

2025-2026 学年七年级下学期数学期末达标检测卷

(沪教版五四制)

一、单选题 (每小题 3 分, 共 30 分)

1. 下面关于公理和定理的说法正确的是 ()

- A. 公理是真命题, 但定理不是 B. 公理就是定理, 定理也是公理
C. 公理和定理都可以作为推理论证的依据 D. 公理和定理都应经过证明后才能使用

【答案】C

【分析】本题考查的是定理和公理的定义, 通过对定义的理解可找到答案.

【详解】解: 公理, 也就是经过人们长期实践检验、不需要证明同时也无法去证明的客观规律. 定理: 是用逻辑的方法判断为正确并作为推理的根据的真命题. 根据公理和定理的定义, 可知 C 是正确的, A、B、D 是错误的.

故选: C.

2. 如果 $x < y$, 那么下列不等式不成立的是 ()

- A. $x+3 < y+3$ B. $-x < -y$ C. $x-2 < y-2$ D. $\frac{x}{2}+1 < \frac{y}{2}+1$

【答案】B

【分析】本题考查不等式的基本性质, 根据不等式的性质逐一判断各选项即可得到答案.

【详解】解: 已知 $x < y$

根据不等式性质 1: 不等式两边加 (或减) 同一个数 (或式子), 不等号方向不变.

$\therefore$ 两边同时加 3, 不等号方向不变,

$\therefore x+3 < y+3$ 成立, A 不符合题意;

根据不等式性质 3: 不等式两边乘 (或除以) 同一个负数, 不等号方向改变.

$\therefore x < y$, 两边同时乘 -1 , 不等号方向改变,

$\therefore -x > -y$, 因此 $-x < -y$ 不成立, B 符合题意.

$\therefore$ 两边同时减 2, 不等号方向不变,

$\therefore x-2 < y-2$ 成立, C 不符合题意;

根据不等式性质 2: 不等式两边乘 (或除以) 同一个正数, 不等号方向不变, 结合性质 1 可得:

$\therefore x < y$, 两边同时除以正数 2, 得 $\frac{x}{2} < \frac{y}{2}$, 再两边同时加 1, 不等号方向不变,

$\therefore \frac{x}{2} + 1 < \frac{y}{2} + 1$ 成立, D 不符合题意;

3. 如图 1 是小强奶奶编的竹篓, 图 2 是将其局部抽象成的图形, 下列条件中一定能判断直线 $a \parallel b$ 的是 ()



图1

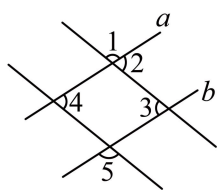


图2

A. $\angle 3 = \angle 4$

B. $\angle 2 = \angle 4$

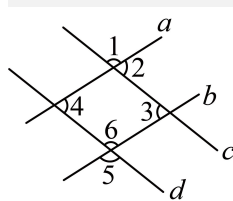
C. $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$

D. $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

【答案】C

【分析】利用平行线的判定定理来验证即可.

【详解】解: 如图所示,



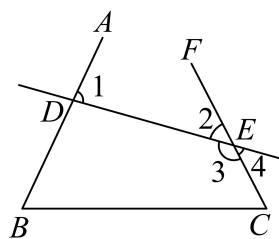
选项 A: $\angle 3, \angle 4$ 既不是同位角, 也不是内错角, 虽然 $\angle 3 = \angle 4$ 但无法证明 $a \parallel b$;

选项 B: 若 $\angle 2 = \angle 4$, 则 $c \parallel d$, 无法证明 $a \parallel b$;

选项 C: 根据题意可得 $\angle 5 = \angle 6$, 则 $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$ 可得 $\angle 4 + \angle 6 = 180^\circ$, 可得 $a \parallel b$;

选项 D: $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ 无法证明 $a \parallel b$.

4. 如图, 下列说法不正确的是 ()



- A. $\angle 1$ 与 $\angle 3$ 是直线 AB, FC 被 DE 所截得的内错角
- B. $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互为补角
- C. $\angle 2$ 与 $\angle 4$ 是对顶角
- D. $\angle B$ 与 $\angle C$ 是直线 AB, FC 被直线 BC 所截得的同旁内角

【答案】B

【详解】解: A、 $\angle 1$ 与 $\angle 3$ 是直线 AB, FC 被 DE 所截得的内错角, 原说法正确, 不符合题意;

B、 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是直线 AB, FC 被 DE 所截得的同旁内角, 只有 $AB \parallel FC$ 时才互补, 原说法不正确, 符合题意;

C、 $\angle 2$ 与 $\angle 4$ 是对顶角, 原说法正确, 不符合题意;

D、 $\angle B$ 与 $\angle C$ 是直线 AB, FC 被直线 BC 所截得的同旁内角, 原说法正确, 不符合题意.

5. 可以用来说明“若 $a^2 < b^2$, 则 $a < b$ ”是假命题的反例是 ()

- A. $a = 2, b = -3$
- B. $a = -1, b = 2$
- C. $a = -2, b = 1$
- D. $a = 4, b = 3$

【答案】A

【分析】此题考查了反证法的应用.

本题需找到满足“ $a^2 < b^2$ ”但不满足“ $a < b$ ”的反例, 以此证明原命题为假命题.

