

2025-2026 学年七年级下学期期末模拟卷

数学·全解全析

(考试时间: 90 分钟 试卷满分: 100 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。
4. 测试范围: **新教材沪教版七年级数学下册全部**。

第一部分 (选择题 共 18 分)

一、选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分。在每个小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求的)

1. 已知 $a < b$, 下列不等式中正确的是 ()

- A. $a+1 > b+1$ B. $a-1 > b-1$
C. $2a > 2b$ D. $-2a > -2b$

【答案】D

【详解】解: A. 两边同时加 1, 不等式方向不变, 原式 $a < b$ 变为 $a+1 < b+1$, 故 A 错误, 不符合题意.
B. 两边同时减 1, 不等式方向不变, 原式 $a < b$ 变为 $a-1 < b-1$, 故 B 错误, 不符合题意.
C. 两边同时乘正数 2, 不等式方向不变, 原式 $a < b$ 变为 $2a < 2b$, 故 C 错误, 不符合题意.
D. 两边同时乘负数 -2, 不等式方向反转, 原式 $a < b$ 变为 $-2a > -2b$, 故 D 正确, 符合题意.
故选: D.

2. 已知等腰三角形的周长为 16, 其底边长为 a , 那么 a 的取值范围是 ()

- A. $a > 0$ B. $0 < a < 8$ C. $0 < a < 16$ D. $a < 16$

【答案】B

【详解】解: $\because$ 底边长为 a ,
 $\therefore$ 两腰之和为 $16-a$,
 $\therefore 16-a > a$, 解得: $a < 8$,
 $\because$ 等腰三角形两腰长相等,

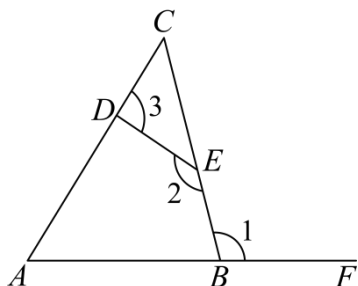
$\therefore$ 两腰之差为 0,

$\therefore a > 0$,

$\therefore$ 那么 a 的取值范围是 $0 < a < 8$.

故选: B.

3. 如图, 与 $\angle A$ 位置关系为同旁内角的角是 ()



A. $\angle 1$

B. $\angle 2$

C. $\angle 3$

D. $\angle C$

【答案】D

【详解】解: A、 $\angle 1$ 与 $\angle A$ 是同位角, 故不符合题意;

B、 $\angle 2$ 与 $\angle A$ 既不是同位角, 也不是内错角, 也不是同旁内角, 故不符合题意;

C、 $\angle 3$ 与 $\angle A$ 是同位角, 故不符合题意;

D、 $\angle C$ 与 $\angle A$ 同旁内角, 故符合题意;

故选: D.

4. 下列命题中, 判断错误的是 ()

A. 所有定理都有逆命题

B. 对顶角相等的逆命题是真命题

C. 假命题的逆命题不一定是假命题

D. 两条平行线被第三条直线所截, 内错角的平分线互相平行

【答案】B

【详解】解: 选项 A: 任何命题都有逆命题, 定理属于命题, 因此定理都有逆命题, 该判断正确;

选项 B: “对顶角相等”的逆命题是“相等的角是对顶角”, 相等的角不一定是对顶角(如两直线平行时的同位角), 因此逆命题是假命题, 该判断错误;

选项 C: 假命题的逆命题可能为真, 也可能为假, 例如假命题“若 $a > b$, 则 $a^2 > b^2$ ”的逆命题“若 $a^2 > b^2$, 则 $a > b$ ”也是假命题; 而假命题“相等的角是对顶角”的逆命题“对顶角相等”是真命题, 因此该判断正确.

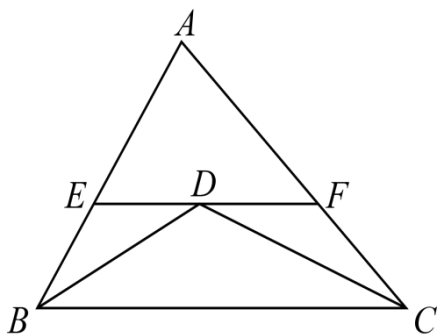
选项 D: 两条平行线被第三条直线所截, 内错角相等, 其角平分线分得的角也相等, 可推出两条角平分线的内错角相等, 故角平分线互相平行, 该判断正确.

因此，判断错误的是选项 B.

故选：B.

5. 如图， $\angle B$ ， $\angle C$ 的平分线相交于 D ，过点 D 作 $EF \parallel BC$ ，交 AB 于 E ，交 AC 于 F ，那么下列结论中：

① $BE = DE$ ；② $DF = ED$ ；③ $\angle BDC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$ ；④ $\triangle AEF$ 的周长 $= AB + AC$ ，其中正确的有几个（ ）



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】C

【详解】解： $\because EF \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle EDB = \angle DBC, \quad \angle FDC = \angle DCB,$$

$\because \triangle ABC$ 中， $\angle B$ 与 $\angle C$ 的平分线交于点 D ，

$$\therefore \angle EBD = \angle DBC, \quad \angle FCD = \angle DCB,$$

$$\therefore \angle EBD = \angle EDB, \quad \angle FCD = \angle FDC,$$

$$\therefore BE = ED, \quad CF = DF,$$

即 $\triangle BED$ 和 $\triangle CFD$ 都是等腰三角形；

故①正确；

$$\because \angle ABC \text{ 不一定等于 } \angle ACB,$$

$$\therefore \angle FBC \text{ 不一定等于 } \angle FCB,$$

$$\therefore BF \text{ 与 } CF \text{ 不一定相等},$$

$$\therefore BD \text{ 与 } CE \text{ 不一定相等，故②错误.}$$

在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B$ 和 $\angle C$ 的平分线相交于点 D ，

$$\therefore \angle A + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle DBC + \angle DCB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A,$$

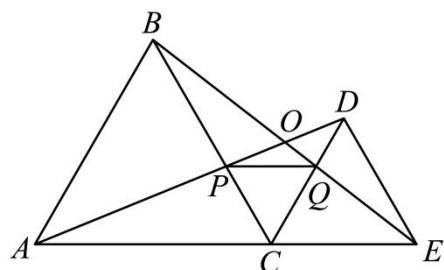
$$\therefore \angle BOC = 180^\circ - (\angle DBC + \angle DCB) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A; \text{ 故③正确;}$$

$$\therefore \triangle AEF \text{ 的周长为: } AD + DE + AE = AB + BD + CE + AE = AB + AC;$$

故④正确；

故选：C.

