三个内角都等于 60° ，那么它是等边三角形，

$\therefore$ 三个内角都相等的三角形是等边三角形，

$\therefore$ 该逆命题是真命题；

D 选项：原命题的逆命题为如果两个有理数的平方相等，那么这两个有理数相等，

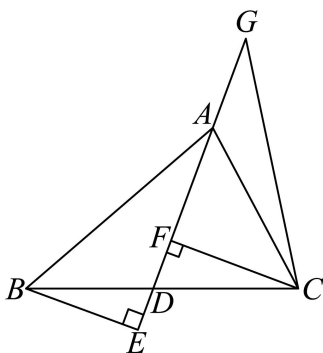
$\therefore$ 互为相反数的两个有理数平方相等，但本身不相等，

$\therefore$ 该逆命题是假命题.

综上，逆命题为真命题的是 C 选项.

故选：C.

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 为 $\triangle ABC$ 的中线，过点 B 作 $BE \perp AD$ 于点 E ，过点 C 作 $CF \perp AD$ 于点 F . 延长 FA 至点 G ，使得 $FG = AE$ ，连接 CG . 下列结论错误的是 ()



A. $BE = CF$

B. $\angle BAC = \angle G + 2\angle ACG$

$$C. S_{\triangle GCF} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CDF}$$

$$D. S_{\triangle ACG} = 2S_{\triangle BDE}$$

【答案】B

【分析】本题考查了全等三角形的判定和性质，三角形外角性质，证明 $\triangle BDE \cong \triangle CDF$ (AAS)，即可判定 A；证明 $\triangle AEB \cong \triangle GFC$ (SAS)，得到 $\angle BAE = \angle G$ ，进而可得 $\angle BAC = \angle BAE + \angle CAF = \angle G + \angle G + \angle ACG = 2\angle G + \angle ACG$ ，即可判定 B；由全等三角形的性质得 $S_{\triangle GCF} = S_{\triangle AEB}$ ， $S_{\triangle CDF} = S_{\triangle BDE}$ ，即得 $S_{\triangle GCF} - S_{\triangle CDF} = S_{\triangle AEB} - S_{\triangle BDE} = S_{\triangle ABD}$ ，即可判定 C；由 $FG = AE$ 可得 $AG = EF = 2DF$ ，进而得到 $\frac{1}{2}AG \cdot CF = \frac{1}{2} \cdot 2DF \cdot CF = 2\left(\frac{1}{2}DF \cdot CF\right)$ ，即得 $S_{\triangle ACG} = 2S_{\triangle BED}$ ，即可判定 D，综上即可求解，掌握以上知识点是解题的关键。

【详解】解：A、 $\because AD$ 为 $\triangle ABC$ 的中线，

$$\therefore BD = CD,$$

$$\because BE \perp AD, CF \perp AD,$$

$$\therefore \angle E = \angle CFD = \angle CFG = 90^\circ,$$

在 $\triangle BDE$ 和 $\triangle CDF$ 中，

$$\begin{cases} \angle E = \angle CFD \\ \angle BDE = \angle CDF, \\ BD = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BDE \cong \triangle CDF \text{ (AAS)},$$

$$\therefore BE = CF, DE = DF, \text{ 故正确, 不符合题意;}$$

B、在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle GFC$ 中，

$$\begin{cases} BE = CF \\ \angle E = \angle CFG, \\ AE = FG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEB \cong \triangle GFC \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle BAE = \angle G,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle BAE + \angle CAF = \angle G + \angle G + \angle ACG = 2\angle G + \angle ACG,$$

$\therefore \angle G$ 与 $\angle ACG$ 不一定相等，

$\therefore$ 故 B 不正确，符合题意；

$$C、\because \triangle AEB \cong \triangle GFC, \triangle BDE \cong \triangle CDF,$$

$$\therefore S_{\triangle GCF} = S_{\triangle AEB}, S_{\triangle CDF} = S_{\triangle BDE},$$

$$\therefore S_{\triangle GCF} - S_{\triangle CDF} = S_{\triangle AEB} - S_{\triangle BDE} = S_{\triangle ABD},$$

$\therefore S_{\triangle GCF} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CDF}$, 故 C 正确, 不符合题意;

D、 $\because FG = AE$,

$\therefore AF + AG = AF + EF$,

$\therefore AG = EF = 2DF$,

$\therefore \frac{1}{2}AG \cdot CF = \frac{1}{2} \cdot 2DF \cdot CF = 2\left(\frac{1}{2}DF \cdot CF\right)$,

即 $S_{\triangle AGC} = 2S_{\triangle BED}$, 故 D 正确, 不符合题意;

故选: B.

二、填空题

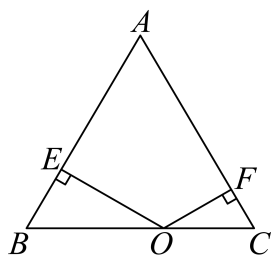
7. 三角形的两边长分别为 1 和 5, 则第三条边 a 的取值范围是_____.

【答案】 $4 < a < 6$

【详解】解: 设第三边的长为 a , 根据三角形任意两边之和大于第三边, 任意两边之差小于第三边, 得: $5 - 1 < a < 5 + 1$,

$\therefore 4 < a < 6$.

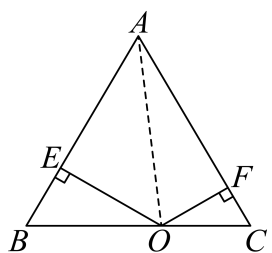
8. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 8$, 该三角形的面积为 20, O 是边 BC 上任意一点, $OE \perp AB$ 于点 E , $OF \perp AC$ 于点 F , 则 $OE + OF$ 等于_____.



【答案】 5

【分析】根据 $\triangle ABC$ 的面积 = $\triangle ABO$ 的面积 + $\triangle AOC$ 的面积, 利用面积公式和已知条件, 求出答案即可.

【详解】解: 如图所示: 连接 AO ,



$$\because S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OE, S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} AC \cdot OF, AB = AC = 8, S_{\triangle ABC} = 20 = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle AOC},$$

$$\therefore \frac{1}{2} AB \cdot OE + \frac{1}{2} AC \cdot OF = 20,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 8OE + \frac{1}{2} \times 8OF = 20,$$

$$\therefore 4OE + 4OF = 20,$$

$$\therefore OE + OF = 5.$$

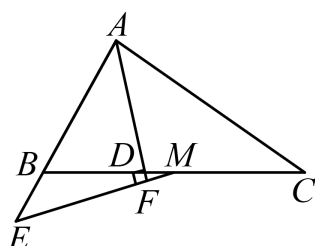
9. 把命题“等角的余角相等”写成“如果…，那么…”的形式为_____.

