

2025-2026 学年七年级下学期期末模拟卷

数学·全解全析

(考试时间: 90 分钟 试卷满分: 100 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。
4. 测试范围: 新教材沪教版七年级数学下册全部。

第一部分 (选择题 共 18 分)

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分。在每个小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求的)

1. 如果 $x > y$, 那么下列各式中错误的是 ()

- A. $1+x > 1+y$ B. $1-x > 1-y$
C. $-5x < -5y$ D. $2x > 2y$

【答案】B

【详解】解: A、 $\because x > y$,

$\therefore 1+x > 1+y$, 该选项正确, 不符合题意;

B、 $\because x > y$,

$\therefore -x < -y$,

$\therefore 1-x < 1-y$, 该选项错误, 符合题意;

C、 $\because x > y$,

$\therefore -5x < -5y$, 该选项正确, 不符合题意;

D、 $\because x > y$,

$\therefore 2x > 2y$, 该选项正确, 不符合题意.

2. 已知两个全等的直角三角形, 直角边长分别为 3 和 4, 斜边长为 5. 如果将这两个全等的直角三角形拼成一个等腰三角形, 那么这个等腰三角形的周长为 ()

- A. 16 B. 18 C. 16 或 18 D. 14 或 16

【答案】C

【详解】解：①沿直角边3拼接：将两个直角边3重合，形成底边为 $4+4=8$ ，两腰为斜边5的等腰三角形，周长 $=5+5+8=18$ 。

②沿直角边4拼接：将两个直角边4重合，形成底边为 $3+3=6$ ，两腰为斜边5的等腰三角形，周长 $=5+5+6=16$ 。

③沿斜边5拼接，但此时无法形成三角形。

综上，等腰三角形的周长为16或18，

故选：C。

3. 下列命题中，真命题的是（ ）

- A. ABC 中，如果 $\angle A = \angle B = \frac{1}{2}\angle C$ ，则 ABC 是直角三角形
- B. 三角形的三条高交于三角形内的一点
- C. 两个锐角的和是钝角
- D. 相等的角是对顶角

【答案】A

【详解】解：A. $\because$ 三角形内角和为 180° ，且 $\angle A = \angle B = \frac{1}{2}\angle C$

设 $\angle A = x$ ，则 $\angle B = x$ ， $\angle C = 2x$

$\therefore x + x + 2x = 180^\circ$

解得 $x = 45^\circ$

$\therefore \angle C = 90^\circ$

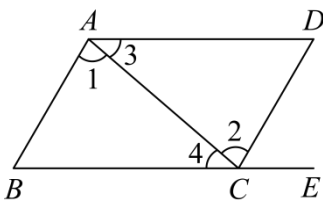
$\therefore ABC$ 是直角三角形，A 是真命题；

B. 钝角三角形的三条高所在直线交于三角形外一点，直角三角形的三条高交于直角顶点，都不交于三角形内一点，故 B 是假命题；

C. 两个锐角的和不一定是钝角，例如当两个锐角为 30° 和 20° 时，和为 50° ，仍是锐角，故 C 是假命题；

D. 相等的角不一定是对顶角，故 D 是假命题。

4. 如图，已知四边形 $ABCD$ ，点 E 在 BC 延长线上，连接 AC ，则下列条件中，能判定 $AD \parallel BC$ 的是（ ）



A. $\angle 1 = \angle 2$

B. $\angle 3 = \angle 4$

C. $\angle D + \angle DAB = 180^\circ$

D. $\angle B = \angle DCE$

【答案】B

【详解】解：若 $\angle 1 = \angle 2$ ，则 $AB \parallel CD$ ，故 A 选项不合题意；

若 $\angle 3 = \angle 4$ ，则 $AD \parallel BC$ ，故 B 选项符合题意；

若 $\angle D + \angle DAB = 180^\circ$ ，则 $AB \parallel CD$ ，故 C 选项不合题意；

若 $\angle B = \angle DCE$ ，则 $AB \parallel CD$ ，故 D 选项不合题意.

5. 给定三角形的三个元素，所画出的三角形的形状和大小不能完全确定的是 ()

A. $AB = 4\text{cm}$, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 30^\circ$

B. $AB = 4\text{cm}$, $BC = 3\text{cm}$, $\angle A = 30^\circ$

C. $AB = 4\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$, $\angle B = 30^\circ$

D. $AB = 4\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$, $AC = 6\text{cm}$

【答案】B

【详解】解：全等三角形可唯一确定三角形的形状和大小，全等判定定理包括 ASA, AAS, SAS, SSS, HL, 但 SSA 不能判定三角形全等，无法确定唯一三角形，

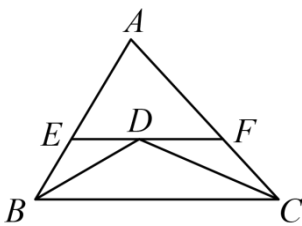
A、选项给出 $AB = 4\text{cm}$, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 30^\circ$ ，符合 ASA 判定，可确定唯一三角形，不符合题意；

B、选项给出 $AB = 4\text{cm}$, $BC = 3\text{cm}$, $\angle A = 30^\circ$ ，属于 SSA，可画出两个形状不同的三角形，不能完全确定三角形的形状和大小，符合题意；

C、选项给出 $AB = 4\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$, $\angle B = 30^\circ$ ，符合 SAS 判定，可确定唯一三角形，不符合题意；

D、选项给出 $AB = 4\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$, $AC = 6\text{cm}$ ，符合 SSS 判定，可确定唯一三角形，不符合题意.