6. 如图，C为线段AE上一动点（不与点A，E重合），在AE同侧分别作等边 $\triangle ABC$ 和等边 $\triangle ECD$ ，AD与BE交于点O，AD与BC交于点P，BE与CD交于点Q，连接PQ. 以下结论不正确的是（ ）



A. $AD = BE$

B. $DE = DP$

C. $AP = BQ$

D. $\angle AOB = 60^\circ$

【答案】B

【详解】解：由于 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ECD$ 是等边三角形，

可知 $AC = BC$ ， $CD = CE$ ， $\angle ACB = \angle DCE = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle BCD = 60^\circ$ ， $\angle ACD = \angle BCE = 120^\circ$ ，

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE (SAS)$ ，

$\therefore AD = BE$ ， $\angle ADC = \angle BEC$ ，

可判断A正确；

$\therefore \angle DCP = \angle ECQ = 60^\circ$ ， $CD = CE$ ，

$\therefore \triangle CDP \cong \triangle CEQ (ASA)$ ，

$\therefore DP = EQ$ ，

$\therefore DE \neq EQ$ ，

$\therefore DE \neq DP$ ，可判断B错误；

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE$ ，

$\therefore \angle DAC = \angle EBC$ ，

又 $\therefore \angle ACP = \angle BCQ = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle CQB \cong \triangle CPA (ASA)$ ，

$\therefore BQ = AP$ ，故结论C正确；

$\therefore \angle AOB = \angle OAE + \angle AEO = \angle CBE + \angle AEO = \angle ACB = 60^\circ$ ，可判断D正确.

故选：B.

第二部分（非选择题 共 82 分）

二、填空题（本大题共 12 小题，每小题 2 分，满分 24 分）

7. “等边三角形的三个内角都等于 60° ”的逆命题是_____.

【答案】三个内角都相等的三角形是等边三角形

【详解】解：原命题的条件是“三角形是等边三角形”，结论是“三个内角都等于 60° ”，交换条件和结论后，逆命题为“三个内角都等于 60° 的三角形是等边三角形”.

故答案为：三个内角都等于 60° 的三角形是等边三角形.

8. 如果 $(2-a)x \leq a-2$ 的解集为 $x \geq -1$ ，则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a > 2$

【详解】解： $\because (2-a)x \leq a-2$ 的解集为 $x \geq -1$,

$$\therefore 2-a < 0,$$

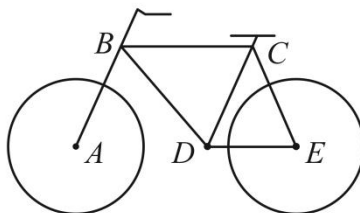
$$\therefore a > 2,$$

故答案为： $a > 2$.

9. 如图①，“二八大杠”传统老式自行车承载了一代人的回忆，图②是它的几何示意图. 已知 $BC \parallel DE$ ， $AB \parallel CD$ ，当 $\angle ABD = 72^\circ$ ， $\angle CBD = 42^\circ$ 时， $\angle CDE$ 的度数为_____°.



图①



图②

【答案】66

【详解】解： $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle BDC = \angle ABD = 72^\circ,$$

$$\because BC \parallel DE,$$

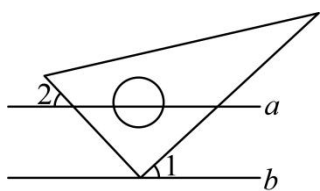
$$\therefore \angle DBC + \angle BDE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BDE = 180^\circ - \angle DBC = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle BDE - \angle BDC = 138^\circ - 72^\circ = 66^\circ,$$

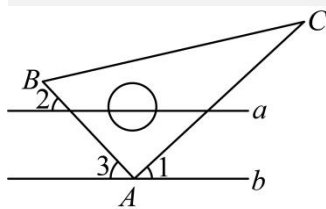
故答案为：66.

10. 如图，直线 $a \parallel b$ ，将三角板的直角顶点放在直线 b 上，如果 $\angle 1 = 43^\circ$ ，那么 $\angle 2$ 的度数是_____.



【答案】 47°

【详解】 解：如图，



$\because a \parallel b$,

$\therefore \angle 2 = \angle 3$,

$\because \angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$,

$\because \angle 1 = 43^\circ$,

$\therefore \angle 2 = \angle 3 = 47^\circ$,

故答案为： 47° .

11. 如果不等式组 $\begin{cases} x > -3 \\ x \leq a \end{cases}$ 的整数解有四个，那么 a 的取值范围是_____.

【答案】 $1 \leq a < 2$

【详解】 解： $\because$ 不等式组 $\begin{cases} x > -3 \\ x \leq a \end{cases}$ 的整数解有四个，

$\therefore 1 \leq a < 2$,

故答案为： $1 \leq a < 2$.

12. 如果一个等腰三角形的周长等于 20，且一边的长等于 4，那么这个等腰三角形的腰长等于_____.

【答案】 8

【详解】 解： 分两种情况：

当底长为 4 时，腰长是： $(20 - 4) \div 2 = 8$ ；

当腰长为 4 时，此时底长为： $20 - 4 \times 2 = 12$ ，

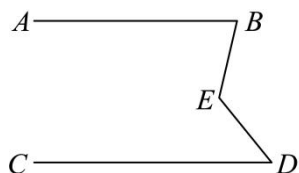
$\therefore 4 + 4 < 12$ ，

不能构成三角形，此种情况不成立，舍去.