【详解】 $\because$ 选项 A 中, $a = 2, b = -3$

$$\therefore a^2 = 2^2 = 4, b^2 = (-3)^2 = 9$$

$\because 4 < 9$, 即 $a^2 < b^2$, 且 $2 > -3$, 即 $a > b$

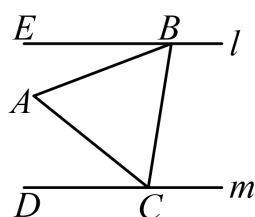
∴ 该选项满足原命题的前提但不满足结论，可作为反例说明原命题是假命题

选项 B 中， $a = -1 < 2 = b$ ，符合原命题结论，不是反例

选项 C、D 中， $a^2 > b^2$ ，不满足原命题的前提，均不是反例

故选：A

6. 如图，等边三角形 ABC 的两个顶点 B, C 分别落在直线 l, m 上， $l \parallel m$. 若 $\angle ABE = 21^\circ$ ，则 $\angle ACD$ 的度数是 ()



A. 42°

B. 39°

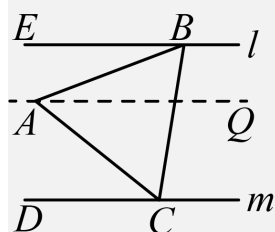
C. 29°

D. 21°

【答案】B

【分析】过 A 作 $GH \parallel AB$ ，利用平行线的性质，等量代换证明即可.

【详解】解：如图，过 A 作 $AQ \parallel BE$ ，



∵ $l \parallel m$,

∴ $AQ \parallel BE \parallel CD$,

∴ $\angle BAQ = \angle ABE = 21^\circ$, $\angle ACD = \angle CAQ$,

∴ $\angle BAC = \angle BAQ + \angle CAQ$,

∴ $\angle BAC = \angle ABE + \angle ACD$,

由等边三角形 ABC ,

∴ $\angle BAC = 60^\circ$,

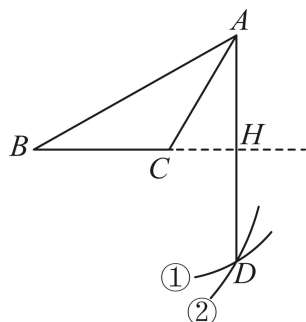
∴ $\angle ACD = \angle BAC - \angle ABE = 39^\circ$.

7. 如图，已知钝角 $\triangle ABC$ ，依下列步骤尺规作图，并保留作图痕迹.

步骤 1: 以 C 为圆心， CA 为半径画弧①；

步骤 2: 以 B 为圆心， BA 为半径画弧②，交弧①于点 D ；

步骤 3: 连结 AD ，交 BC 的延长线于点 H ．下列叙述正确的是（ ）



A. BH 垂直平分线段 AD

B. AC 平分 $\angle BAD$

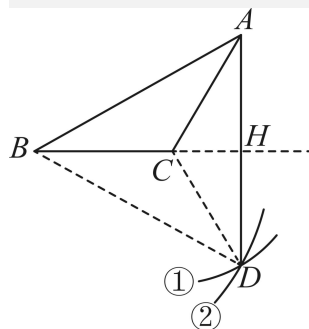
C. $S_{\triangle ABC} = BC \cdot DH$

D. $AC = AH$

【答案】A

【分析】根据已知作法可知 $CD = CA$ 、 $BD = BA$ ，则点 B 、 C 在 AD 的垂直平分线上.

【详解】解：如图：连接 CD ， BD



$\because$ 以 C 为圆心， CA 为半径画弧

$\therefore AC = CD$

$\because$ 以 B 为圆心， BA 为半径画弧②

$\therefore BD = BA$

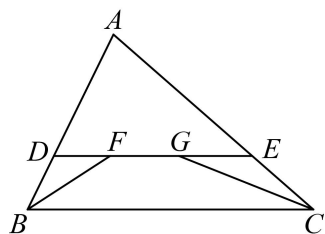
$\therefore$ 点 B 、 C 在 AD 的垂直平分线上．即 BH 垂直平分线段 AD ，故 A 正确

$\therefore AH = DH$

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} BC \cdot DH$ ，故 C 错误

不能得出 AC 平分 $\angle BAD$ 、 $AC = AH$ ，故 B，D 错误

8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ， $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线分别交 ED 于点 F 、 G ，若 $FG = 3$ ， $DE = 7$ ，则 $BD + CE$ 的值为 ()



A. 3

B. 4

C. 5

D. 9

【答案】B

【分析】本题考查了角平分线定义，平行线的性质，等腰三角形的判定，由角平分线定义得 $\angle ABF = \angle CBF$ ， $\angle ACG = \angle BCG$ ，由平行线性质得

$\angle DFB = \angle CBF$ ， $\angle EGC = \angle BCG$ ，所以 $\angle DFB = \angle DBF$ ， $\angle EGC = \angle ECG$ ，则 $BD = DF$ ， $CE = GE$ ，然后通过线段的和与差即可求解，掌握知识点的应用是解题的关键.

