

2025 学年第二学期期中质量检测

七年级数学试卷

(考试时间: 90 分钟 满分 100 分)

考生注意: 请将所有答案写在答题纸上, 写在试卷上不计分

一、单选题 (本大题共 6 题, 每题 3 分, 共 18 分)

1. 如果 $x > y$, 那么下列各式中错误的是 ()

A. $1+x > 1+y$

B. $1-x > 1-y$

C. $-5x < -5y$

D. $2x > 2y$

【答案】B

【解析】

【分析】根据不等式性质逐一判断各选项即可, 找到错误的选项即为答案.

【详解】解: A、 $\because x > y$,

$\therefore 1+x > 1+y$, 该选项正确, 不符合题意;

B、 $\because x > y$,

$\therefore -x < -y$,

$\therefore 1-x < 1-y$, 该选项错误, 符合题意;

C、 $\because x > y$,

$\therefore -5x < -5y$, 该选项正确, 不符合题意;

D、 $\because x > y$,

$\therefore 2x > 2y$, 该选项正确, 不符合题意.

2. 下列二次根式中, 是最简二次根式的是 ()

A. $\sqrt{32}$

B. $\sqrt{ab^2}$

C. $\sqrt{27x}$

D. $\sqrt{2a}$

【答案】D

【解析】

【分析】最简二次根式需满足: 被开方数的因数是整数, 字母因式是整式; 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式, 据此对各选项逐一判断即可.

【详解】解: A. $\because \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$,

$\therefore \sqrt{32}$ 不是最简二次根式，故此选项不符合题意；

B. $\because \sqrt{ab^2} = |b|\sqrt{a}$,

$\therefore \sqrt{ab^2}$ 不是最简二次根式，故此选项不符合题意；

C. $\because \sqrt{27x} = \sqrt{9 \times 3x} = 3\sqrt{3x}$,

$\therefore \sqrt{27x}$ 不是最简二次根式，故此选项不符合题意；

D. $\because \sqrt{2a}$ 满足最简二次根式的两个条件，

$\therefore \sqrt{2a}$ 是最简二次根式，故此选项符合题意.

3. 已知三角形两边的长分别是 4 和 9，则此三角形第三边的长可以是 ()

A. 4

B. 5

C. 10

D. 15

【答案】C

【解析】

【分析】根据三角形的三边关系定理求出第三边的范围即可选出答案.

【详解】解：设第三边长为 x ，则由三角形三边关系定理得 $9 - 4 < x < 4 + 9$ ，

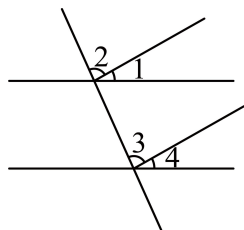
因此，三角形的第三边应满足 $5 < x < 13$ ，

只有 10 符合不等式，

故选：C.

【点睛】本题考查了三角形的三边关系定理，熟记定理是解题关键.

4. 如图，四位同学根据所学数学知识在找同位角，其中正确的是 ()



A. $\angle 1$ 与 $\angle 4$ 是同位角

B. $\angle 1$ 与 $\angle 3$ 是同位角

C. $\angle 2$ 与 $\angle 3$ 是同位角

D. $\angle 2$ 与 $\angle 4$ 是同位角

【答案】C

【解析】

【详解】解：A. $\angle 1$ 与 $\angle 4$ 不是同位角；

B. $\angle 1$ 与 $\angle 3$ 不是同位角；

C. $\angle 2$ 与 $\angle 3$ 是同位角;

D. $\angle 2$ 与 $\angle 4$ 不是同位角.

5. 给定三角形的三个元素, 所画出的三角形的形状和大小不能完全确定的是 ()

A. $AB = 4\text{cm}$, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 30^\circ$

B. $AB = 4\text{cm}$, $BC = 3\text{cm}$, $\angle A = 30^\circ$

C. $AB = 4\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$, $\angle B = 30^\circ$

D. $AB = 4\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$, $AC = 6\text{cm}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据全等三角形的判定定理, 若给出条件符合全等三角形判定, 则三角形形状大小可完全确定, 反之无法确定, 其中 SSA (两边及其中一边的对角) 无法确定唯一三角形.