故这个等腰三角形的腰长等于 8.

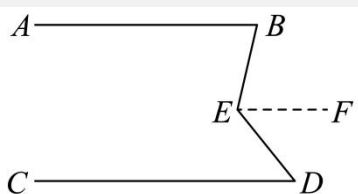
故答案为：8.

13. 如图，已知 $AB \parallel CD$ ，且 $\angle BED = 130^\circ$ ，则 $\angle B + \angle D =$ _____ 度.



【答案】 130

【详解】 如图：



过点 E 作 $EF \parallel AB$ ，

$\therefore \angle B = \angle BEF$ ，

$\because AB \parallel CD$ ，

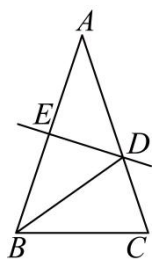
$\therefore EF \parallel CD$ ，

$\therefore \angle D = \angle DEF$ ，

$\therefore \angle B + \angle D = \angle BEF + \angle DEF = \angle BED = 130^\circ$ 。

故答案为：130.

14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $BC = a$ ， $\angle A = 36^\circ$ ， AB 的垂直平分线交 AC 边于点 D ，交 AB 边于点 E ， $CD = b$ ，则 $\triangle ABC$ 的周长为 _____ (用 a 、 b 表示).



【答案】 $3a + 2b$

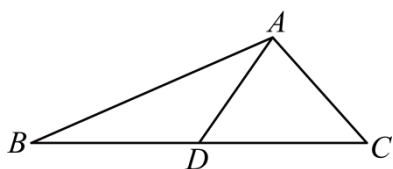
【详解】 解： $\because AB$ 的垂直平分线交 AC 边于点 D ，交 AB 边于点 E

$\therefore AD = BD$ ，

$\therefore \angle ABD = \angle A = 36^\circ$,
 $\therefore \angle BDC = \angle A + \angle ABD = 72^\circ$,
 $\because AB = AC$, $\angle A = 36^\circ$,
 $\therefore \angle ABC = \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 72^\circ$,
 $\therefore \angle BDC = \angle C = 72^\circ$,
 $\therefore BD = BC = AD = a$,
 $\therefore AB = AC = AD + CD = a + b$,
 $\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $3a + 2b$

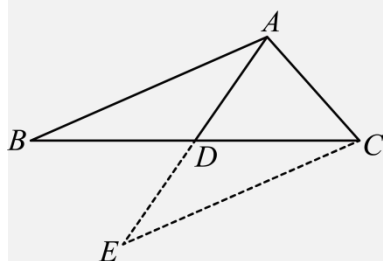
故答案为: $3a + 2b$

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是 BC 边上的中线, $AC = 3$, $AD = 5$, 则 AB 的取值范围是 _____ .



【答案】 $7 < AB < 13$

【详解】 解: 如图, 延长 AD 至 E , 使 $DE = AD = 5$, 连接 CE ,



$\because AD$ 为 BC 边上的中线,

$\therefore BD = CD$,

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ECD$ 中,

$$\begin{cases} AD = DE \\ \angle ADB = \angle EDC , \\ BD = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ECD$ (SAS) ,

$\therefore AB = EC$,

$\because AC = 3$, $AE = AD + DE = 10$,

$$\therefore AE - AC < EC < AC + AE,$$

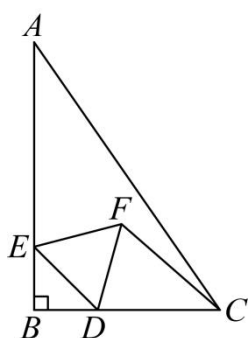
$$\therefore 7 < EC < 13$$

$$\therefore 7 < AB < 13,$$

$$\therefore AB \text{ 的取值范围是: } 7 < AB < 13.$$

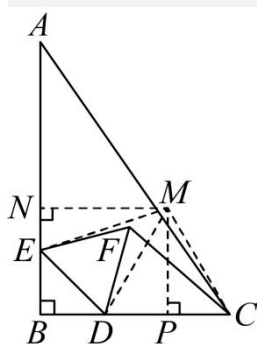
故答案为: $7 < AB < 13$.

16. 如图, 已知在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $AB = 8$, $BC = 6$, 点 D 是 BC 边上的一点, $BD = 2$, 点 E 是 AB 边上一个动点, 连接 DE , 以 DE 为一边在右侧作等边 $\triangle EFD$, 连接 CF , 在点 E 运动过程中, 线段 CF 的最小值为__.



【答案】4

【详解】解: 如图所示, 以 CD 为边在 BC 上方作等边三角形 CDM , 连接 ME , 过点 M 作 $MP \perp BC$ 于点 P , $MN \perp AB$ 于点 N , 如图所示:



$\therefore \triangle DEF$ 和 CDM 为等边三角形,

$$\therefore DE = DF, DC = DM, \angle EDF = \angle CDM = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EDF + \angle FDM = \angle FDM + \angle MDC,$$

即 $\angle EDM = \angle FDC$,

$$\therefore \triangle MED \cong \triangle CFD (\text{SAS}),$$

$$\therefore CF = ME,$$

$\therefore$ 当 ME 最小时, CF 最小,
 $\therefore$ 垂线段最短,
 $\therefore$ 当点 E 与点 N 重合时, ME 最小, 即 CF 最小, 最小值为 MN 的长,
 $\therefore BC = 6, BD = 2,$
 $\therefore CD = 4,$
 $\therefore MP \perp CD,$
 $\therefore CP = DP = \frac{1}{2}CD = 2,$
 $\therefore BP = BC - PC = 6 - 2 = 4,$
 $\therefore MP \perp BC, \angle B = 90^\circ, \text{ 即 } AB \perp BC,$
 $\therefore MP \parallel AB,$
 又 $\therefore MN \perp AB,$
 $\therefore MN = BP = 4$ (平行线间间距相等),
 $\therefore CF$ 的最小值为 4,
 故答案为: 4.

17. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 30^\circ, \angle A = 100^\circ$, 点 P 是 $\triangle ABC$ 三边上的动点. 当 $\triangle PAC$ 为等腰三角形时, 其顶角的度数是_____.

【答案】 100° 或 50° 或 80°

【详解】 解: ①如图 1, 点 P 在 AB 上时,

$$AP = AC,$$

顶角为 $\angle A = 100^\circ$;

②点 P 在 BC 上时,

$$\therefore \angle B = 30^\circ, \angle A = 100^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 50^\circ,$$

如图 2, 若 $\angle C$ 为顶角,

则顶角 $\angle C = 50^\circ$;

如图 3, 若 $\angle C$ 为底角,

$$\text{取 } AC = AP,$$

则顶角为 $\angle CAP = 180^\circ - 2\angle C = 80^\circ$,

综上所述, 顶角为 100° 或 50° 或 80° .

故答案为: 100° 或 50° 或 80° .

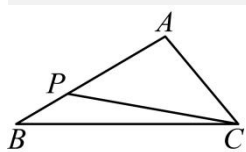


图1

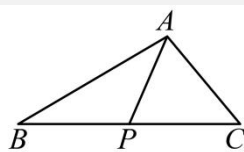


图2

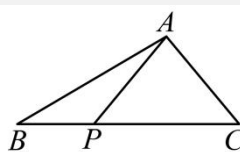


图3

18. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$, 直线 l 经过点 A , 分别过点 B 、 C 作直线 l 的垂线, 垂足分别为 D 、 E . 如果 $BD = 5$, $CE = 3$, 那么 $DE =$ _____.

【答案】8 或 2

【详解】解: 如图 1, 点 B 、点 C 在直线 l 同侧,

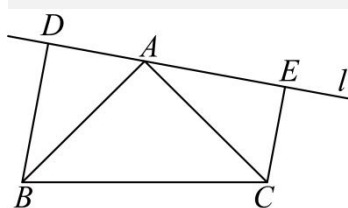


图1

$\because BD \perp l$ 于点 D , $CE \perp l$ 于点 E ,

$\therefore \angle BDA = \angle AEC = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABD + \angle BAD = 90^\circ$,

$\because \angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore \angle CAE + \angle BAD = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABD = \angle CAE$,

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CAE$ 中,

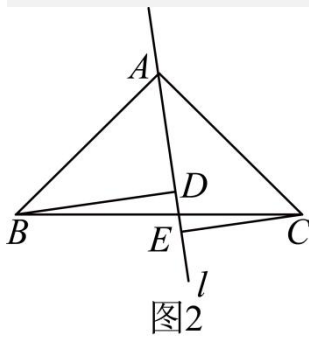
$$\begin{cases} \angle ABD = \angle CAE \\ \angle BDA = \angle AEC, \\ AB = CA \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CAE$ (AAS),

$\therefore BD = AE = 5$, $AD = CE = 3$,

$\therefore DE = AE + AD = 5 + 3 = 8$;

如图 2, 点 B 、点 C 在直线 l 异侧,



$\because BD \perp l$ 于点 D , $CE \perp l$ 于点 E ,

$\therefore \angle BDA = \angle AEC = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABD + \angle BAD = 90^\circ$,

$\because \angle CAE + \angle BAD = \angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABD = \angle CAE$,

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CAE$ 中,

$$\begin{cases} \angle ABD = \angle CAE \\ \angle BDA = \angle AEC, \\ AB = CA \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CAE$ (AAS),

$\therefore BD = AE = 5$, $AD = CE = 3$,

$\therefore DE = AE - AD = 5 - 3 = 2$.

综上所述, DE 的长为 8 或 2.

故答案为: 8 或 2.

三.解答题 (本大题共 8 小题, 58 分。解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

19. (6 分) 解下列不等式 (组):

(1) $9x - 1 < 4x + 9$ (解集在数轴上表示出来).

$$(2) \begin{cases} \frac{3x}{2} + 1 > \frac{x-1}{4} \\ x-1 \leq 5+3x \end{cases}$$

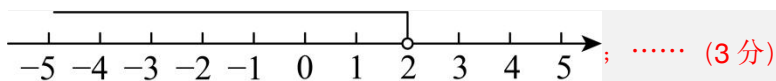
【详解】(1) $9x - 1 < 4x + 9$,

移项得, $9x - 4x < 9 + 1$,

合并同类项得, $5x < 10$,

系数化为 1 得, $x < 2$,

把解集表示在数轴上, 如图所示:



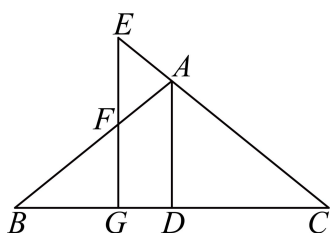
$$(2) \begin{cases} \frac{3x}{2} + 1 > \frac{x-1}{4} \text{ ①} \\ x-1 \leq 5+3x \text{ ②} \end{cases},$$

解不等式①得, $x > -1$,

解不等式②得, $x \geq -3$,

$\therefore$ 不等式组的解集为 $x > -1$. (6分)

21. (4分) 已知: 如图, $\triangle ABC$ 中, $AD \perp BC$ 于点 D , $EG \perp BC$ 于点 G , 线段 $AE = AF$, 点 E, A, C 在同一直线上, 求证: AD 平分 $\angle BAC$. 请把以下证明过程补充完整.