【详解】解： $\because BF$ 平分 $\angle ABC$ ， CG 平分 $\angle ACB$ ，

$$\therefore \angle ABF = \angle CBF, \angle ACG = \angle BCG,$$

$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DFB = \angle CBF, \angle EGC = \angle BCG,$$

$$\therefore \angle DFB = \angle DBF, \angle EGC = \angle ECG,$$

$$\therefore BD = DF, CE = GE,$$

$$\because DE = DF + FG + GE = 7,$$

$$\therefore DF + GE = 4,$$

$$\therefore BD + CE = 4,$$

故选：B.

9. 某数学兴趣小组对关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x > 3 \\ x \leq m \end{cases}$ ，讨论得到以下结论，①若 $m = 5$ ，

则不等式组的解集为 $3 < x \leq 5$ ；②若不等式组无解，则 m 的取值范围为 $m < 3$ ；
 ③若 $m = 2$ ，则不等式组无解；④若不等式组只有两个整数解，则 m 的取值范围
 为 $5 < m \leq 6$ 。其中正确的是（ ）

- A. ①②④ B. ②③④ C. ①③④ D. ①③

【答案】D

【详解】解：①若 $m = 5$ ，不等式组为 $\begin{cases} x > 3 \\ x \leq 5 \end{cases}$ ，

$\therefore$ 不等式组的解集为 $3 < x \leq 5$ ，故①正确；

②若不等式组 $\begin{cases} x > 3 \\ x \leq m \end{cases}$ 无解，

$\therefore m \leq 3$ ，故②错误；

③若 $m = 2$ ，不等式组为 $\begin{cases} x > 3 \\ x \leq 2 \end{cases}$ ，

$\therefore$ 不等式组无解，故③正确；

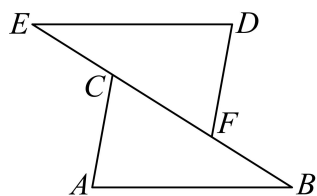
④若不等式组只有两个整数解，

$\therefore$ 两个整数为 4 和 5，

$\therefore 5 \leq m < 6$ ，故④错误；

综上，正确的结论为①③.

10. 如图，点 E, C, F, B 在一条直线上， $AB \parallel DE$ ，连接 AC, DF ，
 $AC = DF$ 。若要使 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，则需要添加的条件可以是（ ）



- A. $AB = DE$ B. $EC = BF$ C. $\angle D = \angle A$ D. $\angle D = \angle EFD$

【答案】C

【分析】本题考查了全等三角形的判定，掌握全等三角形的判定方法是解题的关键；

注意：AAA、SSA 不能判定两个三角形全等，判定两个三角形全等时，必须

有边的参与，若有两边一角相等时，角必须是两边的夹角，根据全等三角形的判定方法一一判断即可.

【详解】解： $\because AB \parallel DE$,

$$\therefore \angle B = \angle E ,$$

当添加 $AB = DE$,

$$\because AC = DF , AB = DE , \angle B = \angle E , \text{ 不能证明 } \triangle ABC \cong \triangle DEF ,$$

$\therefore$ A 选项不符合题意;

当添加 $EC = BF$, 那么 $EC + CF = BF + CF$, 即 $EF = BC$,

$$\because AC = DF , EF = BC , \angle B = \angle E , \text{ 不能证明 } \triangle ABC \cong \triangle DEF ,$$

$\therefore$ B 选项不符合题意;

当添加 $\angle D = \angle A$,

$$\because \angle D = \angle A , \angle B = \angle E , AC = DF , \text{ 满足 AAS ,}$$

$$\therefore \text{ 可证 } \triangle ABC \cong \triangle DEF ,$$

$\therefore$ C 选项符合题意;

当添加 $\angle D = \angle EFD$, 不能证明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$,

$\therefore$ D 选项不符合题意;

$\therefore$ 需要添加的条件可以是 $\angle D = \angle A$,

故选: C.

二、填空题 (每小题 3 分, 共 18 分)

11. 已知关于 x 的不等式 $x - 2 > 0$ 的每一个解都能使 $x - m > 0$ 成立, 那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \leq 2$

【分析】先求出每一个不等式的解集, 再根据两个解集之间的关系, 求出 m 的取值范围即可.

【详解】解: $\because x - 2 > 0$,

$$\therefore x > 2 ,$$

$$\because x - m > 0,$$

$$\therefore x > m,$$

$\therefore$ 不等式 $x - 2 > 0$ 的每一个解都能使 $x - m > 0$ 成立,

$$\therefore m \leq 2.$$

12. 已知 a, b, c 是三角形的三边, 其中 $a = 7, b = 4$, 则 c 的取值范围是_____.

【答案】 $3 < c < 11$

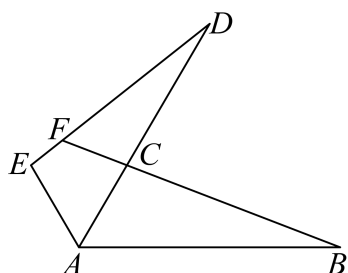
【分析】 利用三角形三边关系求解, 三角形任意两边之差小于第三边, 任意两边之和大于第三边, 代入已知 a, b 的值即可得到 c 的取值范围.

【详解】 解: 根据三角形三边关系可知, 第三边 c 满足 $a - b < c < a + b$,

将 $a = 7, b = 4$ 代入得 $7 - 4 < c < 7 + 4$, 即 $3 < c < 11$.

故答案为: $3 < c < 11$.