【详解】解: 全等三角形可唯一确定三角形的形状和大小, 全等判定定理包括 ASA, AAS, SAS, SSS, HL, 但 SSA 不能判定三角形全等, 无法确定唯一三角形,

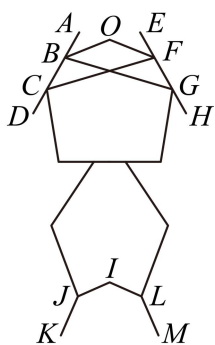
A、选项给出 $AB = 4\text{cm}$, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, 符合 ASA 判定, 可确定唯一三角形, 不符合题意;

B、选项给出 $AB = 4\text{cm}$, $BC = 3\text{cm}$, $\angle A = 30^\circ$, 属于 SSA, 可画出两个形状不同的三角形, 不能完全确定三角形的形状和大小, 符合题意;

C、选项给出 $AB = 4\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$, $\angle B = 30^\circ$, 符合 SAS 判定, 可确定唯一三角形, 不符合题意;

D、选项给出 $AB = 4\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$, $AC = 6\text{cm}$, 符合 SSS 判定, 可确定唯一三角形, 不符合题意.

6. 哪吒在面对困难和挑战时, 始终展现出无畏的勇气. 如图是根据哪吒照片抽象出的一幅直观图. 已知点 O 为 $\angle ABG$ 与 $\angle EFC$ 的角平分线的交点, $IJ \parallel OB$, $IL \parallel OF$, 若 $\angle DCF + \angle HGB = \theta$, 则 $\angle I =$ ().



A. $\frac{\theta}{2}$

B. $\frac{\theta}{2} - 90^\circ$

C. $\theta - 180^\circ$

D. $360^\circ - \theta$

【答案】A

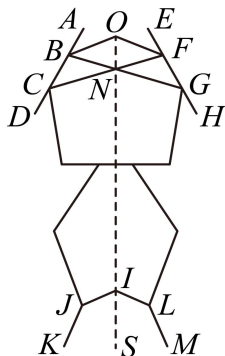
【解析】

【分析】设 BG 与 CF 的交点为 N , 连接 OI 并延长至点 S , 由平角的性质可得, $\angle BCF + \angle BGF = 360^\circ - \theta$, 结合三角形内角和为 180° 可得, $\angle ABG + \angle EFC = 360^\circ - \theta + 2\angle BNC$. 根据角平分线的性质可得,

$\angle OBN + \angle OFN = 180^\circ - \frac{1}{2}\theta + \angle BNC$ ，结合四边形内角和为 360° 可得， $\angle BOF = \frac{1}{2}\theta$ ，根据平行线

的性质容易判断 $\angle JIL = \angle BOF = \frac{1}{2}\theta$ 。

【详解】解：如图，设 BG 与 CF 的交点为 N ，连接 OI 并延长至点 S ，



$$\because \angle BCF + \angle DCF = 180^\circ, \angle BGF + \angle HGB = 180^\circ, \angle DCF + \angle HGB = \theta,$$

$$\therefore \angle BCF + \angle BGF = 360^\circ - \angle DCF - \angle HGB = 360^\circ - \theta,$$

$$\because \angle BCF + \angle CBG + \angle BNC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle CBG = 180^\circ - \angle BCF - \angle BNC,$$

$$\therefore \angle ABG = 180^\circ - \angle CBG = \angle BCF + \angle BNC,$$

同理， $\angle EFC = \angle BGF + \angle GNF$ ，

$$\because \angle GNF = \angle BNC,$$

$$\therefore \angle ABG + \angle EFC = \angle BGF + \angle BCF + 2\angle BNC = 360^\circ - \theta + 2\angle BNC,$$

$$\because OB \text{ 平分 } \angle ABG, OF \text{ 平分 } \angle EFC,$$

$$\therefore \angle OBN = \frac{1}{2}\angle ABG, \angle OFN = \frac{1}{2}\angle EFC,$$

$$\therefore \angle OBN + \angle OFN = \frac{1}{2}(\angle ABG + \angle EFC) = 180^\circ - \frac{1}{2}\theta + \angle BNC,$$

$$\because \angle OBN + \angle OFN + \angle BNF + \angle BOF = 360^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle BNF = 180^\circ - \angle BNC,$$