【答案】如果两个角是相等角的余角，那么这两个角相等.

【分析】先找出该命题的条件与结论，再将条件放在“如果”之后，结论放在“那么”之后即可完成改写.

【详解】解：命题“等角的余角相等”中，题设为两个角相等，结论为这两个角的余角相等，因此改写成“如果…，那么…”的形式为：如果两个角是相等角的余角，那么这两个角相等.

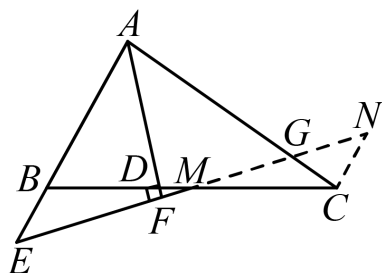
10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，过 BC 的中点 M 作 AD 的垂线，分别交 AD ， AB 的延长线于点 F ， E ，若 $BE = 1.5$ ， $AB = 4$ ，则 AC 的长为_____.



【答案】7

【分析】延长 EM 至点 N ，使 $EM = MN$ ，连接 CN ，设 EN 交 AC 于点 G ，推导出 $\triangle BME \cong \triangle CMN$ (SAS)，得到 $BE = CN = 1.5$ ， $\angle E = \angle N$ ，进而推导出 $\triangle AEF \cong \triangle AGF$ (ASA)，得到 $AE = AG = AB + BE = 5.5$ ， $\angle E = \angle AGE$ ，证明 $\angle N = \angle CGN$ ，得到 $CG = CN = 1.5$ ，则 $AC = AG + CG = 7$ ，即可解答.

【详解】解：延长 EM 至点 N ，使 $EM = MN$ ，连接 CN ，设 EN 交 AC 于点 G ，如图



$\because M$ 为 BC 中点，

$\therefore BM = CM$,
 $\because \angle BME = \angle CMN$,
 $\therefore \triangle BME \cong \triangle CMN$ (SAS),
 $\therefore BE = CN = 1.5, \angle E = \angle N$,
 $\because AD$ 平分 $\angle BAC$,
 $\therefore \angle EAF = \angle CAF$,
 $\because AF \perp EM$,
 $\therefore \angle AFE = \angle AFM = 90^\circ$,
 $\because AF = AF$,
 $\therefore \triangle AEF \cong \triangle AGF$ (ASA),
 $\therefore AE = AG = AB + BE = 5.5, \angle E = \angle AGE$,
 $\therefore \angle N = \angle AGE$,
 $\because \angle AGE = \angle CGN$,
 $\therefore \angle N = \angle CGN$,
 $\therefore CG = CN = 1.5$,
 $\therefore AC = AG + CG = 7$.

11. 定义一种运算 $a \otimes b = \frac{1}{3}a - 2b$, 则不等式 $2x \otimes (x - 3) > 2$ 的解集是_____.

【答案】 $x < 3$

【分析】 根据新定义的运算规则列出正确的一元一次不等式, 再按照一元一次不等式的解法求解即可.

【详解】 解: $\because a \otimes b = \frac{1}{3}a - 2b$, $2x \otimes (x - 3) > 2$,

$$\therefore \frac{1}{3} \times 2x - 2(x - 3) > 2,$$

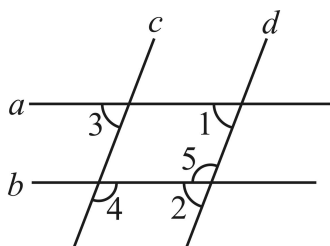
去括号, 得 $\frac{2}{3}x - 2x + 6 > 2$,

移项, 合并同类项, 得 $-\frac{4}{3}x > -4$,

解得 $x < 3$.

12. 如图所示, 直线 a , b 被直线 c , d 所截, 下列条件能判定 $a \parallel b$ 的是_____. (填序号)

① $\angle 1 = \angle 3$; ② $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$; ③ $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$; ④ $\angle 1 + \angle 5 = 180^\circ$.



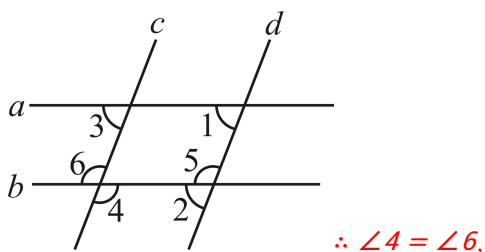
【答案】③④

【分析】此题考查了平行线的判定，平行线的判定方法有：同位角相等两直线平行；内错角相等两直线平行；同旁内角互补两直线平行。据此逐个判断即可。

【详解】解：① $\angle 1 = \angle 3$ ，则 $c \parallel d$ ，故 $\angle 1 = \angle 3$ 不能判定 $a \parallel b$ ；

② $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$ ，则 $c \parallel d$ ，故 $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$ 不能判定 $a \parallel b$ ；

③ 设 $\angle 4$ 的对顶角为 $\angle 6$ ，



$$\therefore \angle 4 = \angle 6,$$

$$\therefore \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 + \angle 6 = 180^\circ,$$

$\therefore \angle 3$ 和 $\angle 6$ 是同旁内角，

$$\therefore a \parallel b ;$$

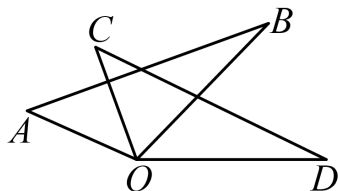
$$\textcircled{4} \because \angle 1 + \angle 5 = 180^\circ,$$

$\angle 1$ 和 $\angle 5$ 是同旁内角，

$$\therefore a \parallel b .$$

故答案为：③④.

13. 如图， $\triangle AOB \cong \triangle COD$ ，若 $\angle C = 44^\circ$ ， $\angle B = 26^\circ$ ，则 $\angle AOB =$ _____.