13. 如图, $\triangle ABC \cong \triangle ADE$, $\angle D = 20^\circ, \angle E = 100^\circ$, 点 C 在 AD 上, BC 的延长线交 DE 于点 F , 那么 $\angle EFC =$ _____ $^\circ$.



【答案】 120

【分析】 根据全等三角形的性质得到 $\angle ACB$ 的度数, 对顶角得到 $\angle DCF$ 的度数, 再根据三角形的外角的性质, 即可得出结果.

【详解】 解: $\because \triangle ABC \cong \triangle ADE, \angle D = 20^\circ, \angle E = 100^\circ,$

$$\therefore \angle ACB = \angle E = 100^\circ,$$

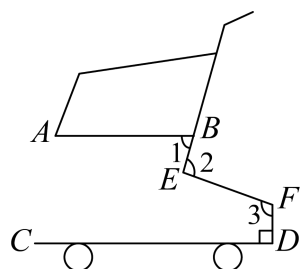
$$\therefore \angle DCF = \angle ACB = 100^\circ,$$

$\therefore \angle EFC$ 是 $\triangle CFD$ 的一个外角,

$$\therefore \angle EFC = \angle D + \angle DCF = 120^\circ.$$

14. 超市的小推车能更有效地增加角落的收纳空间, 十分便捷. 将它抽象出来的

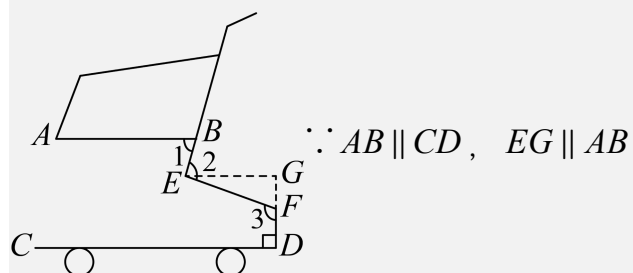
平面图形如图所示. 已知 $AB \parallel CD$, $FD \perp CD$, 若 $\angle 1 = 75^\circ$, $\angle 2 = 95^\circ$, 则 $\angle 3$ 的度数为_____.



【答案】 110° / 110 度

【分析】通过作辅助线 $EG \parallel AB$, 利用平行线的传递性得到 $EG \parallel CD$, 再结合平行线的性质和已知垂直条件, 求出 $\angle 3$ 的度数. 本题主要考查了平行线的性质与判定, 熟练掌握平行线的性质 (两直线平行, 内错角相等; 平行线间的传递性等) 是解题的关键.

【详解】解: 过点 E 作 $EG \parallel AB$ 交 DF 的延长线于点 G ,



$\therefore EG \parallel CD$

$\therefore AB \parallel EG$

$\therefore \angle 1 = \angle BEG = 75^\circ$

$\therefore \angle GEF = \angle 2 - \angle BEG = 95^\circ - 75^\circ = 20^\circ$

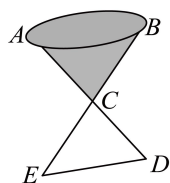
$\therefore EG \parallel CD, FD \perp CD$

$\therefore EG \perp FD$, 即 $\angle EGD = 90^\circ$,

$\therefore \angle 3 = \angle EGF + \angle GEF = 90^\circ - 20^\circ = 110^\circ$

故答案为: 110° .

15. 如图, 小明想测量池塘两岸上 A 、 B 两点的距离. 他在平地上取一点 C , 使测量者能从 C 直线走到 A 和 B 两点, 在平地上延长 AC 至点 D , 使 $CD = AC$, 延长 BC 至点 E , 使 $CE = BC$, 连接 DE . 若测得 $DE = 20$ 米, 则 A 、 B 两点间的距离为_____米.



【答案】

20

【分析】根据题意利用“边角边”证明 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEC$ 全等, 再根据全等三角形对应边相等即可求解;

【详解】解: 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 中,

$$\because \begin{cases} AC = DC \\ \angle ACB = \angle DCE, \\ BC = EC \end{cases}$$

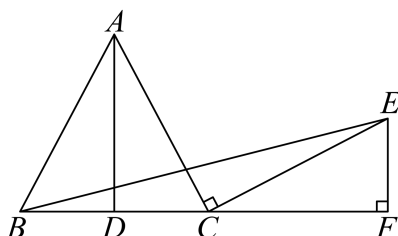
$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEC (\text{SAS}),$$

$$\therefore AB = DE,$$

$$\because DE = 20,$$

$$\therefore AB = 20.$$

16. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, D 为 BC 中点, $BD = 3$, $EC \perp AC$ 于点 C , 且 $EC = AC$, $EF \perp BC$ 延长线于点 F , 则 $\triangle BCE$ 的面积 = _____.



【答案】9

【分析】此题考查全等三角形的判定与性质, 三线合一, 关键是证明

$$\triangle ADC \cong \triangle CFE (\text{AAS}).$$

由三线合一得到 $BD = CD = 3$, $BC = 6$, $AD \perp DC$, 证明

$\triangle ADC \cong \triangle CFE (\text{AAS})$, 进而利用全等三角形的性质和三角形面积公式解答即可.