证明: $\because AD \perp BC$ 于点 D , $EG \perp BC$ 于点 G ,

$$\therefore \angle EGC = \angle ADC = 90^\circ$$

$$\therefore EG \parallel AD \text{ ()}$$

$$\therefore \angle E = \text{ } \text{ ()},$$

$$\angle EFA = \text{ } \text{ ()}$$

$$\because AE = AF,$$

$$\therefore \angle E = \text{ } \text{ ()}$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD, \text{ 即 } AD \text{ 平分 } \angle BAC.$$

【详解】 证明: $\because AD \perp BC$ 于点 D , $EG \perp BC$ 于点 G ,

$$\therefore \angle EGC = \angle ADC = 90^\circ$$

$$\therefore EG \parallel AD \text{ (同位角相等, 两直线平行) } \cdots \cdots (1 \text{ 分})$$

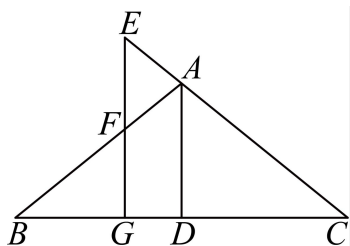
$$\therefore \angle E = \angle DAC \text{ (两直线平行, 同位角相等), } \cdots \cdots (2 \text{ 分})$$

$$\angle EFA = \angle FAD \text{ (两直线平行, 内错角相等) } \cdots \cdots (3 \text{ 分})$$

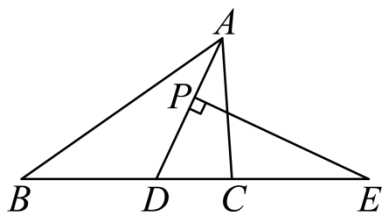
$$\because AE = AF,$$

$$\therefore \angle E = \angle EFA \text{ (等边对等角) } \cdots \cdots (4 \text{ 分})$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD, \text{ 即 } AD \text{ 平分 } \angle BAC.$$



20. (6分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 平分 $\angle BAC$, P 为线段 AD 上的一个动点, $PE \perp AD$ 交 BC 的延长线于点 E .



(1) 若 $\angle ACB = 75^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, 求 $\angle E$ 的度数;

(2) 当 P 点在线段 AD 上运动时, 猜想 $\angle B$ 、 $\angle ACB$ 与 $\angle E$ 的数量关系, 并证明.

【详解】(1) 解: $\because \angle ACB = 75^\circ$, $\angle B = 45^\circ$,

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - \angle ACB - \angle B = 60^\circ,$$

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle B + \angle BAD = 75^\circ,$$

$\because PE \perp AD$,

$$\therefore \angle DPE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle E = 90^\circ - \angle ADE = 15^\circ; \dots\dots (3 \text{ 分})$$

(2) 解: $\angle E = \frac{1}{2}(\angle ACB - \angle B)$; 证明如下:

根据题意得: $\angle BAC = 180^\circ - \angle ACB - \angle B$,

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$$\therefore \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ACB - \angle B) = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle ACB - \frac{1}{2} \angle B,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle B + \angle BAD = \angle B + 90^\circ - \frac{1}{2} \angle ACB - \frac{1}{2} \angle B = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle ACB + \frac{1}{2} \angle B,$$

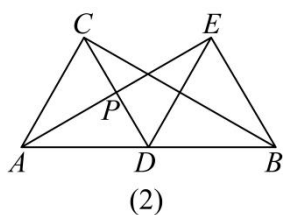
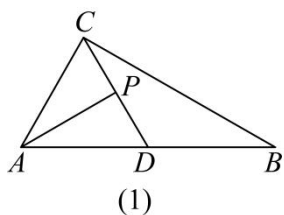
$\because PE \perp AD$,

$$\therefore \angle DPE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle E = 90^\circ - \angle ADE = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2} \angle ACB + \frac{1}{2} \angle B\right) = \frac{1}{2}(\angle ACB - \angle B),$$

即 $\angle E = \frac{1}{2}(\angle ACB - \angle B)$ (6 分)

22. (7 分) 已知: 在 $\triangle ACD$ 中, P 是 CD 的中点, B 是边 AD 延长线上的一点, $BD = AC$, 连接 BC 、 AP .



(1)如图 (1), 如果 $AP \perp CD$, 证明: $BD = AD$.

(2)如图 (2), 过点 D 作 $DE \parallel AC$, 交 AP 的延长线于点 E , 连接 BE , 如果 $\angle CAD = 60^\circ$, 证明: $BC = 2AP$.

【详解】(1) 证明: $\because AP \perp CD$, P 是 CD 的中点,

$\therefore AP$ 是 CD 的垂直平分线,

$\therefore AC = AD$,

$\because BD = AC$,

$\therefore BD = AD$; (3 分)

(2) 证明: $\because DE \parallel AC$,

$\therefore \angle CAP = \angle DEP$,

$\because CP = DP$, $\angle CPA = \angle DPE$,

$\therefore \triangle CPA \cong \triangle DPE$ (AAS),

$\therefore AP = EP = \frac{1}{2}AE$, $AC = DE$,

$\because BD = AC$,

$\therefore BD = DE$,

$\because DE \parallel AC$,

$\therefore \angle BDE = \angle CAD = 60^\circ$,

$\therefore \triangle BDE$ 是等边三角形,

$\therefore BD = BE$, $\angle EBD = 60^\circ$,

$\because BD = AC$,

$\therefore AC = BE$,

$\because \angle CAB = \angle EBA = 60^\circ$, $AB = BA$,

$\therefore \triangle CAB \cong \triangle EBA$ (SAS),

$\therefore BC = AE,$
 $\therefore BC = 2AP. \cdots\cdots (7 \text{ 分})$

23. (8 分) 根据素材. 完成任务.