【答案】 110°

【分析】根据全等三角形性质求出 $\angle A$ ，再根据三角形的内角和定理求解即可。

【详解】解： $\because \triangle AOB \cong \triangle COD$,

$\therefore \angle A = \angle C = 44^\circ$ (全等三角形对应角相等),

在 $\triangle AOB$ 中, 根据三角形内角和为 180° ,

$$\angle AOB = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 44^\circ - 26^\circ = 110^\circ.$$

14. 如图 1 是路政部门利用折臂升降机维修路灯的图片, 图 2 是它的平面示意图, 已知路灯 AB 和折臂的底座 CD 都与地面 MN 垂直, 同时上折臂 AE 与下折臂 DE 的夹角 $\angle AED = 78^\circ$, 下折臂与底座 CD 的夹角 $\angle CDE = 120^\circ$, 那么上折臂 AE 与路灯 AB 的夹角 $\angle BAE$ 的度数为_____.



图1

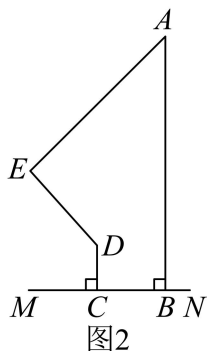
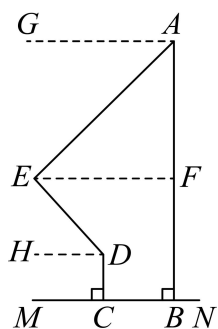


图2

【答案】 42° /42 度

【分析】 过点 E 作 $EF \parallel MN$ 交 AB 于点 F , 过点 D 作 $DH \parallel MN$, 过点 A 作 $AG \parallel MN$, 由平行线的性质求出 $\angle DEF = \angle EDH = 30^\circ$, 进而求得 $\angle AEF = 48^\circ$, 进而可得答案.

【详解】 解: 过点 E 作 $EF \parallel MN$ 交 AB 于点 F , 过点 D 作 $DH \parallel MN$, 过点 A 作 $AG \parallel MN$,



$$\therefore CD \perp MN, DH \parallel MN,$$

$$\therefore CD \perp DH,$$

$$\therefore \angle HDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle EDH = \angle CDE - \angle HDC = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ,$$

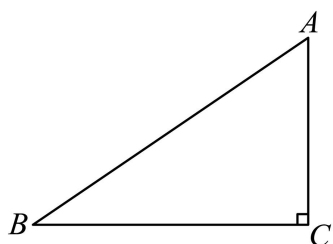
$$\therefore EF \parallel MN, DH \parallel MN, AG \parallel MN,$$

$$\therefore EF \parallel DH \parallel AG,$$

$$\therefore \angle DEF = \angle EDH = 30^\circ, \angle AEF = \angle EAG,$$

$$\begin{aligned} \therefore \angle AED &= 78^\circ, \\ \therefore \angle AEF &= \angle AED - \angle DEF = 78^\circ - 30^\circ = 48^\circ, \\ \therefore \angle AEF &= 48^\circ, \\ \therefore AB \perp MN, AG \parallel MN, \\ \therefore AG \perp AB, \text{ 即 } \angle GAB &= 90^\circ, \\ \therefore \angle BAE &= \angle GAB - \angle AEF = 90^\circ - 48^\circ = 42^\circ. \end{aligned}$$

15. 如图, 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle B = 34^\circ$, 点 D 是边 AB 上一点, 将 $\triangle BCD$ 沿直线 CD 翻折得到 $\triangle B'CD$, 如果 $B'D$ 与 $\text{Rt} \triangle ABC$ 的一边互相平行, 那么 $\angle BDC = \underline{\hspace{2cm}}$



【答案】 118° 或 73°

【分析】 分类讨论是解答本题的关键. 分 $B'D \parallel AC$ 和 $B'D \parallel BC$ 两种情况求解即可.

【详解】 解: 当 $B'D \parallel AC$ 时,

$$\because \angle ACB = 90^\circ, \angle B = 34^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 90^\circ - 34^\circ = 56^\circ.$$

$$\because B'D \parallel AC,$$

$$\therefore \angle ADB' = \angle A = 56^\circ.$$

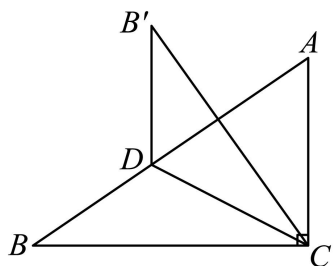
由折叠的性质可知, $\angle BDC = \angle B'DC = 56^\circ + \angle ADC$,

$$\therefore \angle ADC = \angle BDC - 56^\circ,$$

$$\because \angle BDC + \angle ADC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC + \angle BDC - 56^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore \angle BDC = 118^\circ.$$



当 $B'D \parallel BC$ 时,

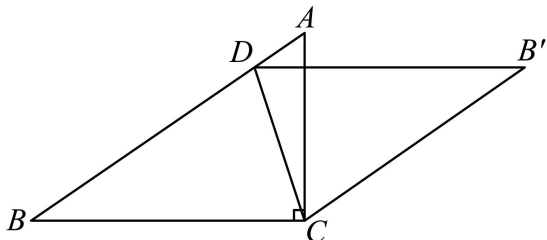
$$\therefore \angle B + \angle BDB' = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BDB' = 180^\circ - 34^\circ = 146^\circ,$$

由折叠的性质可知, $\angle BDC = \angle B'DC$,

$$\therefore \angle BDC + \angle B'DC = \angle BDB' = 146^\circ$$

$$\therefore \angle BDC = 73^\circ$$



综上所述: $\angle BDC = 118^\circ$ 或 73° .

16. 已知关于 y 的不等式组 $\begin{cases} 2y - 2 \geq y + \frac{a}{4} \\ \frac{1+y}{2} < \frac{y+4}{3} \end{cases}$ 有且只有 3 个整数解, 则满足条件的所有整数 a 的值之和为

-----.

【答案】 -6

【分析】 先解不等式组得到解集, 再根据不等式组有且只有 3 个整数解确定 a 的取值范围, 找出范围内所有整数 a , 计算其和即可.

【详解】 解: $\begin{cases} 2y - 2 \geq y + \frac{a}{4} \text{ ①} \\ \frac{1+y}{2} < \frac{y+4}{3} \text{ ②} \end{cases},$

解不等式①得 $y \geq 2 + \frac{a}{4}$,

解不等式②, 不等式两边同乘 6 得 $3(1+y) < 2(y+4)$,

展开得 $3 + 3y < 2y + 8$, 移项得 $y < 5$,

$\therefore$ 不等式组的解集为 $2 + \frac{a}{4} \leq y < 5$,

$\therefore$ 不等式组有且只有 3 个整数解,

$\therefore$ 三个整数解为 2, 3, 4, 可得 $1 < 2 + \frac{a}{4} \leq 2$,

$$\therefore -1 < \frac{a}{4} \leq 0,$$

$$\therefore -4 < a \leq 0,$$

$\therefore$ 满足条件的所有整数 a 为 $-3, -2, -1, 0$, 和为 $(-3) + (-2) + (-1) + 0 = -6$.