$$\therefore 180^\circ - \frac{1}{2}\theta + \angle BNC + 180^\circ - \angle BNC + \angle BOF = 360^\circ,$$

$$\text{化简, 得 } \angle BOF = \frac{1}{2}\theta,$$

$$\therefore IJ \parallel OB, IL \parallel OF,$$

$$\therefore \angle JIS = \angle BOS, \quad \angle LIS = \angle FOS,$$

$$\therefore \angle JIS + \angle LIS = \angle FOS + \angle BOS, \text{ 即 } \angle JIL = \angle BCF,$$

$$\therefore \angle JIL = \frac{1}{2} \theta.$$

二、填空题 (本大题共 12 题, 每题 2 分, 共 24 分)

7. “3 与 x 的和不大于 1” 用不等式可表示为_____.

【答案】

$$3+x \leq 1$$

【解析】

【详解】解: “3 与 x 的和不大于 1” 用不等式表示为 $3+x \leq 1$.

8. 若式子 $\sqrt{2x+1}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围为_____.

【答案】 $x \geq -\frac{1}{2}$

【解析】

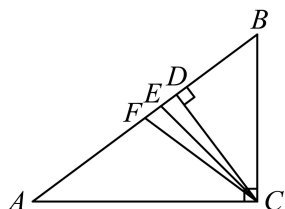
【分析】此题考查了二次根式有意义的条件, 根据二次根式有意义的条件得到 $2x+1 \geq 0$, 解不等式即可得到答案.

【详解】解: 由题意可得 $2x+1 \geq 0$,

$$\text{解得 } x \geq -\frac{1}{2}.$$

$$\text{故答案为: } x \geq -\frac{1}{2}.$$

9. 已知: 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, CD 、 CF 分别是斜边 AB 上的高和中线, CE 是 $\angle ACB$ 的平分线, $BD = 3$, $BC = 5$, $CD = 4$, 则点 B 到直线 CD 的距离为_____.



【答案】

$$3$$

【解析】

【详解】根据题意, $\because CD$ 是斜边 AB 上的高,

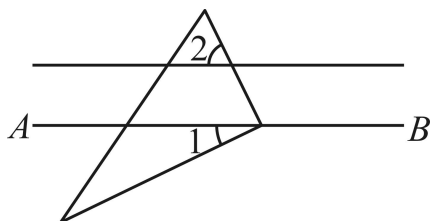
$\therefore CD \perp AB$ ，垂足为 D ，即 $BD \perp CD$ ，

$\therefore B$ 到直线 CD 的垂线段就是 BD 。

$\because BD = 3$ ，

$\therefore$ 点 B 到直线 CD 的距离为 3。

10. 如图，将三角板的直角顶点放在两条平行线中的直线 AB 上，若 $\angle 1 = 26^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数为_____。

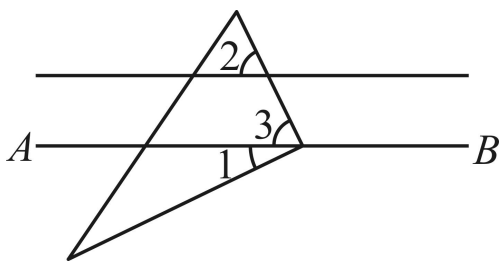


【答案】

64° ## 64 度

【解析】

【详解】解：如图，



因为三角板的直角顶点在直线 AB 上，

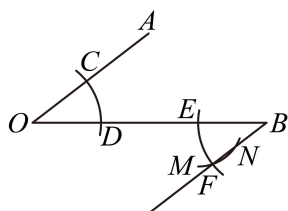
所以 $\angle 1$ 与 $\angle 3$ 互余，即 $\angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$ ，

因为 $\angle 1 = 26^\circ$ ，所以 $\angle 3 = 90^\circ - 26^\circ = 64^\circ$ ，

因为两条直线平行，所以 $\angle 2 = \angle 3$ （两直线平行，内错角相等），

所以 $\angle 2 = 64^\circ$ 。

11. 现有直线 OA 和直线外一点 B ，如图是小明同学利用“过直线外一点作已知直线的平行线”的作图痕迹，请问该同学这样作平行线依据的判定定理是：_____。



【答案】同位角相等，两直线平行

【解析】

【详解】解：观察作图痕迹可知，该同学作出的图形中，上方直线与截线所成的角等于下方直线与截线所成的角，这两个角在截线的同侧，并且都在被截直线的上方，

∴这两个角是一组同位角，

∴作图保证了这两个同位角相等，

∴该同学这样作平行线依据的判定定理是同位角相等，两直线平行.