学校组织同学参与甲、乙两款模型的制作。每款模型都需要用到长、短两种管子的材料。		
同学们进行市场调研后获得以下信息，根据信息设计材料的采购方案：		
素材一	5月20日，同学们前往市场进行调研，从出售管子的商店广告牌获得右边表格内的信息。如果当天直接采购，同学们计算发现：花费320元向该商店购得的长管子数量比花200元购得的短管子数量少80根。	1. 长管子的单价是短管子的2倍。 2. 从6月1日起，购买3根长管子赠送1根短管子。商店库存数量有限，长管子仅剩267根，短管子仅剩2130根。
素材二	另一部分同学对模型结构进行研究后发现：如果用6根长管子、48根短管子制作了1个甲雪花模型和1个乙雪花模型，制作一个甲模型所需长短管子数量之比是1:7，制作乙模型需要的长短管子数量之比是1:9	
素材三	进入6月后，学校发放活动经费1280元，同学们向该商店采购长、短管子各若干根全部用来制作甲、乙雪花模型（材料无剩余），且采购经费恰好用完。	
问题解决		
任务一	确定采购单价： 求长管子、短管子每根单价分别多少元？	
任务二	分析雪花模型结构： 求制作一个甲款、一个乙款雪花模型分别需要长、短管子各多少根？	
任务三	拟定采购方案： 采购长短管子分别多少根？	

【详解】解: 任务一: 设短管子每根单价为 a 元, 则长管子每根单价为 $2a$ 元,
由题意得, $\frac{200}{a} - \frac{320}{2a} = 80,$
解得 $a = 0.5,$

经检验, $a=0.5$ 是原方程的解, 符合题意,

$$\therefore 2a=1,$$

答: 短管子每根单价为 0.5 元, 长管子每根单价为 1 元; …… (2 分)

任务二: 设制作一个甲款雪花模型需要长管子 x 根, 则短管子 $7x$ 根, 制作一个乙款雪花模型需要长管子 y 根, 则短管子 $9y$ 根,

根据题意得,
$$\begin{cases} x+y=6 \\ 7x+9y=48 \end{cases},$$

解得
$$\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases},$$

$$\therefore 7x=21, \quad 9y=27,$$

答: 制作一个甲款雪花模型需要长管子 3 根, 短管子 21 根, 制作一个乙款雪花模型需要长管子 3 根, 短管子 27 根; …… (4 分)

任务三: 设学校中采购了 m 根长管子, n 根短管子,

根据题意得,
$$m+0.5\left(n-\frac{m}{3}\right)=1280,$$

解得
$$n=2560-\frac{5}{3}m,$$

$\therefore$ 商店中长管子仅剩 267 根, 短管子仅剩 2130 根,

$$\therefore \begin{cases} m \leq 267 \\ 2560-\frac{5}{3}m \leq 2130 \end{cases},$$

解得
$$258 \leq m \leq 267,$$

$\therefore m$ 必须能被 3 整除,

$$\therefore m=258, \quad 261, \quad 264, \quad 267,$$

当 $m=258$ 时,
$$n=2560-\frac{5}{3} \times 258=2130,$$

设制作甲雪花模型 p 个, 乙雪花模型 q 个,

则
$$\begin{cases} 3p+3q=258 \\ 21p+27q=2130 \end{cases},$$

解得
$$\begin{cases} p=32 \\ q=54 \end{cases},$$
 符合题意,

此时购买 $2130-\frac{258}{3}=2044$ 根短管子, 送 $\frac{258}{3}=86$ 根短管子可以用完,

∴可以购买 258 根长管子，购买 2044 根短管子，送 86 根短管子；

$$\text{当 } m = 261 \text{ 时, } n = 2560 - \frac{5}{3} \times 261 = 2125,$$

设制作甲雪花模型 p 个，乙雪花模型 q 个，

$$\text{则 } \begin{cases} 3p + 3q = 261 \\ 21p + 27q = 2125 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} p = \frac{112}{3} \\ q = \frac{149}{3} \end{cases}, \text{ 不合题意, 此时材料有剩余;}$$

$$\text{当 } m = 264 \text{ 时, } n = 2560 - \frac{5}{3} \times 264 = 2120,$$

设制作甲雪花模型 p 个，乙雪花模型 q 个，

$$\text{则 } \begin{cases} 3p + 3q = 264 \\ 21p + 27q = 2120 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} p = \frac{128}{3} \\ q = \frac{136}{3} \end{cases}, \text{ 不合题意, 此时材料有剩余;}$$

$$\text{当 } m = 267 \text{ 时, } n = 2560 - \frac{5}{3} \times 267 = 2115,$$

设制作甲雪花模型 p 个，乙雪花模型 q 个，

$$\text{则 } \begin{cases} 3p + 3q = 267 \\ 21p + 27q = 2115 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} p = 7 \\ q = 82 \end{cases}, \text{ 符合题意,}$$

此时购买 $2115 - \frac{267}{3} = 2026$ 根短管子，送 $\frac{267}{3} = 89$ 根短管子可以用完，

∴可以购买 267 根长管子，购买 2026 根短管子，送 89 根短管子；

综上，采购方案有两种：

①购买 258 根长管子，购买 2044 根短管子，送 86 根短管子；

②购买 267 根长管子，购买 2026 根短管子，送 89 根短管子。…… (8 分)

24. (9 分) 在学习了平行线的性质后，老师请同学们证明命题：两条平行线被第三条直线所截，一组同旁内角的平分线互相垂直。

小颖根据命题画出图形并写出如下的已知条件。

已知：如图 1， $AB \parallel CD$ ，直线 EF 分别交 AB ， CD 于点 E ， F 。 $\angle BEF$ 的角平分线 EG 与 $\angle DFE$ 的角平分线 FG 交于点 G 。

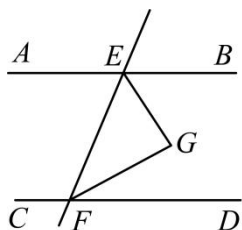


图1

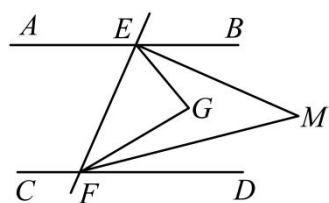


图2

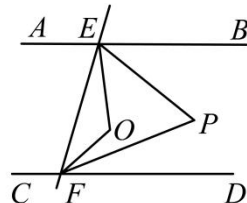


图3

(1) 直线 EG ， FG 有何位置关系？直接写出结论。

(2) 在图 1 的基础上，分别作 $\angle BEG$ 的角平分线 EM 与 $\angle DFG$ 的角平分线 FM 交于点 M ，得到图 2，求 $\angle EMF$ 的度数。