17. 等腰 $\triangle ABC$ 中, 顶角 $\angle A = 40^\circ$, 点 E 在边 AC 上, 且 $\triangle BCE$ 是等腰三角形, 则 $\angle ABE =$ _____

【答案】 0° 或 15° 或 30°

【分析】先根据等腰三角形性质和三角形内角和定理求出 $\triangle ABC$ 的底角 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的度数，再分情况讨论 $\triangle BCE$ 中相等的两边，即可求出 $\angle ABE$ 的度数.

【详解】解： $\because$ 等腰 $\triangle ABC$ 中，顶角 $\angle A = 40^\circ$ ， $AB = AC$ ，

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ,$$

分三种情况讨论 $\triangle BCE$ ：

① 当 $BE = BC$ 时，

$$\therefore \angle BEC = \angle BCE = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle EBC = 180^\circ - \angle BEC - \angle BCE = 180^\circ - 70^\circ - 70^\circ = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle ABC - \angle EBC = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ;$$

② 当 $BC = CE$ 时，

$$\therefore \angle CBE = \angle BEC = \frac{180^\circ - \angle BCE}{2} = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle ABC - \angle CBE = 70^\circ - 55^\circ = 15^\circ;$$

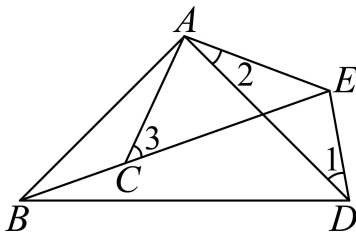
③ 当 $BE = CE$ 时，

$$\therefore \angle EBC = \angle BCE = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle ABC - \angle EBC = 70^\circ - 70^\circ = 0^\circ,$$

综上所述， $\angle ABE$ 的值为 0° 或 15° 或 30° .

18. 如图，点 B, C, E 三点在同一直线上，且 $AB = AD$ ， $AC = AE$ ， $BC = DE$ ，若 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 102^\circ$ ，则 $\angle 3$ 的度数为_____.



【答案】 51°

【分析】根据条件，通过SSS证明 $\triangle ABC \cong \triangle ADE$ ，得到 $\angle 1$ ， $\angle 2$ ， $\angle 3$ 之间的关系，再利用已知角度关系求解即可.

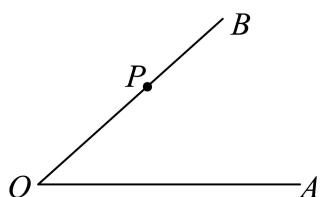
【详解】解：在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中，
$$\begin{cases} AB = AD, \\ AC = AE, \\ BC = DE, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADE (\text{SSS}),$$

$$\begin{aligned}\therefore \angle BAC &= \angle 2, \quad \angle ABC = \angle 1, \\ \therefore \angle 3 &= \angle ABC + \angle BAC = \angle 1 + \angle 2, \\ \text{又 } \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 &= 102^\circ, \\ \therefore 2\angle 3 &= 102^\circ, \\ \therefore \angle 3 &= 51^\circ.\end{aligned}$$

三、解答题

19. 如图，点 P 是 $\angle AOB$ 的边 OB 上的一点，按下列语句画图.



- (1) 过点 P 画边 OB 的垂线，交 OA 于点 C ；
- (2) 过点 P 画 $\triangle OPC$ 的高 PH ；
- (3) 线段_____的长度是点 P 到直线 OA 的距离.

【答案】 (1) 见解析

(2) 见解析

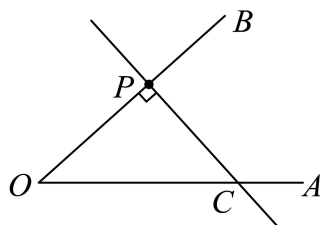
(3) PH

【分析】 (1) 根据垂直的定义，过点 P 作 $PC \perp OB$ ；

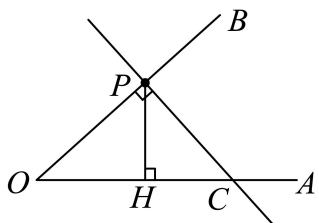
(2) 根据三角形的高的定义，过点 P 作 $PH \perp OC$ ，线段 PH 即为所求；

(3) 根据点到直线的距离的定义可知：线段 PH 的长度是点 P 到直线 OA 的距离.

【详解】 (1) 解：下图直线 PC 即为所求，



(2) 解：下图线段 PH 即为所求，

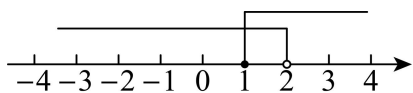


(3) 解：线段 PH 的长度是点 P 到直线 OA 的距离.

20. 解不等式组： $\begin{cases} 5x - 3 \geq 2x \\ \frac{2x-1}{3} < \frac{x}{2} \end{cases}$ 并把它的解集在数轴上表示出来.

【答案】 $1 \leq x < 2$,

解集在数轴上表示如下：



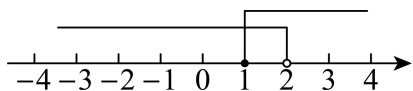
【分析】先求出不等式组中每一个不等式的解集，再求出它们的公共部分，然后把不等式的解集表示在数轴上即可.

【详解】解： $\begin{cases} 5x - 3 \geq 2x \text{ ①} \\ \frac{2x-1}{3} < \frac{x}{2} \text{ ②} \end{cases}$,

解不等式①，得 $x \geq 1$,

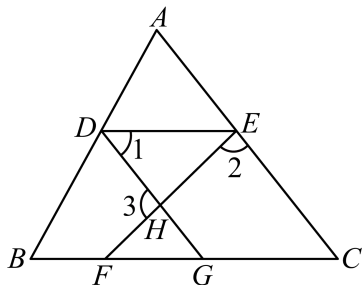
解不等式②，得 $x < 2$,

将不等式①和②的解集在数轴上表示出来：



∴ 不等式组的解集为 $1 \leq x < 2$.

21. 如图， $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ ， $\angle 1 = \angle C$. 求证： $\angle ADE = \angle B$. 请补全下面的证明过程.