【详解】解: $\because AB = AC$, D 为 BC 中点,

$$\therefore BD = CD = 3, \quad BC = 6, \quad AD \perp DC,$$

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC + \angle ACD = 90^\circ,$$

$$\because EC \perp AC,$$

$$\therefore \angle ACE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD + \angle ECF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle ECF,$$

$$\because EF \perp BC,$$

$$\therefore \angle CFE = 90^\circ,$$

在 $\triangle ADC$ 与 $\triangle CFE$ 中,

$$\begin{cases} \angle ADC = \angle CFE = 90^\circ \\ \angle DAC = \angle ECF \\ AC = CE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle CFE (\text{AAS}),$$

$$\therefore EF = DC = 3,$$

$$\therefore \triangle BCE \text{ 的面积} = \frac{1}{2} BC \cdot EF = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9.$$

故答案为: 9.

三、解答题 (每小题 9 分, 共 72 分)

17. 解下列不等式，并将解集在数轴上表示出来：

(1) $3 - 2x \leq x + 6$;

(2) $3x > 5(x + 1) - 1$.

【答案】 (1)

$x \geq -1$ ，数轴表示见解析

(2)

$x < -2$ ，数轴表示见解析

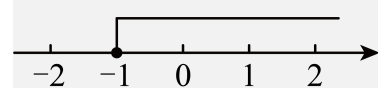
【详解】 (1) 解： $3 - 2x \leq x + 6$,

$$-2x - x \leq 6 - 3,$$

$$-3x \leq 3,$$

$$x \geq -1;$$

数轴表示解集如图：



(2) 解： $3x > 5(x + 1) - 1$

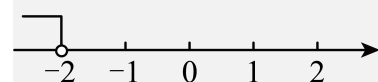
$$3x > 5x + 5 - 1,$$

$$3x - 5x > 4,$$

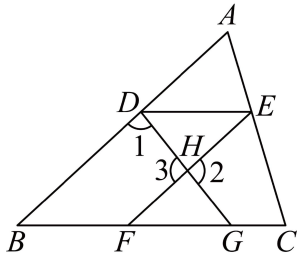
$$-2x > 4,$$

$$x < -2.$$

在数轴上表示解集如图：



18. 已知 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, $\angle B = \angle DEF$, 求证： $DE \parallel BC$.



请将下面的推理过程补充完整.

证明: $\because \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (已知)

$\angle 2 = \angle 3$ (_____)

$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$

$\therefore$ _____ (_____)

$\therefore \angle B =$ _____ (_____)

$\because \angle B = \angle DEF$ (已知)

$\therefore \angle DEF =$ _____ (_____)

$\therefore DE \parallel BC$ (_____)

【答案】 对顶角相等; $AB \parallel EF$ (同旁内角互补, 两直线平行); $\angle EFC$ (两直线平行, 同位角相等); $\angle EFC$ (等量代换); $DE \parallel BC$ 内错角相等, 两直线平行.

【分析】 由于 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, $\angle 2 = \angle 3$, 则 $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$, 根据同旁内角互补, 两直线平行得到 $AB \parallel EF$, 则利用平行线的性质得 $\angle B = \angle CFE$, 由于 $\angle B = \angle DEF$, 所以 $\angle DEF = \angle CFE$, 于是根据平行线的判定得到 $DE \parallel BC$.

【详解】 证明: $\because \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (已知)

$\therefore \angle 2 = \angle 3$ (对顶角相等)

$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$

$\therefore AB \parallel EF$ (同旁内角互补, 两直线平行)

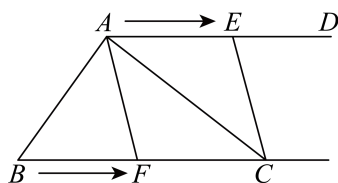
$\therefore \angle B = \angle EFC$ (两直线平行, 同位角相等),

$\because \angle B = \angle DEF$ (已知),

$\therefore \angle DEF = \angle EFC$ (等量代换),

$\therefore DE \parallel BC$ (内错角相等, 两直线平行).

19. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 10\text{cm}$, 射线 $AD \parallel BC$, 点 E 从点 A 出发沿射线 AD 以 1cm/s 的速度运动, 同时点 F 从点 B 出发沿射线 BC 以 2cm/s 的速度运动, 连接 AF , CE , AC . 设点 E 运动时间为 $t(\text{s}) (t > 0)$.



(1) 若 $\angle BAF \geq \angle BAC$, 则 t 的取值范围是_____;

(2) 求 t 为何值时, AF 平分 $\triangle ABC$ 的面积;

(3) 求 t 为何值时, $AE = CF$.

【答案】 (1) $t \geq 5$

(2) $t = 2.5$

(3) $t = \frac{10}{3}$ 或 10

【分析】 本题考查了一元一次不等式的应用, 一元一次方程的应用, 三角形中线的性质, 数形结合是解答本题的关键.

(1) 根据当 $\angle BAF \geq \angle BAC$ 时, 点 F 在点 C 的右侧运动可得答案;

(2) 根据当 AF 平分 $\triangle ABC$ 的面积时, 点 F 是线段 BC 的中点可得答案;

(3) 分类讨论: 点 F 在点 C 左侧和点 F 在点 C 的右侧时, 可得关于 t 的一元一次方程, 解方程可得答案.