12. 化简: $\frac{\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 $3\sqrt{2}-4$

【解析】

【详解】解: $\frac{\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(3-2\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{3^2-(2\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}-4.$

13. 不等式 $x+3 < \sqrt{2}x$ 的解集是_____.

【答案】 $x > 3\sqrt{2}+3$

【解析】

【分析】按照移项、合并同类项、化系数为1的步骤求解，最后对结果进行分母有理化即可.

【详解】解: $x+3 < \sqrt{2}x$,

$$x - \sqrt{2}x < -3,$$

$$(1 - \sqrt{2})x < -3,$$

因为 $1 - \sqrt{2} < 0$,

$$\therefore x > \frac{-3}{1 - \sqrt{2}},$$

$$x > \frac{-3(1 + \sqrt{2})}{(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})},$$

$$x > 3\sqrt{2} + 3.$$

14. 不等式组 $\begin{cases} \frac{2x+1}{3} > \frac{x}{2} \\ 4x < 3x+2 \end{cases}$ 解集是_____.

【答案】

$$-2 < x < 2$$

【解析】

【分析】分别求出不等式组中每个一元一次不等式的解集，根据一元一次不等式组解集的确定原则，得到不等式组的解集即可.

【详解】解： $\begin{cases} \frac{2x+1}{3} > \frac{x}{2} \text{ ①} \\ 4x < 3x+2 \text{ ②} \end{cases}$,

解不等式 ①，不等式两边同乘 6 得 $2(2x+1) > 3x$,

去括号得 $4x+2 > 3x$,

移项合并同类项得 $x > -2$;

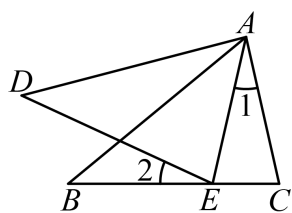
解不等式 ②，移项得 $4x-3x < 2$,

合并同类项得 $x < 2$,

$\therefore$ 不等式组的解集为 $-2 < x < 2$.

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 中， E 在 BC 边上， $AD = AB, AE = AC, DE = BC$ ，若 $\angle 1 = 25^\circ$,

$\angle B = 40^\circ$ 则 $\angle 2$ 的度数为_____.



【答案】

25°

【解析】

【详解】解：在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 中，

$$\begin{cases} AD = AB \\ AE = AC \\ DE = BC \end{cases}$$

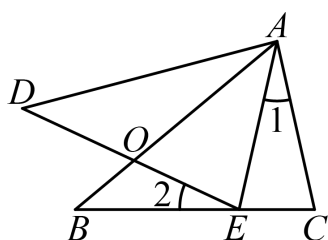
$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADE (\text{SSS})$$

$$\therefore \angle D = \angle B, \angle DAE = \angle BAC$$

$$\because \angle DAE = \angle DAB + \angle BAE, \angle BAC = \angle 1 + \angle BAE$$

$$\therefore \angle DAB = \angle 1 = 25^\circ,$$

设 AB 与 DE 相交于点 O ,



在 $\triangle AOD$ 中,

$$\angle D + \angle DAB + \angle AOD = 180^\circ,$$

在 $\triangle BOE$ 中, $\angle B + \angle 2 + \angle BOE = 180^\circ$,

$$\because \angle AOD = \angle BOE,$$

$$\therefore \angle D + \angle DAB = \angle B + \angle 2,$$

$$\because \angle D = \angle B,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle DAB = 25^\circ$$

16. 任何实数 m , 可用 $[m]$ 表示不超过 m 的最大整数, 如 $[5] = 5$, $[\pi] = 2$, 现对 35 进行如下操作:

$$35 \xrightarrow{\text{第一次}} [\sqrt{35}] = 5 \xrightarrow{\text{第二次}[\sqrt{5}]} = 2 \xrightarrow{\text{第二次}[\sqrt{2}]} = 1, \text{这样对 35 只需进行 3 次操作后变为 1. 那么对 520 需进行_____}$$

次操作后变为 1.