证明： $\because \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ (已知)

又 $\because \angle 3 = \angle EHG$ (①_)

$\therefore \angle 2 + \angle EHG = 180^\circ$ (等量代换)

$\therefore DG \parallel EC$ (同旁内角互补, 两直线平行)

$\therefore \angle 1 = \angle AED$ (③_)

$\because \angle 1 = \angle C$ (已知)

$\therefore \angle AED = \angle C$ (等量代换)

$\therefore BC \parallel DE$ (同位角相等, 两直线平行)

$\therefore \angle ADE = \angle B$ (⑤_)

【答案】 见解析

【详解】 证明: $\because \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ (已知)

又 $\because \angle 3 = \angle EHG$ (对顶角相等)

$\therefore \angle 2 + \angle EHG = 180^\circ$ (等量代换)

$\therefore DG \parallel EC$ (同旁内角互补, 两直线平行)

$\therefore \angle 1 = \angle AED$ (③两直线平行, 内错角相等)

$\because \angle 1 = \angle C$ (已知)

$\therefore \angle AED = \angle C$ (等量代换)

$\therefore BC \parallel DE$ (同位角相等, 两直线平行)

$\therefore \angle ADE = \angle B$ (两直线平行, 同位角相等)

22. 【问题情境】

某校大力开展社团活动, 其中该校“陕北民俗”社团准备去工艺品店购买“陕北剪纸”和“榆林泥塑”两种民俗手工艺品.

【素材展现】

素材 1: 工艺品店无促销活动: 购买 2 幅陕北剪纸和 6 个榆林泥塑共需 130 元; 购买 3 幅陕北剪纸所需的钱数和购买 4 个榆林泥塑所需的钱数相同.

素材 2: 工艺品店开展促销活动:

活动一: “疯狂打折”: 陕北剪纸打八折, 榆林泥塑打四折;

活动二: “买一送一”: 购买一幅陕北剪纸送一个榆林泥塑.

【解决问题】

(1)该工艺品店在无促销活动时, 陕北剪纸和榆林泥塑的销售单价各是多少元?

(2)社团决定购买陕北剪纸、榆林泥塑共 100 件, 其中陕北剪纸不超过 50 幅. 购买陕北剪纸的数量在什么范围内时, 活动二更实惠?

【答案】 (1)陕北剪纸的销售单价为 20 元, 榆林泥塑的销售单价为 15 元;

(2) 当 $45 < m \leq 50$ 时, 活动二更实惠.

【分析】(1) 设陕北剪纸的销售单价为 x 元, 榆林泥塑的销售单价为 y 元, 根据题意列方程得,

$$\begin{cases} 2x + 6y = 130 \\ 3x = 4y \end{cases}, \text{ 求解即可;}$$

(2) 设购买陕北剪纸 m 幅, 则购买榆林泥塑 $(100 - m)$ 个, 根据题意分别表示出活动一、二的费用再列不等式求解即可.

【详解】(1) 解: 设陕北剪纸的销售单价为 x 元, 榆林泥塑的销售单价为 y 元,

依题意列二元一次方程组得
$$\begin{cases} 2x + 6y = 130 \\ 3x = 4y \end{cases},$$

解得
$$\begin{cases} x = 20 \\ y = 15 \end{cases},$$

即陕北剪纸的销售单价为 20 元, 榆林泥塑的销售单价为 15 元;

(2) 解: 设购买陕北剪纸 m 幅, 则购买榆林泥塑 $(100 - m)$ 个,

活动一的费用为: $20m \times 0.8 + 15(100 - m) \times 0.4 = (10m + 600)$ 元,

活动二的费用为: $20m + 15(100 - 2m) = (-10m + 1500)$ 元,

当 $10m + 600 > -10m + 1500$ 时,

解得 $m > 45$,

又 $\because 0 < m \leq 50$,

$\therefore 45 < m \leq 50$,

答: 当 $45 < m \leq 50$ 时, 活动二更实惠.

23. 综合与探究

【感知】如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, BP, CP 分别是 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的角平分线.

【应用】

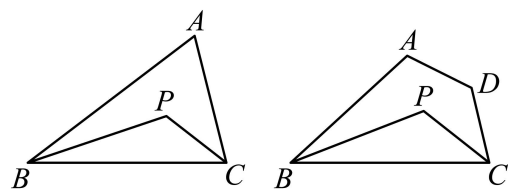


图1

图2

(1) 若 $\angle ABC = 50^\circ, \angle ACB = 70^\circ$, 则 $\angle BPC = \underline{\quad}$; 若 $\angle BAC = 70^\circ$, 则 $\angle BPC = \underline{\quad}$;

(2) 求 $\angle BPC$ 与 $\angle A$ 之间的关系并证明;

【拓展】

(3)如图 2, 在四边形 $ABCD$ 中, BP, CP 分别是 $\angle ABC$ 和 $\angle BCD$ 的角平分线, 求 $\angle BPC$ 与 $\angle A + \angle D$ 的数量关系.

【答案】(1) 120° , 125°

(2) $\angle BPC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$; 理由见解析

(3) $\angle A + \angle D = 2\angle BPC$

【分析】(1) 根据角平分线定义, 三角形内角和定理求解即可;

(2) 根据角平分线, 三角形内角和定理进行求解;

(3) 结合 (2) 的结论, 根据三角形外角性质, 内角和定理求解.

【详解】(1) 解: 若 $\angle ABC = 50^\circ$, $\angle ACB = 70^\circ$,

由条件可知 $\angle PBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 25^\circ$, $\angle PCB = \frac{1}{2}\angle ACB = 35^\circ$,

$$\therefore \angle BPC = 180^\circ - \angle PBC - \angle PCB = 120^\circ;$$

若 $\angle BAC = 70^\circ$,

$\because BP, CP$ 分别是 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线,

$$\therefore \angle PBC = \frac{1}{2}\angle ABC, \angle PCB = \frac{1}{2}\angle ACB,$$

$$\therefore \angle BPC = 180^\circ - \angle PBC - \angle PCB = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC,$$

$\because \angle BAC = 70^\circ$,

$$\therefore \angle BPC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC = 90^\circ + \frac{1}{2} \times 70^\circ = 125^\circ;$$

(2) 解: $\angle BPC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$; 理由如下:

$\because BP, CP$ 分别是 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线,

$$\therefore \angle PBC = \frac{1}{2}\angle ABC, \angle PCB = \frac{1}{2}\angle ACB,$$

$$\therefore \angle BPC = 180^\circ - \angle PBC - \angle PCB$$

$$= 180^\circ - (\angle PBC + \angle PCB)$$

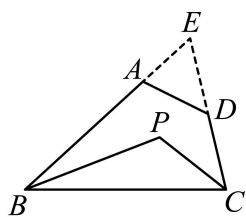
$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A)$$

$$= 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A;$$

(3) 解: $\angle A + \angle D = 2\angle BPC$.