6. 如图， $\angle B$, $\angle C$ 的平分线相交于点 D，过点 D 作 $EF \parallel BC$ ，交 AB 于点 E，交 AC 于点 F，下列结论中：① $BE = DE$ ；② $DF = ED$ ；③ $\angle BDC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$ ；④ $\triangle AEF$ 周长 = $AB + AC$ ，正确的有 ()



A. ①②

B. ①②④

C. ①③④

D. ①②③④

【答案】C

【详解】解： $\because EF \parallel BC$,

$$\therefore \angle EDB = \angle DBC, \quad \angle FDC = \angle DCB,$$

$\because \triangle ABC$ 中， $\angle B$ 与 $\angle C$ 的平分线交于点 D，

$$\therefore \angle EBD = \angle DBC, \quad \angle FCD = \angle DCB,$$

$\therefore \angle EBD = \angle EDB, \angle FCD = \angle FDC,$

$\therefore BE = DE, CF = DF,$ 故①正确;

DF 与 ED 不一定相等, 故②错误;

$\therefore$ 在 ABC 中, $\angle B$ 和 $\angle C$ 的平分线相交于点 D ,

$\therefore \angle DBC = \frac{1}{2} \angle ABC, \angle BCD = \frac{1}{2} \angle ACB,$

$\therefore \angle DBC + \angle DCB = \frac{1}{2} \angle ABC + \frac{1}{2} \angle ACB = \frac{1}{2} (\angle ABC + \angle ACB) = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle A) = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A,$

$\therefore \angle BDC = 180^\circ - (\angle DBC + \angle DCB) = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A,$ 故③正确;

$\therefore \triangle AEF$ 的周长为:

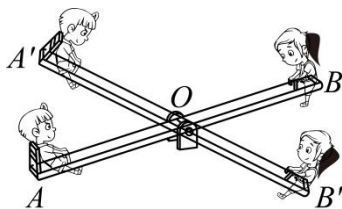
$AE + EF + AF = AE + ED + DF + AF = AE + EB + FC + AF = AB + AC,$ 故④正确;

综上, 正确的有①③④.

第二部分 (非选择题 共 82 分)

二、填空题 (本大题共 12 小题, 每小题 2 分, 满分 24 分)

7. 小强和小丽一起玩跷跷板, 如图, 横板 AB 绕中心 O 上下转动. 当小强从 A 运动到 A' 的位置时, $\angle AOA' = 45^\circ$, 则 $\angle BOB'$ 的度数为_____.



【答案】 45°

【详解】解: 由题意可得 $\angle BOB' = \angle AOA' = 45^\circ$.

8. 如果等腰三角形的两边长分别是 4cm 和 9cm, 那么它的周长是_____.

【答案】 22cm

【详解】解: 当腰长为 4cm, 则三边为 4cm, 4cm, 9cm,

此时 $4+4 < 9$, 不能组成三角形, 舍去;

当腰长为 9cm, 则三边为 4cm, 9cm, 9cm,

此时 $4+9 > 9$, 能组成三角形, 符合题意,

$\therefore$ 它的周长是 $4+9+9 = 22\text{cm},$

故答案为: $22\text{cm}.$

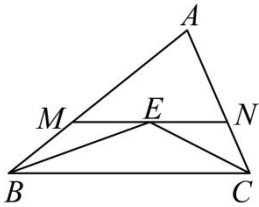
9. “如果两个角相等, 那么它们是对顶角”的逆命题是_____ (填“真”或“假”) 命题.

【答案】真

【详解】解：原命题的逆命题为：如果两个角是对顶角，那么它们相等；

根据对顶角相等可知，该逆命题是真命题.

10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线交于点 E ，过点 E 作 $MN \parallel BC$ 交 AB 于 M ，交 AC 于 N ，若 $BM + CN = 7$ ，则线段 MN 的长为_____ .



【答案】7

【详解】解： $\because \angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线交于点 E ，

$$\therefore \angle MBE = \angle EBC, \angle NCE = \angle ECB,$$

$$\because MN \parallel BC,$$

$$\therefore \angle MEB = \angle EBC, \angle NEC = \angle ECB,$$

$$\therefore \angle MBE = \angle MEB, \angle NCE = \angle NEC$$

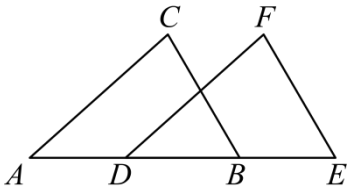
$$\therefore BM = EM, NE = NC,$$

$$\because BM + CN = 7,$$

$$\therefore MN = ME + NE = BM + CN = 7,$$

故答案为：7.

11. 如图，已知 $AC \parallel DF$ ， $CB \parallel FE$ ，添加一个条件，使得 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，这个条件可以是_____ (填写一个即可).



【答案】 $AD = BE$ (答案不唯一)

【详解】解：添加条件 $AD = BE$ ；

$$\therefore AD = BE$$

$$\therefore AD + DB = BE + DB$$

$$\text{即： } AB = DE,$$

$\because AC \parallel DF$,

$\therefore \angle A = \angle FDB$,

$\because CB \parallel FE$,

$\therefore \angle E = \angle CBD$,

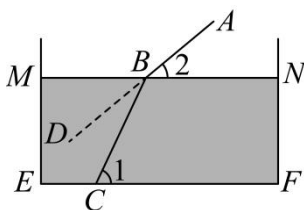
在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle FDB \\ AB = DE \\ \angle E = \angle CBD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF (ASA)$

故答案为: $AC = DF$ (答案不唯一).

12. 如图, 水面 MN 与底面 EF 平行, 光线 AB 从空气射入水里时发生了折射, 折射光线 BC 射到水底 C 处, 点 D 在 AB 的延长线上, 若 $\angle 1 = 75^\circ$, $\angle 2 = 35^\circ$, 则 $\angle DBC =$ _____.