【详解】 (1) 解: 当 $BF \geq BC$ 时, $\angle BAF \geq \angle BAC$,

$$\therefore 2t \geq 10,$$

解得 $t \geq 5$,

故答案为: $t \geq 5$;

(2) 解: $\because AF$ 平分 ABC 的面积,

$$\therefore BF = CF,$$

$$\therefore 2t = 10 - 2t,$$

$$\therefore t = 2.5;$$

(3) 解: 分两种情况讨论:

① 点 F 在点 C 左侧时, $AE = CF$,

$$\text{则 } t = 10 - 2t,$$

$$\text{解得 } t = \frac{10}{3};$$

② 当点 F 在点 C 的右侧时, $AE = CF$,

$$\text{则 } t = 2t - 10,$$

$$\text{解得 } t = 10,$$

综上所述, $t = \frac{10}{3}$ 或 10 时, $AE = CF$.

20. 2026 年春晚, 我国智能机器人第三次登上央视舞台, 呈现连续空翻等多种武术技巧, 成为社交媒体热议焦点. 某公司计划购买甲、乙两种机器人, 已知甲种机器人单价是乙种机器人单价的 $\frac{5}{6}$, 用 500 万元购买甲种机器人的数量比用 450 万元购买乙种机器人的数量多 5 个.

(1) 求甲、乙两种机器人的单价分别是多少;

(2) 现公司计划购买甲、乙两种机器人共 20 个, 要求购买的总费用不超过 550 万元, 且甲种机器人的数量不超过乙种机器人数量的 2 倍, 那么该如何购买, 才能使总费用最少? 最少费用是多少?

【答案】 (1) 甲种机器人单价为 25 万元, 乙种机器人单价为 30 万元

(2) 购买甲种机器人 13 个, 乙种机器人 7 个时总费用最少, 最少费用为 535 万元

【分析】(1) 设乙种机器人单价为 x 万元，则甲种机器人单价为 $\frac{5}{6}x$ 万元，根据题意，列出分式方程，求解即可得出结果；

(2) 设购买甲种机器人 m 个，则购买乙种机器人 $(20-m)$ 个，根据题意得出不等式组 $\begin{cases} m \leq 2(20-m) \\ 25m + 30(20-m) \leq 550 \end{cases}$ ，求解得出 m 的取值范围，由费用最少，得出对应结果.

【详解】(1) 解：假设乙种机器人单价为 x 万元，则甲种机器人单价为 $\frac{5}{6}x$ 万元，

根据题意，得出方程 $\frac{500}{\frac{5}{6}x} = \frac{450}{x} + 5$ ，

解得 $x = 30$ ，

经检验， $x = 30$ 是方程的解，则 $\frac{5}{6}x = 25$ ，

故甲种机器人单价为 25 万元，乙种机器人单价为 30 万元.

(2) 解：设购买甲种机器人 m 个，则购买乙种机器人 $(20-m)$ 个，

根据题意，列出不等式组 $\begin{cases} m \leq 2(20-m) \\ 25m + 30(20-m) \leq 550 \end{cases}$ ，

解得 $10 \leq m \leq \frac{40}{3}$ ，

由于 m 取正整数，则 m 取 10, 11, 12, 13,

$\therefore$ 总费用表达式为 $25m + 30(20-m) = 600 - 5m$ ，

若想费用最小，则甲种机器人数量应越多越好，

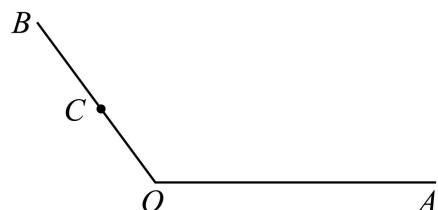
故应购买甲种机器人 13 个，乙种机器人 7 个，

此时费用为 $25 \times 13 + 30 \times 7 = 535$ (万元)，

答：购买甲种机器人 13 个，乙种机器人 7 个时总费用最少，最少费用为 535 万

元.

21. 如图, 点 C 在 $\angle O$ 的一边 OB 上. 请按要求画图并填空:



(1) 过点 C 作 OB 边的垂线 CD , 交线段 AO 的延长线于点 D ;

(2) 过点 C 作 OA 边的垂线段 CE , 垂足为点 E ;

(3) 比较线段 CE , OD , CD 的大小, 并用 “ $<$ ” 连接得_____, 得此结论的依据是_____.

【答案】 (1) 见解析

(2) 见解析

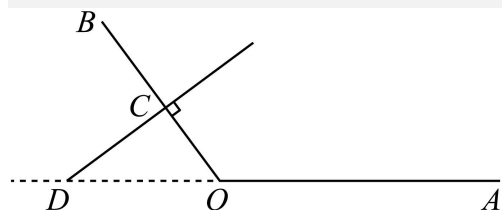
(3) $CE < CD < OD$, 垂线段最短

【分析】 (1) 根据垂直的定义作图即可;

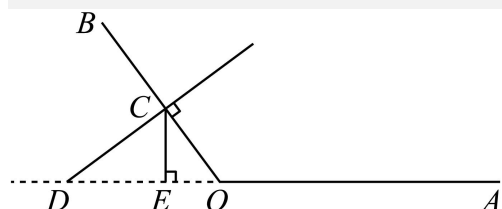
(2) 根据垂直的定义作图即可;

(3) 先结合两处垂直条件, 连续运用垂线段最短分步比较线段大小, 最后得出 $CE < CD < OD$.