如图，延长 BA ， CD ，交于点 E ，由(2)知， $\angle BPC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle E$ ，



由条件可知 $\angle BAD + \angle CDA = \angle E + \angle E + \angle ADE + \angle DAE = 180^\circ + \angle E$ ，

$$\therefore \angle E = \angle BAD + \angle CDA - 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BPC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle E$$

$$= 90^\circ + \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle CDA - 180^\circ)$$

$$= 90^\circ + \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle CDA) - 90^\circ$$

$$= \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle CDA),$$

$$\text{即 } \angle BAD + \angle CDA = 2\angle BPC.$$

24. 利用平行线的相关知识，七年级的聪聪做了一个潜望镜，潜望镜中的两面镜子 $EF \parallel GH$ ，光线 AB 经过镜子 EF 反射后，得到光线 BC ；光线 BC 经过镜子 GH 反射后，得到光线 CD 进入聪聪的眼中，根据光的反射原理，始终有 $\angle 1 = \angle 2 = \alpha$ ， $\angle 3 = \angle 4 = \beta$ 。

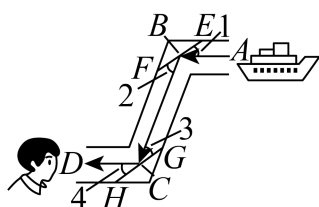


图1

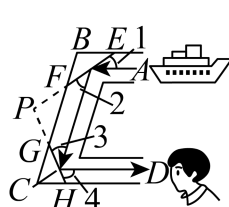


图2

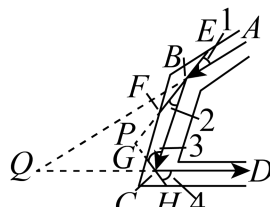


图3

(1)如图1，光线 AB 与光线 CD 互相平行吗？请说明理由；

(2)如图2，受聪聪影响，明明思考后发现，当 $AB \parallel CD$ 时，镜子 EF 和 GH 的位置可以发生改变，且 $\angle P$ ， $\angle PCD$ 和 $\angle PBA$ 有不变的数量关系，请求出 $\angle P$ ， $\angle PCD$ 和 $\angle PBA$ 之间的数量关系；

(3)如图3，受启发的丹丹，对聪聪设计的潜望镜上方的镜筒和镜子 EF 进行改造，使其成为可调节的潜望镜了，以便更灵活地上下观察，此时，若入射光线 AB 和反射光线 CD 的夹角为 $\angle Q$ ，请直接写出 $\angle P$ 与 $\angle Q$ 的数量关系。

【答案】(1) $AB \parallel CD$ ，理由见解析

(2)数量关系为： $\angle BPG + \angle PCD + \angle PBA = 360^\circ$

(3) $\angle P$ 与 $\angle Q$ 的数量关系是： $2\angle P - \angle Q = 180^\circ$

【分析】(1) 先证明 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$ ，再证明 $\angle ABC = \angle DCB$ ，即可得到 $AB \parallel CD$ ；

(2) 过 P 作 $PM \parallel AB$ ，则 $AB \parallel CD \parallel PM$ ，得到 $\angle BPG + \angle PCD + \angle PBA = 360^\circ$ ；

(3) 过 P 作 $PM \parallel CD$ ，过 B 作 $BN \parallel CD$ ，即可得到 $\angle Q = \angle ABN$ ， $\angle BPM = \angle EBN = \angle 1 + \angle ABN$ ， $\angle MPG = \angle 4$ ，

再根据 $\angle CBN + \angle BCM = 180^\circ$ ， $\angle CBN = 180^\circ - 2\angle 1 - \angle Q$ ， $\angle BCD = 180^\circ - 2\angle 4$ ，得到 $\angle 1 + \angle 4 = \frac{180^\circ - \angle Q}{2}$ ，代入

$\angle BPC = \angle 1 + \angle Q + \angle 4 = \frac{180^\circ - \angle Q}{2} + \angle Q$ ，整体代入求解即可．

【详解】(1) 解： $AB \parallel CD$ ，理由如下：

$\because EF \parallel GH$ ，

$\therefore \angle 2 = \angle 3$ ，

$\because \angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$ ，

$\because \angle ABC = 180^\circ - \angle 1 - \angle 2$ ， $\angle BCD = 180^\circ - \angle 3 - \angle 4$ ，

$\therefore \angle ABC = \angle DCB$ ，

$\therefore AB \parallel CD$ ；

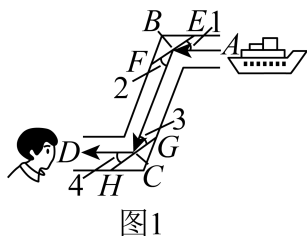


图1

(2) 解：过 P 作 $PM \parallel AB$ ．

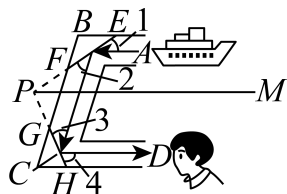


图2

$\because AB \parallel CD$ ，

$\therefore AB \parallel CD \parallel PM$ ，

$\therefore \angle PCD + \angle CPM = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle ABP + \angle BPM = 180^\circ$ ，

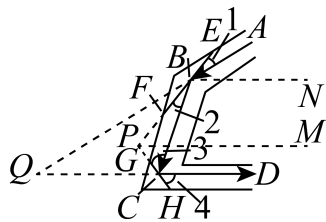
$\therefore \angle BPG + \angle PCD + \angle PBA = 360^\circ$ ，

$\therefore$ 数量关系为： $\angle BPG + \angle PCD + \angle PBA = 360^\circ$ ，理由如上；

(3) 解: $\angle P$ 与 $\angle Q$ 的数量关系是: $2\angle P - \angle Q = 180^\circ$.