【答案】 40°

【详解】 解: $\because MN \parallel EF$,

$\therefore \angle 1 + \angle CBN = 180^\circ$,

$\because \angle 1 = 75^\circ$,

$\therefore \angle CBN = 105^\circ$,

$\because \angle 2 = 35^\circ$,

$\therefore \angle DBC = 180^\circ - 35^\circ - 105^\circ = 40^\circ$.

13. 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x-3 < m \\ x-3m > 2 \end{cases}$ 无解, 则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \geq \frac{1}{2}$

【详解】 解: $\begin{cases} x-3 < m \text{ ①} \\ x-3m > 2 \text{ ②} \end{cases}$

解①, 得 $x < m+3$.

解②, 得 $x > 3m+2$.

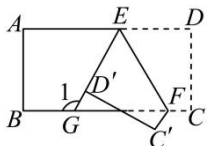
∴ 不等式组无解,

$$\therefore 3m + 2 \geq m + 3$$

移项, 合并同类项得 $2m \geq 1$.

系数化为 1 得 $m \geq \frac{1}{2}$.

14. 将一张长方形纸片 $ABCD$ (AB 为短边, AD 为长边) 沿直线 EF 翻折, 使点 D 、 C 分别落在点 D' 、 C' 位置. 翻折后, ED' 的延长线与 BC 相交于点 G (如图所示), 则 $\angle 1$ 与 $\angle EFG$ 之间的数量关系为_____.



【答案】 $\angle 1 = 2\angle EFG$

【详解】解: 因为四边形 $ABCD$ 是长方形

所以 $AD \parallel BC$

所以 $\angle DEF = \angle EFG$

由折叠的性质可知, $\angle DEF = \angle D'EF$

因为点 G 在 ED' 的延长线上所以 $\angle D'EF$ 即为 $\angle GEF$

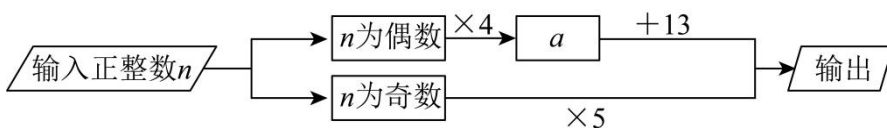
所以 $\angle GEF = \angle EFG$

因为 $AD \parallel BC$

所以 $\angle 1 = \angle GEF + \angle DEF = 2\angle GEF$

所以 $\angle 1 = 2\angle EFG$

15. 如图, 要使输出值大于 100, 则输入的最小正整数是_____.



【答案】 21

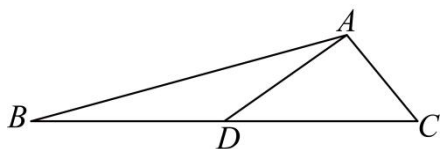
【详解】解: 设输入的为 x ,

当 x 为偶数, $4x + 13 > 100$, 解得 $x > 21.75$,

当 x 为奇数, $5x > 100$, 解得 $x > 20$,

则输入的最小正整数是 21.

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 5, AC = 1$, AD 是 $\triangle ABC$ 的中线, 设 AD 长为 x , 那么 x 的取值范围是_____.

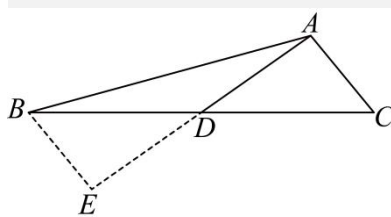


【答案】 $2 < AD < 3$

【详解】解：延长 AD 到 E ，使 $DE = AD$ ，

$\because AD$ 是 ABC 的中线

$\therefore DC = DB$



在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle EDB$ 中，

$$\begin{cases} AD = ED \\ \angle ADC = \angle EDB, \\ DC = DB \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle EDB$ (SAS)

$\therefore AC = BE = 1$ ，

在 $\triangle ABE$ 中， $BE = 1$ ， $AB = 5$ ，

$\therefore 5 - 1 < AE < 5 + 1$ ，即 $4 < 2AD < 6$ ，

则 $2 < AD < 3$ 。

故答案为： $2 < AD < 3$ 。

17. 当三角形中一个内角 α 是另一个内角的 3 倍时，我们称此三角形为“特征三角形”，其中 α 称为“特征角”，如果一个“特征三角形”有一个内角为 50° ，那么这个“特征三角形”的最小内角的度数为_____。

【答案】 $\left(\frac{50}{3}\right)^\circ$ 或 32.5°

【详解】解：根据定义，特征三角形中特征角满足 $\alpha = 3\beta$ ，其中 β 为另一个内角，结合三角形内角和定理，分三种情况讨论：①当 50° 为特征角 α 时，

$\therefore \alpha = 50^\circ = 3\beta$ ，

$\therefore \beta = \left(\frac{50}{3}\right)^\circ$ ，

第三个内角为 $180^\circ - 50^\circ - \left(\frac{50}{3}\right)^\circ = \left(\frac{340}{3}\right)^\circ$ ，

$$\therefore \left(\frac{50}{3}\right)^\circ < 50^\circ < \left(\frac{340}{3}\right)^\circ,$$

$$\therefore \text{此时最小内角为} \left(\frac{50}{3}\right)^\circ;$$

②当 50° 为内角 β 时,

$$\therefore a = 3\beta = 150^\circ,$$

$\therefore a + \beta = 150^\circ + 50^\circ = 200^\circ > 180^\circ$, 不符合三角形内角和定理, 舍去该情况;