【答案】 4

【解析】

【分析】 本题考查取整函数与算术平方根的运算. 按照题目定义的操作规则, 对 520 连续进行取平方根后向下取整的操作, 直至结果为 1, 统计操作次数即可.

【详解】 由于 $22^2 < 520 < 23^2$, $\therefore 22 < \sqrt{520} < 23$

故第 1 次操作: $[\sqrt{520}] = 22$,

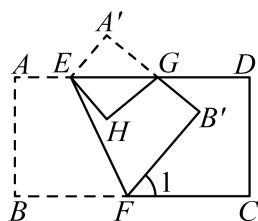
同理, 第 2 次操作: $[\sqrt{22}] = 4$,

第3次操作: $[\sqrt{4}] = [2] = 2$,

第4次操作: $[\sqrt{2}] = [1.414...] = 1$,

$\therefore$ 对520进行4次操作后变为1.

17. 如图, 将长方形纸片 $ABCD$ 沿 EF 折叠后, 点 A , B 分别落在 A' , B' 的位置, 再沿 AD 边将 $\angle A'$ 折叠到 $\angle H$ 处, 已知 $\angle 1 = 50^\circ$, 则 $\angle FEH = \underline{\hspace{2cm}}$.

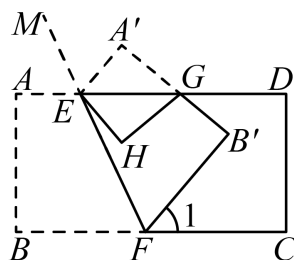


【答案】 15°

【解析】

【分析】 延长 FE 到点 M , 根据折叠的性质, 得 $\angle AEM = \angle A'EM$, $\angle BFE = \angle B'FE$, 再根据折叠的性质, 平行线的性质, 邻补角的定义, 角的和差计算即可.

【详解】 解: 如图, 延长 FE 到点 M ,



$\because$ 将长方形纸片 $ABCD$ 沿 EF 折叠, $\angle 1 = 50^\circ$,

$\therefore \angle AEM = \angle A'EM$, $\angle BFE = \angle B'FE$, $AD \parallel BC$,

$\therefore \angle AEM = \angle BFE$,

$\therefore \angle BFE = \angle B'FE = \angle AEM = \angle A'EM$,

$\therefore \angle AEA' = \angle BFB'$, $\angle BFE = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle 1) = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 50^\circ) = 65^\circ$,

$\therefore \angle A'EG = 180^\circ - \angle AEA' = 180^\circ - \angle BFB' = \angle 1 = 50^\circ$,

$\because$ 沿 AD 边将 $\angle A'$ 折叠到 $\angle H$ 处,

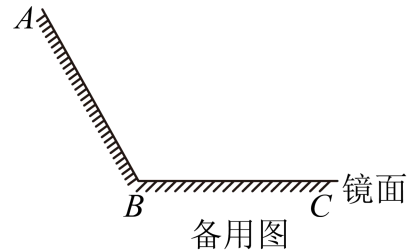
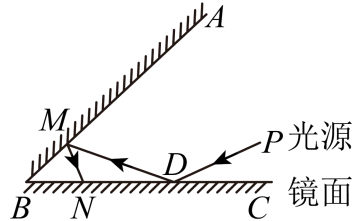
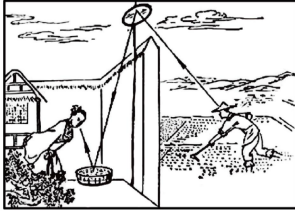
$\therefore \angle HEG = \angle A'EG = 50^\circ$,

$\because AD \parallel BC$,

$\therefore \angle FEG = \angle BFE = 65^\circ$,

$$\therefore \angle FEH = \angle FEG - \angle HEG = 65^\circ - 50^\circ = 15^\circ.$$

18. 汉代初期《淮南万毕术》记载了我国古代学者在科学领域的成就. 如图是古人利用光的反射定律改变光路的方法. 在综合实践课上, 小明固定镜面 BC , 将镜面 BA 绕点 B 逆时针转动 ($30^\circ < \angle ABC < 180^\circ$), 在光源 P 处发出的一束光射到水平镜面 BC 后沿 DM 反射到镜面 AB 上, 随后沿 MN 反射出去. 已知 $\angle PDC = 28^\circ$, 当反射光线 MN 所在直线与镜面 BC 所在直线的夹角为 60° 时, $\angle ABC =$ ____度