由题意得 $\angle QBP = \angle ABE = \angle 2$, $\angle QCP = \angle 4 = \angle 3$,

过 P 作 $PM \parallel CD$, 过 B 作 $BN \parallel CD$,



$\therefore NB \parallel PM$, $\angle Q = \angle ABN$, $\angle BPM = \angle EBN = \angle 1 + \angle ABN$,

$\angle MPG = \angle 4$,

$\therefore \angle CBN + \angle BCM = 180^\circ$, $\angle BPC = \angle BPM + \angle CPM = \angle 1 + \angle Q + \angle 4$,

$\therefore \angle CBN = 180^\circ - \angle 1 - \angle 2 - \angle ABN = 180^\circ - 2\angle 1 - \angle Q$, $\angle BCD = 180^\circ - \angle 3 - \angle 4 = 180^\circ - 2\angle 4$,

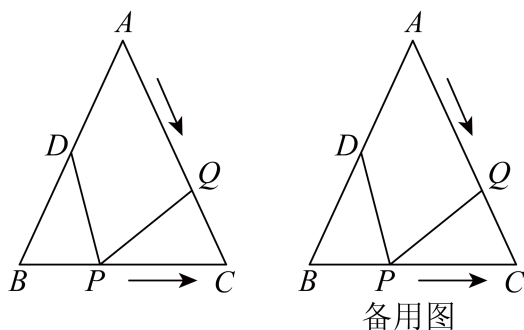
$\therefore \angle CBN + \angle BCD = 180^\circ = 180^\circ - 2\angle 1 - \angle Q + 180^\circ - 2\angle 4$,

整理得 $\angle 1 + \angle 4 = \frac{180^\circ - \angle Q}{2}$,

$\therefore \angle BPC = \angle 1 + \angle Q + \angle 4 = \frac{180^\circ - \angle Q}{2} + \angle Q$,

整理得 $2\angle BPC - \angle Q = 180^\circ$.

25. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 12\text{cm}$, $BC = 10\text{cm}$, 点 D 为 AB 的中点. 若 P 、 Q 两点分别从 B 、 A 两点同时出发, 点 P 在线段 BC 上以 2cm/s 的速度由点 B 向点 C 运动. 同时, 点 Q 在线段 AC 上以 4cm/s 的速度由点 A 向点 C 运动, 设运动时间为 t , 回答下列问题:



(1) 当 t 为何值时, C 在 PQ 的垂直平分线上;

(2) 当 t 为何值时, $\triangle BPD \cong \triangle CQP$;

(3) 经过_____秒后, $\triangle CPQ$ 为等腰三角形, 且 $\triangle CPQ$ 的周长为 18cm .

【答案】(1) $t = 1$

(2) $t = 2$

(3) 1 或 1.75 或 1.6

【分析】(1) 先根据已知条件得到 $BD = \frac{1}{2}AB = 6\text{cm}$, $\angle B = \angle C$; 再表示出 $CP = (10 - 2t)\text{cm}$, $CQ = (12 - 4t)\text{cm}$, 利用垂直平分线的性质列等式 $10 - 2t = 12 - 4t$, 解得 $t = 1$;

(2) 由 $AB = AC$ 得 $\angle B = \angle C$, 结合全等三角形的判定条件, 确定 $\triangle BPD \cong \triangle CQP$ 需满足 $BD = CP$ 且 $BP = CQ$, 列出方程组求解得 $t = 2$;

(3) 先根据周长为 18cm 得出 $PQ = (6t - 4)\text{cm}$, 再分 $CP = CQ$ 、 $CP = PQ$ 、 $CQ = PQ$ 三种等腰三角形的情况列方程求解, 最后验证三种情况均符合要求三角形三边关系即可.

【详解】(1) 解: 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 12\text{cm}$, D 是 AB 中点,
故 $BD = \frac{1}{2}AB = 6\text{cm}$, $\angle B = \angle C$,

由动点运动得: $BP = 2t\text{cm}$, $AQ = 4t\text{cm}$,

因此 $CP = (10 - 2t)\text{cm}$, $CQ = (12 - 4t)\text{cm}$,

$\because$ 点 C 在 PQ 的垂直平分线上,

$\therefore CP = CQ$, 即 $10 - 2t = 12 - 4t$,

解得 $t = 1$;

(2) 解: $\because AB = AC = 12\text{cm}$,

$\therefore \angle B = \angle C$,

当 $\triangle BPD \cong \triangle CQP$ 且 $\angle B = \angle C$,

$\therefore$ 对应边满足 $\begin{cases} BD = CP \\ BP = CQ \end{cases}$,

即 $\begin{cases} 6 = 10 - 2t \\ 2t = 12 - 4t \end{cases}$,

两个方程同解得 $t = 2$,

当 $t = 2$ 时, $\triangle BPD \cong \triangle CQP$;

(3) 解: $\because \triangle CPQ$ 为等腰三角形, 且 $\triangle CPQ$ 的周长为 18cm ,

$\therefore PQ = 18 - CP - CQ = 18 - (10 - 2t) - (12 - 4t) = 6t - 4(\text{cm})$,

分三种情况讨论等腰三角形:

若 $CP = CQ$ 时, $10 - 2t = 12 - 4t$,

解得 $t = 1$,

此时三边为 8cm , 8cm , 2cm , 符合三角形三边关系;

若 $CP = PQ$ 时, $10 - 2t = 6t - 4$,

解得 $t = 1.75$,

此时三边为 6.5cm , 5cm , 6.5cm , 符合三角形三边关系;

若 $CQ = PQ$ 时, $12 - 4t = 6t - 4$,

解得 $t = 1.6$,

此时三边为 5.6cm , 6.8cm , 5.6cm , 符合三角形三边关系.

综上, 经过 1 或 1.75 或 1.6 秒后, $\triangle CPQ$ 为等腰三角形, 且 $\triangle CPQ$ 的周长为 18cm .

26. 八年级数学兴趣小组在一次活动中进行了探究试验活动, 请你和他们一起活动吧.

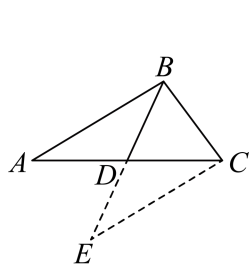


图1

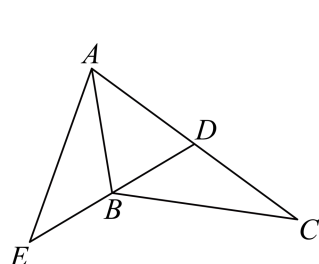


图2

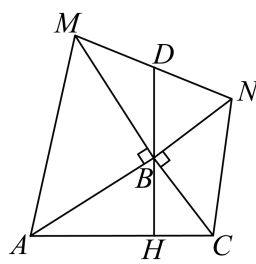


图3

【初步探索】

如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $AB = 4$, $BC = 2$, 求 AC 边上的中线 BD 的取值范围.