③ 当 50° 为第三个内角时,

$$\therefore a + \beta + 50^\circ = 180^\circ, \text{ 且 } a = 3\beta,$$

$$\therefore 4\beta = 130^\circ,$$

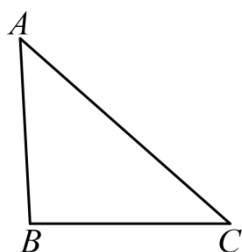
$$\text{解得: } \beta = 32.5^\circ, a = 97.5^\circ,$$

$$\therefore 32.5^\circ < 50^\circ < 97.5^\circ,$$

$$\therefore \text{此时最小内角为 } 32.5^\circ;$$

综上, 这个“特征三角形”的最小内角的度数为 $\left(\frac{50}{3}\right)^\circ$ 或 32.5° ,

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 42^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 B 旋转得 $\triangle DBE$, 点 A 、 C 的对应点分别是点 D 、 E , 线段 BE 交边 AC 于点 F , 连接 CE 、 AD , 如果 $\triangle CEF$ 是等腰三角形, 那么 $\angle ADE$ 的度数是 _____.



【答案】 29° 或 43°

【详解】解: $\therefore$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 B 旋转得 $\triangle DBE$, $\angle BAC = 45^\circ$,

$$\therefore \angle BDE = 45^\circ, AB = AD, CB = EB, \angle ABD = \angle DBE - \angle ABE = \angle ABC - \angle ABE = \angle EBC$$

$$\therefore \angle BDA = \angle BAD = \frac{180^\circ - \angle ABD}{2} = \frac{180^\circ - \angle CBE}{2} = \angle BEC = \angle BCE,$$

$\therefore \triangle CEF$ 是等腰三角形,

$$\therefore CE = CF \text{ 或 } CE = EF,$$

当 $CE = CF$ 时, 设 $\angle ECF = a$,

$$\therefore \angle ACB = 42^\circ,$$

$$\therefore \angle CFE = \angle BEC = \angle BCE = 42^\circ + a,$$

$$\therefore \angle CFE + \angle BEC + \angle ECF = 42^\circ + a + 42^\circ + a + a = 180^\circ,$$

$$\therefore a = 32^\circ,$$

$$\therefore \angle BDA = \angle BEC = 42^\circ + a = 74^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle BDA - \angle BDE = 74^\circ - 45^\circ = 29^\circ,$$

当 $EC = EF$ 时, 设 $\angle ECF = \beta$, 则 $\angle EFC = \angle ECF = \beta$,

$$\therefore \angle ACB = 42^\circ,$$

$$\therefore \angle BEC = \angle BCE = 42^\circ + \beta$$

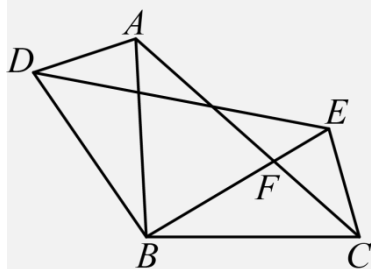
$$\therefore \angle BEC + \angle CFE + \angle ECF = 42^\circ + \beta + \beta + \beta = 180^\circ,$$

$$\therefore \beta = 46^\circ,$$

$$\therefore \angle BDA = \angle BEC = 42^\circ + \beta = 42^\circ + 46^\circ = 88^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle BDA - \angle BDE = 88^\circ - 45^\circ = 43^\circ$$

故答案为: 29° 或 43° .



三.解答题 (本大题共 8 小题, 58 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

19. (4 分) 解不等式组 $\begin{cases} 2x-2 < 3x \text{ ①} \\ \frac{x+2}{5} - \frac{x-1}{4} \geq \frac{1}{2} \text{ ②} \end{cases}$, 并在数轴上把它的解集表示出来.

【答案】 $-2 < x \leq 3$, 解集在数轴上表示见详解

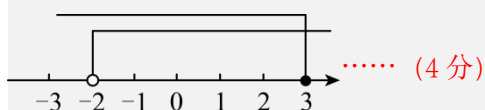
【详解】解: $\begin{cases} 2x-2 < 3x \text{ ①} \\ \frac{x+2}{5} - \frac{x-1}{4} \geq \frac{1}{2} \text{ ②} \end{cases}$

解①式得: $x > -2$, (1 分)

解②式得: $x \leq 3$, (2 分)

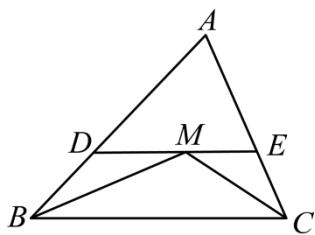
$\therefore$ 不等式组的解集为: $-2 < x \leq 3$, (3 分)

解集在数轴上表示如下:



20. (6 分) 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 BM 、 CM 分别平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$, 经过点 M 的直线 DE 平

行于 BC ，交 AB 、 AC 分别于点 D 、 E ， $AB=8$ ， $AC=6$ 。



求 $\triangle ADE$ 的周长。

解： $\because BM$ 平分 $\angle ABC$ ，

$$\therefore \angle CBM = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$\because DE \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle CBM = \angle BMD \quad (\underline{\hspace{2cm}}).$$

$$\therefore \angle BMD = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\therefore DB = DM \quad (\underline{\hspace{2cm}}).$$