(3) 如图 3， $AB \parallel CD$ ，直线 EF 分别交 AB ， CD 于点 E ， F ，点 O 在直线 AB ， CD 之间，且在直线 EF 右侧， $\angle BEO$ 的角平分线 EP 与 $\angle DFO$ 的角平分线 FP 交于点 P ，请直接写出 $\angle EOF$ 与 $\angle EPF$ 满足的数量关系。

【详解】(1) 解：(1) 如图 1，直线 $EG \perp FG$ ，理由如下：

$\because AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle BEF + \angle EFD = 180^\circ$ ，

$\because EG$ 平分 $\angle BEF$ ， FG 平分 $\angle DFE$ ，

$\therefore \angle GEF = \frac{1}{2} \angle BEF$ ， $\angle GFE = \frac{1}{2} \angle EFD$ ，

$\therefore \angle GEF + \angle GFE = \frac{1}{2} (\angle BEF + \angle EFD) = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle G = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ ，

$\therefore EG \perp FG$ ，

故答案为： $EG \perp FG$ ；…… (3 分)

(2) 解：如图 2，过 M 作 $MN \parallel AB$ ，

$\because AB \parallel CD$ ，

$\therefore MN \parallel CD$ ，

$\therefore \angle EMN = \angle BEM$ ， $\angle FMN = \angle MFD$ ，

$\therefore \angle EMN + \angle FMN = \angle BEM + \angle MFD$ ，

$\therefore \angle EMF = \angle BEM + \angle MFD$ ，

同理： $\angle EGF = \angle BEG + \angle DFG$ ，

$\because EM$ 平分 $\angle BEG$ ， FM 平分 $\angle DFG$ ，

$$\therefore \angle BEG = 2\angle BEM, \angle DFG = 2\angle DFM,$$

$$\therefore \angle EGF = 2(\angle BEM + \angle MFD) = 2\angle EMF,$$

由 (1) 知 $\angle EGF = 90^\circ$,

$$\therefore \angle EMF = 45^\circ; \dots\dots (6 \text{ 分})$$

(3) 解: $\angle EOF = 2\angle EPF$, 理由如下:

$\because EP$ 平分 $\angle BEO$, FP 平分 $\angle DFO$,

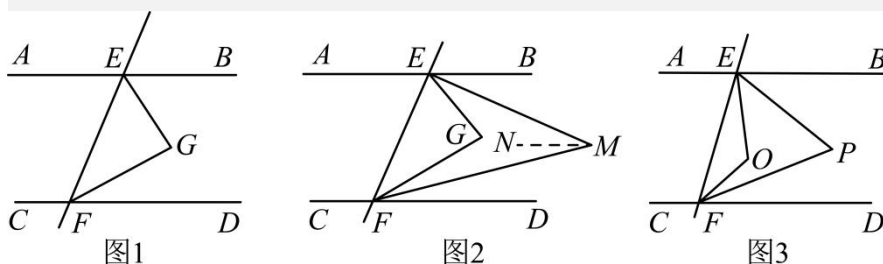
$$\therefore \angle BEO = 2\angle BEP, \angle DFO = 2\angle DFP,$$

$$\therefore \angle BEO + \angle DFO = 2(\angle BEP + \angle DFP),$$

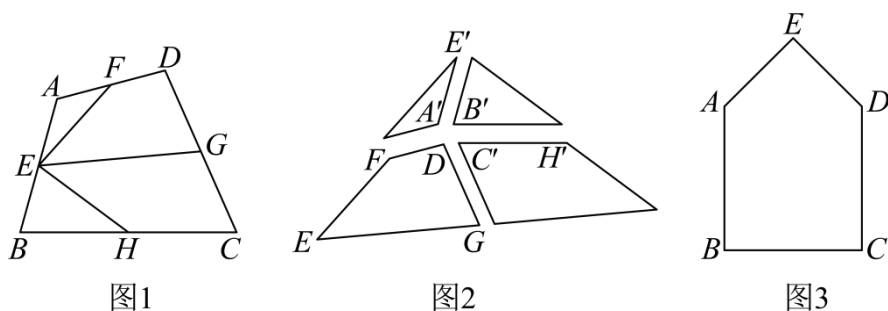
由 (2) 的证明可得: $\angle EOF = \angle BEO + \angle DFO$, $\angle EPF = \angle BEP + \angle DFP$,

$$\therefore \angle EOF = 2(\angle BEP + \angle DFP) = 2\angle EPF.$$

故答案为: $\angle EOF = 2\angle EPF$. $\dots\dots (9 \text{ 分})$



25. (9 分) 如何将任意一个四边形剪开拼成一个三角形?



(1)操作: 如图1, 依次取四边形 $ABCD$ 四条边的中点 E 、 F 、 G 、 H , 连接 EF 、 EG 、 EH , 沿着 EF 、 EG 、 EH 把四边形剪开成 2 个三角形, 2 个四边形; 右上角的四边形 $EFDG$ 保持不动, 把左上角的三角形绕点 F 旋转 180° , 把右下角的四边形绕点 G 旋转 180° , 把左下角三角形平移使得点 B 与点 D 重合. 通过以上操作, 得到的图形就是拼接之后形成的三角形.