以下是小聪同学思考的解决方法: 先延长 BD 至点 E , 使 $DE = BD$, 然后连接 CE , 利用三角形全等将边 AB 转化到 CE , 最后在 $\triangle DEC$ 中利用三角形三边关系即可求出中线 BD 的取值范围.

(1) 在这个过程中, 小聪同学证明三角形全等用到的判定方法是_____; 若线段 BD 的长度为整数, 则 $BD =$ _____;

【灵活应用】

(2) 如图 2, BD 是 $\triangle ABC$ 的中线, 延长 DB 到点 E , 连接 AE , 使 $AE = BC$, 求证: $\angle AEB = \angle DBC$;

【拓展提升】

(3) 如图 3, 在 $\triangle ABC$ 中, 分别以 AB, BC 作等腰直角三角形 $\triangle ABM$ 和 $\triangle BCN$, 其中 $\angle ABM = \angle CBN = 90^\circ$, 连接 MN , 点 D 是 MN 的中点, 连接 DB , 延长 DB 与 AC 相交于点 H , $BD = 6$, $BH = 2$. 试判断 BD 与 AC 的数量关系, 并求出 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】(1) SAS, 2; (2) 见解析; (3) $AC = 2BD$, $\triangle ABC$ 的面积为 12

【分析】(1) 如图 1: 先延长 BD 至点 E , 使 $DE = BD$, 连接 CE , 易证 $\triangle ADB \cong \triangle CDE$ (SAS) 可得 $CE = AB = 4$, $BD = DE$, 再在 $\triangle BCE$ 中利用三角形的三边关系可得 $2 < BE < 6$, 进而得到 $1 < BD < 3$, 再结合已知条件即可解答;

(2) 如图: 延长 BD 到点 F , 使 $DF = BD$, 连接 AF . 易证 $\triangle ADF \cong \triangle CDB$ (SAS) 可得 $AF =$

BC , $\angle DBC = \angle F$, 进而得到 $AF = AE$, 再根据等边对等角可得 $\angle F = \angle AEB$, 最后根据等量代换即可解答;

(3) 如图 3: 延长 BD 到点 E , 使 $DE = BD = 6$, 连接 ME . 易证 $\triangle BDN \cong \triangle EDM$ (SAS) 可得 $BN = EM$, $\angle DME = \angle DNB$, 再证明 $\triangle ABC \cong \triangle BME$ (SAS) 可得 $AC = BE$, $\angle MBE = \angle CAB$, 即 $AC = 2BD$; 再说明 $\angle AHB = 90^\circ$, 最后运用三角形的面积公式求解即可.

【详解】解: (1) 如图 1: 先延长 BD 至点 E , 使 $DE = BD$, 连接 CE ,

$\because BD$ 是边 AC 上的中线,

$\therefore AD = CD$,

$\because DE = BD$, $\angle ADB = \angle EDC$,

$\therefore \triangle ADB \cong \triangle CDE$ (SAS),

$\therefore CE = AB = 4$,

在 $\triangle BCE$ 中, $CE - BC < BE < CE + BC$,

$\therefore 2 < BE < 6$, 即 $2 < 2BD < 6$,

$\therefore 1 < BD < 3$,

$\because$ 线段 BD 的长度为整数,

$\therefore BD = 2$.

故答案为: SAS, 2.

(2) 证明: 如图: 延长 BD 到点 F , 使 $DF = BD$, 连接 AF .

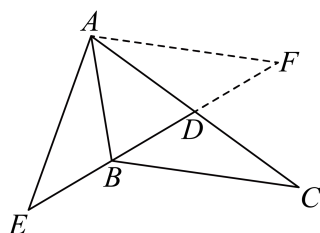


图2

$\because BD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线,

$\therefore AD = CD$,

在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle CDB$ 中,

$$\begin{cases} AD = CD \\ \angle ADF = \angle CDB \\ DB = DF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle CDB$ (SAS).

$\therefore AF = BC$, $\angle DBC = \angle F$,

$$\therefore AE = BC, ,$$

$$\therefore AF = AE, ,$$

$$\therefore \angle F = \angle AEB, ,$$

$$\text{又} \because \angle DBC = \angle F, ,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle DBC. ,$$

(3) 如图 3: 延长 BD 到点 E , 使 $DE = BD = 6$, 连接 ME .

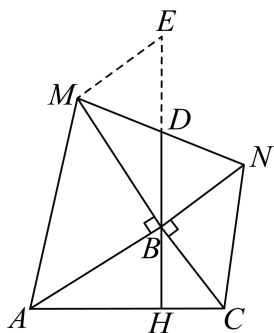


图3

$$\because \text{点 } D \text{ 是 } MN \text{ 的中点},$$

$$\therefore MD = ND.$$

在 $\triangle BDN$ 和 $\triangle EDM$ 中,

$$\begin{cases} BD = DE \\ \angle BDN = \angle EDM, \\ MD = ND \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BDN \cong \triangle EDM (\text{SAS}).$$

$$\therefore BN = EM, \angle DME = \angle DNB,$$

$$\therefore BN \parallel EM.$$

$$\because \triangle BCN \text{ 是等腰直角三角形},$$

$$\therefore \angle CBN = 90^\circ, BN = BC, \angle BCN = 45^\circ,$$

$$\therefore EM = BC.$$

$$\because \angle ABM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle MBN = 180^\circ.$$

$$\text{又} \because BN \parallel EM,$$

$$\therefore \angle MBN + \angle BME = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle BME.$$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BME$ 中,

$$\begin{cases} AB = BM \\ \angle ABC = \angle BME, \\ BC = EM \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle BME$ (SAS).

$\therefore AC = BE, \angle MBE = \angle CAB,$

$\because BE = 2BD,$

$\therefore AC = 2BD.$

$\because BD = 6,$

$\therefore AC = 2 \times 6 = 12.$

$\because \angle ABM = 90^\circ,$

$\therefore \angle MBE + \angle ABH = 90^\circ,$

$\therefore \angle CAB + \angle ABH = 90^\circ,$

$\therefore \angle AHB = 90^\circ,$

$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} \times 12 \times 2 = 12.$

【点睛】灵活运用“倍长中线法”构造全等三角形是解题的关键.