同理可得 $EC = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$\therefore \triangle ADE \text{ 周长} = AD + DE + AE$$

$$= AD + DM + ME + AE$$

$$= AD + DB + EC + AE$$

$$= AB + AC = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【详解】 解： $\because BM$ 平分 $\angle ABC$ ，

$$\therefore \angle CBM = \angle DBM. \quad \cdots \cdots (1 \text{ 分})$$

$\because DE \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle CBM = \angle BMD \quad (\text{两直线平行，内错角相等}). \quad \cdots \cdots (2 \text{ 分})$$

$$\therefore \angle BMD = \angle DBM. \quad \cdots \cdots (3 \text{ 分})$$

$$\therefore DB = DM \quad (\text{等角对等边}). \quad \cdots \cdots (4 \text{ 分})$$

同理可得 $EC = EM. \quad \cdots \cdots (5 \text{ 分})$

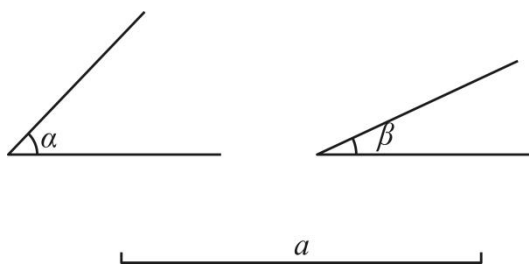
$$\therefore \triangle ADE \text{ 周长} = AD + DE + AE$$

$$= AD + DM + ME + AE$$

$$= AD + DB + EC + AE$$

$$= AB + AC = 14. \quad \cdots \cdots (6 \text{ 分})$$

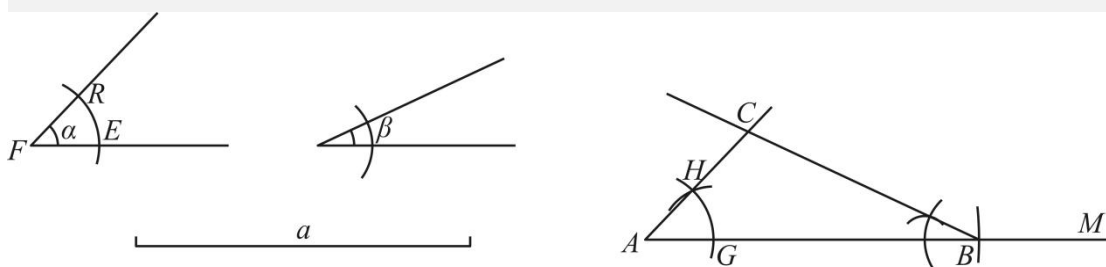
21. (6 分) 如图，已知 $\angle \alpha$ 、 $\angle \beta$ 和线段 a 。



(1)求作 $\triangle ABC$ ，使 $\angle A = \angle \alpha$, $AB = a$, $\angle B = \angle \beta$ (不写作法，保留作图痕迹)；

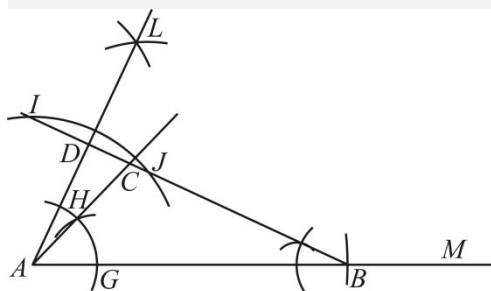
(2)在第 (1) 题所作的 $\triangle ABC$ 中，画出 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的高 AD 。

【详解】(1) 解：如图所示， $\triangle ABC$ 即为所求作的三角形；



..... (4 分)

(2) 解：如图所示， AD 即为所求作。



..... (6 分)

22. (6 分) 为迎接校园文化艺术节，某中学举办了“青春绘梦，艺彩飞扬”绘画比赛，并购买 A 、 B 两种徽章作为奖品。已知购买 2 个 A 种徽章和 3 个 B 种徽章需 156 元；购买 4 个 A 种徽章和 5 个 B 种徽章需 284 元。

(1)每个 A 种徽章与每个 B 种徽章的价格分别为多少元？

(2)学校计划购进 A 、 B 两种徽章共 60 个，已知购进的 A 种徽章数不少于 B 种徽章数的 2 倍，且总费用不超过 2000 元，那么购进 A 种徽章的个数是多少？

【详解】(1) 解：设每个 A 种徽章的价格为 x 元，每个 B 种徽章的价格为 y 元，

由题意得：
$$\begin{cases} 2x + 3y = 156 \\ 4x + 5y = 284 \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} x = 36 \\ y = 28 \end{cases}$$

答：每个 A 种徽章的价格为 36 元，每个 B 种徽章的价格为 28 元；..... (3 分)

(2) 解: 设购进 m 个 A 种徽章, 则购进 $(60-m)$ 个 B 种徽章,

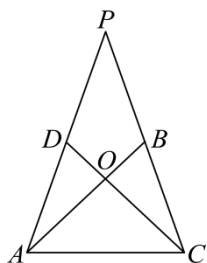
由题意得:
$$\begin{cases} m \geq 2(60-m) \\ 36m + 28(60-m) \leq 2000 \end{cases},$$

解得:
$$\begin{cases} m \geq 40 \\ m \leq 40 \end{cases},$$

$\therefore m = 40,$

答: 购进 A 种徽章的个数是 40 个. $\cdots\cdots$ (6 分)

23. (8 分) 如图, 已知: 在 $\triangle PAC$ 中, 点 D 、 B 分别在边 PA 、 PC 上, AB 与 CD 相交于点 O , $\angle ADC = \angle ABC$, $AD = BC$.



(1) 求证: $PA = PC$;

(2) 连接 PO 并延长交 AC 于点 E , 求证: $PE \perp AC$.