【详解】 (1) 解: 如图, CD 即为所求;



(2) 解: 如图, CE 即为所求;



(3) 解: $\because CD \perp OB$,

$\therefore CD < OD$,

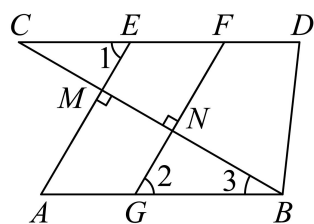
$$\therefore CE \perp OA,$$

$$\therefore CE < CD,$$

$$\therefore CE < CD < OD,$$

得此结论的依据是垂线段最短.

22. 如图, 点 E, F 在直线 CD 上, 点 G 在直线 AB 上, 连接 AE, GF, BC , BD , 且 BC 分别交 AE, GF 于点 M, N , 若 $AE \perp BC, FG \perp BC, \angle 1 = \angle 2$.



(1) 试说明: $AB \parallel CD$;

(2) 若 $\angle D = \angle 3 + 50^\circ$, $\angle CBD = 60^\circ$, 求 $\angle C$ 的度数.

【答案】 (1) 见解析

(2) 35°

【分析】 (1) 先证明 $AE \parallel GF$, 再由两直线平行, 同位角相等得出 $\angle 1 = \angle CFG$, 结合题意可得 $\angle CFG = \angle 2$, 即可得证;

(2) 由平行线的性质可得 $\angle D + \angle ABD = 180^\circ$, $\angle C = \angle 3$, 再结合题意计算即可得出结果.

【详解】 (1) 证明: $\because AE \perp BC, FG \perp BC$,

$$\therefore AE \parallel GF,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle CFG,$$

$$\because \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore \angle CFG = \angle 2,$$

$$\therefore AB \parallel CD;$$

(2) 解: $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle D + \angle ABD = 180^\circ, \quad \angle C = \angle 3,$$

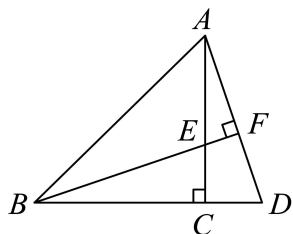
$$\because \angle D = \angle 3 + 50^\circ, \quad \angle ABD = \angle 3 + \angle CBD = \angle 3 + 60^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 + 50^\circ + \angle 3 + 60^\circ = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 = 35^\circ,$$

$$\therefore \angle C = \angle 3 = 35^\circ.$$

23. 如图, 在 $\triangle ABD$ 中, BD 上的高线 AC 与 AD 上的高线 BF 相交于点 E , 且 $BE = AD$.



(1) 求证: $\triangle ADC \cong \triangle BEC$;

(2) 若 $CE = 3$, $AE = 5$, 求 BD 的长.

【答案】 (1) 见解析

(2) 11

【分析】 (1) 由垂线的定义得到 $\angle BCE = \angle ACD = \angle BFD = 90^\circ$, 再利用三角形内角和定理求出 $\angle CBE = \angle CAD$, 结合 $BE = AD$, 利用 AAS, 即可证明结论;

(2) 由 (1) 知 $\triangle ADC \cong \triangle BEC$, 得到 $BC = AC, CE = CD$, 求出 $BC = AC = 8, CD = CE = 3$, 即可求解.

【详解】 (1) 证明: $\because BD$ 上的高线 AC 与 AD 上的高线 BF 相交于点 E ,

$$\therefore \angle BCE = \angle ACD = \angle BFD = 90^\circ, \quad \angle BEC = \angle AEF,$$

$$\therefore \angle BCE + \angle BEC + \angle CBE = \angle CAD + \angle AFE + \angle AEF = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle CBE = \angle CAD,$$

$$\because BE = AD,$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle BEC \text{ (AAS)};$$

(2) 解: 由 (1) 知 $\triangle ADC \cong \triangle BEC$,

$$\therefore BC = AC, CE = CD,$$

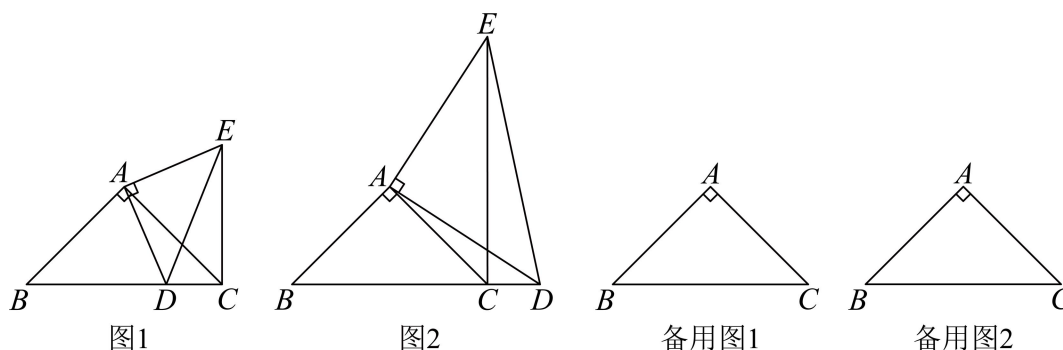
$$\because CE = 3, AE = 5,$$

$$\therefore CD = 3, \quad AC = AE + CE = 8,$$

$$\therefore BC = 8,$$

$$\therefore BD = BC + CD = 11.$$

24. 【综合与实践】数学活动课上，老师带领同学们以等腰三角形为背景，探究动点线段之间的关系，已知在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $BC = 8\text{cm}$ ，点 D 从点 C 出发在直线 BC 上以 2cm/s 速度运动，连接 AD ，在直线 AD 的右侧作 $\angle DAE = 90^\circ$ ，且 $AE = AD$ ，连接 DE ， CE ，设运动时间为 t ($t > 0$)。