通过以上操作, 若拼得的三角形是三边长均为 2 的三角形, 则 $EF =$ _____;

(2)思考: 以上操作中, 如果 $\angle FEG = \angle BEH = 60^\circ$, $\angle AEF = 20^\circ$, 则拼接之后形成的三角形的三个内角分别是 60° 、____、____;

(3)应用：以上操作引起了同学们极大的兴趣，大家尝试把五边形拼成三角形．小马虎仿照前面操作：把一边中点 O 和其余四边中点分别连起来，得到2个三角形、3个四边形，通过旋转平移拼三角形，他（能，不能）拼成三角形．

(4)小牛试着把特殊的五边形拼成一个特殊三角形；如图3，五边形可以看作由一个正方形和等腰直角三角形（ $AE = ED$ ）重合一边组成的五边形；小牛取 DC 中点 F ，连接 BE ，通过分割、旋转三角形把五边形拼成了一个以 BE 为腰的等腰直角三角形．请参考小牛的做法，设计一个把图3拼成三角形的方法．（直接作图，不需要写做法）

【详解】(1)解： $\triangle AEF$ 绕 F 旋转 180° 后， EF 与旋转后的线段共线，

且总长度 $EE' = 2EF$ ，拼接后的三角形边长为2， EE' 即为该边长，

$$\therefore EF = \frac{2}{2} = 1; \dots\dots (2 \text{ 分})$$

(2)解： E 在 AB 边上， A, E, B 共线，

$$\text{故 } \angle GEH = 180^\circ - \angle AEF - \angle FEG - \angle BEH = 180^\circ - 20^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 40^\circ,$$

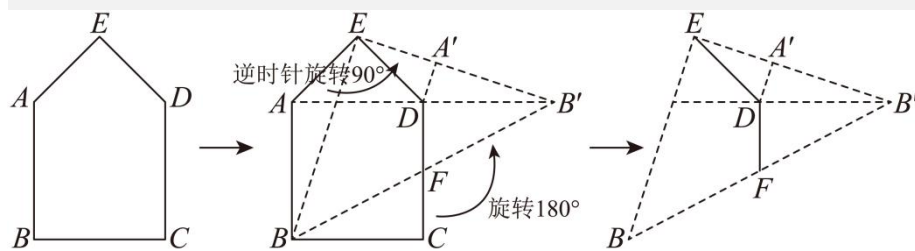
拼接后三角形的三个内角分别等于图1中的 $\angle FEG = 60^\circ$ 、 $\angle GEH = 40^\circ$ ，第三个内角为

$$180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ. \dots\dots (4 \text{ 分})$$

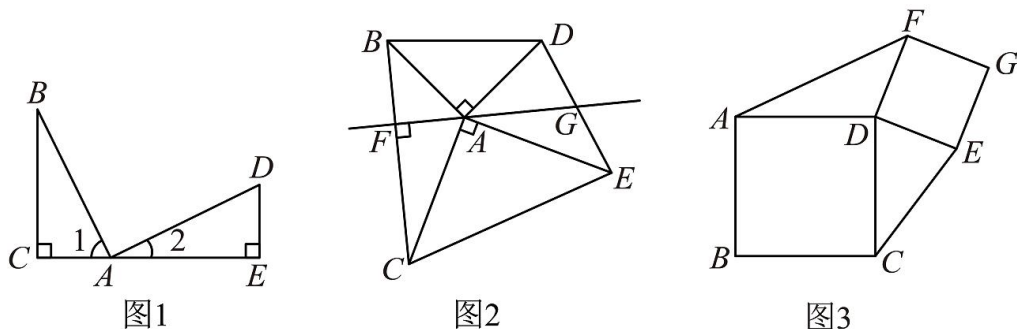
(3)解：仿照四边形的操作，该分割方法旋转平移后，无法让所有顶点、边恰好拼接为三角形，

因此不能拼成三角形； $\dots\dots (6 \text{ 分})$

(4)解：如图： $\triangle EBB'$ ，即：拼成三角形后的三角形。 $\dots\dots (9 \text{ 分})$



26. (9分) 通过对下面数学模型的研究学习，解决下列问题：



(1)如图1， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $AB = AD$ ，过点 B 作 $BC \perp AC$ 于点 C ，过点 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E ．由

$\angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + \angle D = 90^\circ$, 得 $\angle 1 = \angle D$. 又 $\angle ACB = \angle AED = 90^\circ$, 可以推理得到 $\triangle ABC \cong$ _____, 推理依据是 _____. 进而得到 $AC =$ _____, $BC =$ _____. 我们把这个数学模型称为“K 字”模型或“一线三等角”模型;

(2) 如图 2, $\angle BAD = \angle CAE = 90^\circ$, $AB = AD$, $AC = AE$, 连接 BC , DE , 且 $BC \perp AF$ 于点 F , DE 与直线 AF 交于点 G . 求证: 点 G 是 DE 的中点;

(3) 如图 3, 已知四边形 $ABCD$ 和 $DEGF$ 为正方形, $\triangle AFD$ 的面积为 S_1 , $\triangle DCE$ 的面积为 S_2 , 试猜想 S_1 和 S_2 的数量关系, 并说明理由.

【详解】(1) 解: $\because$ 过点 B 作 $BC \perp AC$ 于点 C , 过点 D 作 $DE \perp AC$ 于点 E .

$$\therefore \angle C = \angle E = 90^\circ,$$

$$\because \angle 1 = \angle D, AB = AD,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DAE (\text{AAS}),$$

$$\therefore AC = DE, BC = AE.$$

故答案为: $\triangle DAE$, AAS, DE , AE . …… (2 分)

(2) 证明: 如图: 作 $DM \perp AF$, $EN \perp AF$,

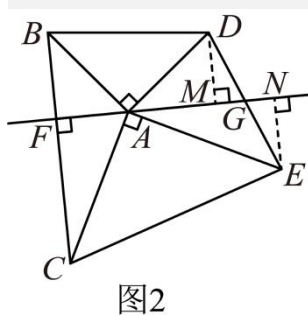


图2

由“K 字模型”可得: $\triangle ABF \cong \triangle DAM, \triangle ACF \cong \triangle EAN$

$$\therefore AF = DM, AF = EN,$$

$$\therefore DM = EN,$$

$$\because \angle DMG = \angle ENG = 90^\circ, \angle DGM = \angle BGN,$$

$$\therefore \triangle DMG \cong \triangle ENG,$$

$$\therefore GM = GN, \text{ 即: 点 } G \text{ 是 } DE \text{ 的中点. } \dots\dots (5 \text{ 分})$$

(3) 解: $S_1 = S_2$, 理由如下:

如图: 作 $PQ \perp CE$, $AM \perp PQ$, $FN \perp PQ$,



分)