【详解】(1) $\because$ 点 D 、 B 分别在边 PA 、 PC 上, AB 与 CD 相交于点 O ,

$$\therefore \angle AOD = \angle COB,$$

$$\because \angle ADC = \angle ABC,$$

$$\therefore \angle ADO = \angle CBO,$$

在 $\triangle AOD$ 和 $\triangle COB$ 中,

$$\begin{cases} \angle ADO = \angle CBO \\ \angle AOD = \angle COB, \\ AD = CB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOD \cong \triangle COB (\text{AAS}),$$

$$\therefore \angle DAO = \angle BCO, \quad OA = OC,$$

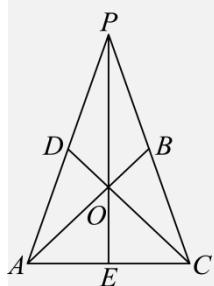
$$\therefore \angle OAC = \angle OCA,$$

$$\therefore \angle DAO + \angle OAC = \angle BCO + \angle OCA,$$

$$\therefore \angle PAC = \angle PCA,$$

$$\therefore PA = PC. \quad \cdots\cdots (4 \text{ 分})$$

(2) 连接 PO 并延长交 AC 于点 E ,



$$\because PA = PC, AD = BC,$$

$$\therefore PA - AD = PC - BC,$$

$$\therefore PD = PB,$$

由 (1) 得 $\triangle AOD \cong \triangle COB$,

$$\therefore OD = OB,$$

在 $\triangle OPD$ 和 $\triangle OPB$ 中,

$$\begin{cases} PD = PB \\ OD = OB \\ OP = OP \end{cases},$$

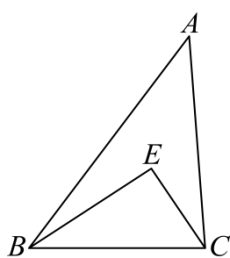
$$\therefore \triangle OPD \cong \triangle OPB (\text{SSS}),$$

$$\therefore \angle DPO = \angle BPO,$$

$\because PA = PC$, PE 平分 $\angle APC$,

$$\therefore PE \perp AC. \dots\dots (8 \text{ 分})$$

24. (9 分) 如图, 已知三角形 ABC , 连接 BE , CE



(1) 当点 E 在三角形内部时,

① 若 $\angle A = 40^\circ$, $\angle E = 90^\circ$, 如图 1, 则 $\angle ABE + \angle ACE = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$.

② 若 $\angle A = m^\circ$, $\angle E = n^\circ$, 试用 m 、 n 表示 $\angle ABE + \angle ACE$ 的度数.

(2) 当点 E 在三角形的外部时, $\angle A = m^\circ$, $\angle E = n^\circ$, $\angle ABE$ 与 $\angle ACE$ 之间是否存在确定的数量关系? 如存在, 请直接用 m 、 n 表示, 如不存在, 请写出理由.

【详解】(1) 解: ① $\because \angle A + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$, $\angle E + \angle EBC + \angle ECB = 180^\circ$,

$$\therefore \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle A, \quad \angle EBC + \angle ECB = 180^\circ - \angle E$$

$$\text{又} \because \angle ABE + \angle ACE = (\angle ABC + \angle ACB) - (\angle EBC + \angle ECB)$$

$$= 180^\circ - \angle A - (180^\circ - \angle E)$$

$$= \angle E - \angle A$$

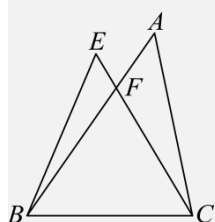
$$\because \angle A = 40^\circ, \quad \angle E = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE + \angle ACE = \angle E - \angle A = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ \cdots \cdots (2 \text{ 分})$$

$$\textcircled{2} \because \angle A = m^\circ, \quad \angle E = n^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE + \angle ACE = \angle E - \angle A = n^\circ - m^\circ \cdots \cdots (4 \text{ 分})$$

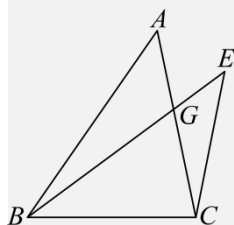
(2) 解: ①如图, 当 E 在 AB 的左侧时, 设 AB, CE 交于点 F



$$\because \angle AFE = \angle A + \angle ACE = \angle E + \angle ABE,$$

$$\therefore \angle ACE - \angle ABE = \angle E - \angle A = n^\circ - m^\circ$$

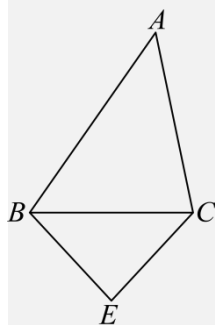
②如图, 当 E 在 AB 的右侧时, 设 AC, BE 交于点 G



$$\therefore \angle AGE = \angle A + \angle ABE = \angle E + \angle ACE$$

$$\therefore \angle ACE - \angle ABE = \angle A - \angle E = m^\circ - n^\circ$$

③如图, 当 E 在 BC 的下方时,



$$\therefore \angle A + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ, \quad \angle E + \angle EBC + \angle ECB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle A, \quad \angle EBC + \angle ECB = 180^\circ - \angle E$$

$$\text{又} \because \angle ABE + \angle ACE = (\angle ABC + \angle ACB) + (\angle EBC + \angle ECB)$$

$$= 180^\circ - \angle A + (180^\circ - \angle E)$$

$$= 360^\circ - (\angle A + \angle E)$$

$$= 360^\circ - (m^\circ + n^\circ)$$

综上所述, $\angle ACE - \angle ABE = \angle E - \angle A = n^\circ - m^\circ$ 或 $\angle ACE - \angle ABE = \angle A - \angle E = m^\circ - n^\circ$ 或

$$\angle ABE + \angle ACE = 360^\circ - (m^\circ + n^\circ) \dots\dots (9 \text{ 分})$$

25. (9 分) 在综合探究课堂上我们学习了平行线的性质, 平行线具有“等角转化”的功能, “三线八角”图是研究平行线性质的“基本图形”.