(1) 【思考尝试】如图 1 是“智慧小组”在探究过程中画出的图形，此时点 D 在线段 BC 上，请直接写出线段 BD 与 CE 的数量关系与位置关系：

_____，_____。

(2) 【深入探究】如图 2 是“善思小组”在探究过程中画出的图形，此时点 D 在线段 BC 的延长线上，请判断 (1) 中的结论是否成立，并说明理由；

(3) “希望小组”在探究过程中提出了一个新的问题，在点 D 运动的过程中，如果 $CE = 5\text{cm}$ ，请直接写出线段 CD 的长为_____ cm ；

(4) 【拓展应用】当 t 的值为_____秒时， $\triangle ABD$ 的面积为 14cm^2 。

【答案】(1) $BD = CE$ ， $BD \perp CE$

(2) 结论仍然成立，见解析

(3) 3 或 13

(4) 当 t 为 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{15}{2}$ 时， $\triangle ABD$ 的面积为 14cm^2

【分析】(1) 由 SAS 证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ 可得出 BD ， CE 的数量和位置关系；

(2) 同 (1) 方法证明, 可得出结论;

(3) 分两种情况: ①当点 D 在 BC 上时, ②当点 D 在 CB 延长线上时, 逐个分析求解即可;

(4) 作 $AM \perp BC$ 于点 M , 利用三角形面积公式求得 $BD = 7\text{cm}$, 再分两种情况:

①当点 D 在 BC 上时, ②当点 D 在 CB 延长线上时, 逐个分析求解即可.

【详解】(1) 解: $BD = CE$, $BD \perp CE$.

证明: $\because \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$, $AB = AC$,

$\therefore \angle BAD = \angle CAE$, $\angle B = \angle ACB = 45^\circ$,

$\because AE = AD$,

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE (\text{SAS})$,

$\therefore BD = CE$, $\angle B = \angle ACE = 45^\circ$,

$\therefore \angle BCE = \angle ACB + \angle ACE = 90^\circ$,

$\therefore BD \perp CE$;

(2) 解: 成立. 理由如下:

$\because \angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$, $AB = AC$,

$\therefore \angle BAC + \angle CAD = \angle DAE + \angle CAD$, $\angle B = \angle ACB = 45^\circ$,

$\therefore \angle BAD = \angle CAE$,

$\because AB = AC$, $AE = AD$,

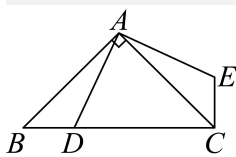
$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE (\text{SAS})$,

$\therefore BD = CE$, $\angle B = \angle ACE = 45^\circ$,

$\therefore \angle BCE = \angle ACB + \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore BD \perp CE$;

(3) 解: ①当点 D 在 BC 上时, 如图,

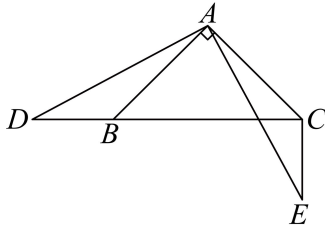


由 (1) 可知 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$,

$$\therefore BD = CE = 5,$$

$$\therefore CD = BC - BD = 8 - 5 = 3(\text{cm});$$

②当点 D 在 CB 延长线上时, 如图,



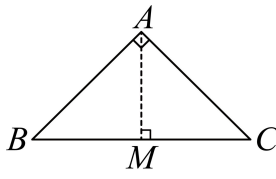
由 (2) 可知, $\triangle ABD \cong \triangle ACE$,

$$\therefore BD = CE = 5,$$

$$\therefore CD = BC + BD = 8 + 5 = 13(\text{cm}),$$

综上所述, 线段 CD 的长为 3 或 13cm;

(4) 解: 作 $AM \perp BC$ 于点 M ,



$\therefore$ $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 90^\circ$, $BC = 8\text{cm}$,

$$\therefore AM = \frac{1}{2}BC = 4\text{cm},$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot 4 = 2BD,$$

$\therefore \triangle ABD$ 的面积为 14cm^2 ,

$$\therefore 2BD = 14,$$

解得 $BD = 7\text{cm}$,

$\therefore$ 点 D 从点 C 出发在直线 BC 上以 2cm/s 速度运动, 设运动时间为 $t(t > 0)$,

$$\therefore CD = 2t,$$

①当点 D 在 BC 上时, $BD = 8 - 2t = 7$,

$$\therefore t = \frac{1}{2};$$

②当点 D 在 CB 延长线上时, $BD = 2t - 8 = 7$,

$$\therefore t = \frac{15}{2};$$

综上, 当 t 为 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{15}{2}$ 时, $\triangle ABD$ 的面积为 14cm^2 .