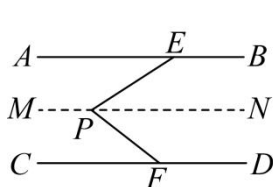


图 1

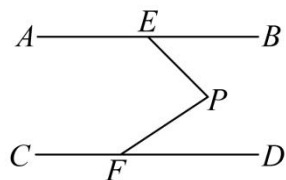


图 2

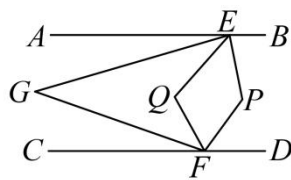


图 3

(1) 阅读理解: 如图 1, $AB \parallel CD$, 点 E 、 F 分别为直线 AB 、 CD 上的点, 点 P 为平行线间一点, 猜想 $\angle AEP$ 、 $\angle CFP$ 与 $\angle EPF$ 之间的关系, 并说明理由. 阅读并补充下面推理过程:

解: $\angle EPF = \angle AEP + \angle CFP$, 理由如下:

过点 P 作 $MN \parallel AB$,

$$\therefore \angle AEP = \angle EPN,$$

$$\because AB \parallel CD$$

$$\therefore MN \parallel CD \quad (\text{_____})$$

$$\therefore \angle CFP = \text{_____}$$

$$\therefore \angle EPF = \angle EPN + \angle FPN = \angle AEP + \angle CFP \quad (\text{等量代换})$$

$$\therefore \angle EPF = \angle AEP + \angle CFP.$$

(2) 方法运用: 如图 2, $AB \parallel CD$, 猜想 $\angle AEP$ 、 $\angle CFP$ 与 $\angle EPF$ 之间的关系, 并说明理由:

(3) 深化拓展: 如图 3, $AB \parallel CD$, $\angle AEP$ 、 $\angle CFP$ 的角平分线相交于点 Q ,

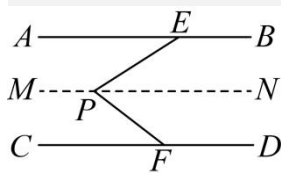
① 过点 E 、 F 作射线 EG 、 FG 交于点 G , 若 $\angle AEG = \frac{1}{3} \angle AEQ$, $\angle CFG = \frac{1}{3} \angle CFQ$, $\angle EPF = 108^\circ$, 求 $\angle G$ 的度数;

②若 $\angle AEG = \frac{1}{m} \angle AEQ$, $\angle CFG = \frac{1}{m} \angle CFQ$, $\angle EPF = n^\circ$, 请直接写出 $\angle G$ 的度数_.

(用含 m 、 n 的代数式表示)

【详解】(1) 解: $\angle EPF = \angle AEP + \angle CFP$, 理由如下:

如图,



过点 P 作 $MN \parallel AB$,

$\therefore \angle AEP = \angle EPN$ (两直线平行, 内错角相等),

$\because AB \parallel CD$,

$\therefore MN \parallel CD$ (平行于同一直线的两直线平行),

$\therefore \angle CFP = \angle FPN$,

$\therefore \angle EPF = \angle EPN + \angle FPN = \angle AEP + \angle CFP$ (等量代换)

$\therefore \angle EPF = \angle AEP + \angle CFP$. $\cdots \cdots$ (2 分)

(2) 解: 猜想 $\angle AEP + \angle CFP + \angle EPF = 360^\circ$, 理由如下:

同理可得 $\angle EPF = \angle BEP + \angle DFP$,

$\because \angle AEP + \angle BEP = 180^\circ$, $\angle CFP + \angle DFP = 180^\circ$,

$\therefore \angle AEP + \angle BEP + \angle CFP + \angle DFP = 360^\circ$,

$\therefore \angle AEP + \angle CFP + \angle EPF = 360^\circ$; $\cdots \cdots$ (4 分)

(3) 解: ①同理可得 $\angle AEP + \angle CFP + \angle EPF = 360^\circ$,

$\because \angle EPF = 108^\circ$,

$\therefore \angle AEP + \angle CFP = 252^\circ$,

$\because \angle AEP$ 与 $\angle CFP$ 的角平分线相交于点 Q ,

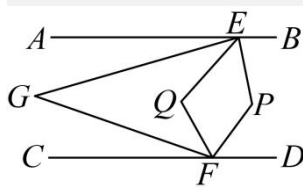
$\therefore \angle AEQ = \frac{1}{2} \angle AEP$, $\angle CFQ = \frac{1}{2} \angle CFP$,

$\because \angle AEG = \frac{1}{3} \angle AEQ$, $\angle CFG = \frac{1}{3} \angle CFQ$,

$\therefore \angle AEG = \frac{1}{6} \angle AEP$, $\angle CFG = \frac{1}{6} \angle CFP$,

$\therefore \angle G = \angle AEG + \angle CFG = \frac{1}{6} \angle AEP + \frac{1}{6} \angle CFP = \frac{1}{6} (\angle AEP + \angle CFP) = 42^\circ$; $\cdots \cdots$ (6 分)

②如图



$$\therefore \angle EPF = n^\circ, \quad \angle AEP + \angle CFP + \angle EPF = 360^\circ,$$

$$\therefore \angle AEP + \angle CFP = 360^\circ - n^\circ,$$

$\therefore \angle AEP$ 与 $\angle CFP$ 的角平分线相交于点 Q ,

$$\therefore \angle AEQ = \frac{1}{2} \angle AEP, \quad \angle CFQ = \frac{1}{2} \angle CFP,$$

$$\therefore \angle AEG = \frac{1}{m} \angle AEQ, \quad \angle CFG = \frac{1}{m} \angle CFQ,$$

$$\therefore \angle AEG = \frac{1}{2m} \angle AEP, \quad \angle CFG = \frac{1}{2m} \angle CFP,$$

$$\therefore \angle G = \angle AEG + \angle CFG = \frac{1}{2m} \angle AEP + \frac{1}{2m} \angle CFP = \frac{360^\circ - n^\circ}{2m}. \quad \dots\dots (9 \text{ 分})$$

26. (10 分) (1) 观察理解: 如图 1, ABC 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, 直线 l 过点 C , 点 A, B 在直线 l 同侧, $BD \perp l$, $AE \perp l$, 垂足分别为 D, E , 由此可得: $\angle AEC = \angle CDB = 90^\circ$, 所以 $\angle CAE + \angle ACE = 90^\circ$, 又因为 $\angle ACB = 90^\circ$, 所以 $\angle BCD + \angle ACE = 90^\circ$, 所以 $\angle CAE = \angle BCD$, 又因为 $AC = BC$, 所以 $\triangle AEC \cong \triangle CDB$ _____; (请填写全等判定的方法)

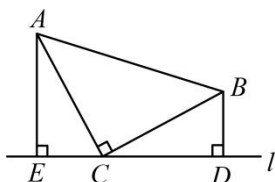


图1

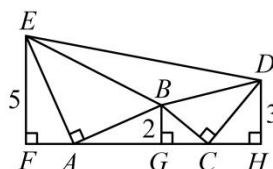


图2

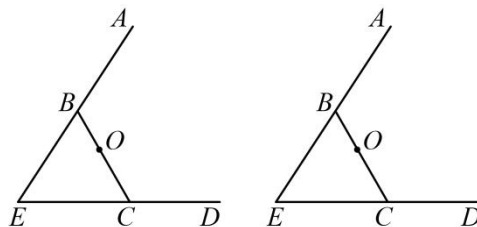


图3

(2) 理解应用: 如图 2, $AE \perp AB$, 且 $AE = AB$, $BC \perp CD$, 且 $BC = CD$, 利用 (1) 中的结论, 请按照图中标的数据计算图中 ABC 的面积是_____;

(3) 拓展提升: 如图 3, 等边 $\triangle EBC$ 中, $EC = 8\text{cm}$, 点 O 在 BC 上, 且 $OC = 5\text{cm}$, 动点 P 在射线 EC 上, 连接 OP , 将线段 OP 绕点 O 逆时针旋转 120° 得到线段 OF .

①当 $OF \parallel ED$ 时, OP 的长是_____.

②当点 F 恰好落在射线 EB 上时, 请直接写出 EP 的长.

【详解】 (1) 解: 如图 1, ABC 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, 直线 l 过点 C , 点 A, B 在直线 l 同侧, $BD \perp l$, $AE \perp l$, 垂足分别为 D, E , 由此可得: $\angle AEC = \angle CDB = 90^\circ$, 所以 $\angle CAE + \angle ACE = 90^\circ$, 又因为 $\angle ACB = 90^\circ$, 所以 $\angle BCD + \angle ACE = 90^\circ$, 所以 $\angle CAE = \angle BCD$, 又因为 $AC = BC$, 所以 $\triangle AEC \cong \triangle CDB$ (AAS),

故答案为：AAS；……（2分）

（2）解：由（1）同理可证， $\triangle AEF \cong \triangle BAG$ （AAS）， $\triangle CBG \cong \triangle DCH$ （AAS），

$$\therefore EF = AG, \quad GC = DH,$$

$$\therefore EF = 5, DH = 3,$$

$$\therefore AG = 5, GC = 3,$$

$$\therefore AC = AG + GC = 8,$$

$$\therefore BG = 2,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积是 } \frac{1}{2} AC \cdot BG = \frac{1}{2} \times 8 \times 2 = 8,$$

故答案为：8. ……（4分）

（3）①如图，当 $OF \parallel ED$ 时，

则 $\angle FOC = \angle PCO$ ，

$\therefore$ 等边 $\triangle EBC$ 中， $EC = 8\text{cm}$ ，且 $OC = 5\text{cm}$ ，

$$\therefore \angle BEC = \angle ECB = \angle CBE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle FOC = \angle PCO = 60^\circ,$$

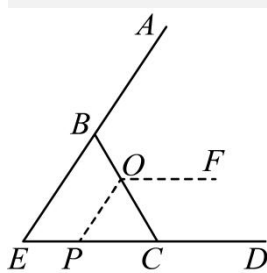
$$\therefore \angle FOP = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle POC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle OPC = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle POC$ 是等边三角形，

$$\therefore OP = OC = 5\text{cm},$$



故答案为：5cm. ……（6分）

②如图所示，当点 F 恰好落在射线 EB 上时，

$\therefore$ 等边 $\triangle EBC$ 中， $EC = 8\text{cm}$ ，且 $OC = 5\text{cm}$ ，

$$\therefore \angle BEC = \angle ECB = \angle CBE = 60^\circ, \quad BC = EC = 8\text{cm}, \quad BO = BC - OC = 3\text{cm},$$

$$\therefore \angle FBO = \angle OCP = 120^\circ,$$

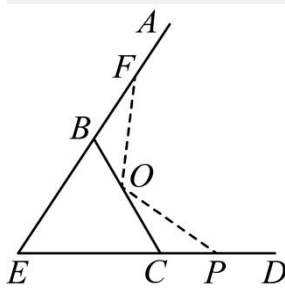
$$\therefore \angle FOP = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle FOB + \angle POC = 60^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle ECB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle OPC + \angle POC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle FOB = \angle OPC,$$



$$\text{又} \because FO = OP,$$

$$\therefore \triangle FOB \cong \triangle OPC (\text{AAS}),$$

$$\therefore PC = OB = 3\text{cm},$$

$$\therefore EP = EC + PC = 11\text{cm}. \quad \cdots \cdots (10 \text{ 分})$$