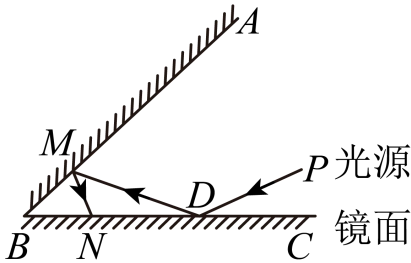
【答案】46 或 136

【解析】

【分析】分 $\angle ABC$ 为锐角和钝角时的情况, 利用光线反射的角度关系和三角形内角和定理及外角定理, 分别计算即可.

【详解】解: 由题意可知, $\angle MDN = \angle PDC = 28^\circ$,

当 $\angle ABC$ 为锐角时, $\angle MNB = 60^\circ$, 如图,

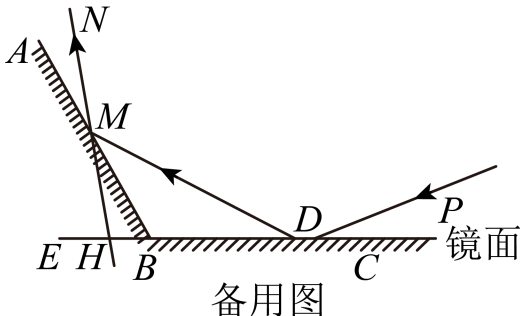


$$\therefore \angle NMD = \angle MNB - \angle MDN = 60^\circ - 28^\circ = 32^\circ,$$

$$\therefore \angle BMN = \angle AMD = \frac{180^\circ - \angle NMD}{2} = 74^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 180^\circ - \angle BMN - \angle MNB = 180^\circ - 74^\circ - 60^\circ = 46^\circ;$$

当 $\angle ABC$ 为钝角时, 直线 MN 交直线 BC 于 H , $\angle MHE = 60^\circ$, 如图,



$$\therefore \angle HMD = \angle MHE - \angle MDH = 60^\circ - 28^\circ = 32^\circ,$$

$$\therefore \angle BMD = \angle AMN, \quad \angle AMN = \angle HMB$$

$$\therefore \angle BMD = \frac{1}{2} \angle HMD = 16^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 180^\circ - \angle BMD - \angle MDN = 180^\circ - 16^\circ - 28^\circ = 136^\circ.$$

三、简答题（本大题共 3 题，每题 6 分，共 18 分）

19. 计算: $\sqrt{12} + \sqrt{27} + (\sqrt{3} - 1)^0 + |2 - \sqrt{3}|$

【答案】

$$4\sqrt{3} + 3$$

【解析】

【详解】解：原式 $= 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 1 + (2 - \sqrt{3})$

$$= 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 1 + 2 - \sqrt{3}$$

$$= 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - \sqrt{3} + 3$$

$$= 4\sqrt{3} + 3.$$

20. 化简: $2\sqrt{ab} - \frac{3b}{2}\sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{2a}{3}\sqrt{\frac{b}{a}} (a > 0, b > 0)$

【答案】

$$-\frac{1}{6}\sqrt{ab}$$

【解析】

【详解】解：已知 $a > 0, b > 0$,

化简原式中各项非最简二次根式:

$$\frac{3b}{2}\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{3b}{2} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{b} = \frac{3}{2}\sqrt{ab}$$

$$\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{2a}{3} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{a} = \frac{2}{3}\sqrt{ab}$$

将化简结果代入原式计算

$$\text{原式} = 2\sqrt{ab} - \frac{3}{2}\sqrt{ab} - \frac{2}{3}\sqrt{ab} = \left(2 - \frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right)\sqrt{ab} = -\frac{1}{6}\sqrt{ab}$$

21. 化简: $\frac{2}{b}\sqrt{ab^5c^3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\sqrt{a^3b}\right) \div \left(3\sqrt{\frac{b}{ac}}\right) (a>0, b>0, c>0)$

【答案】

$$-a^2bc^2\sqrt{ab}$$

【解析】

【详解】 解 $\because a>0, b>0, c>0,$

$$\begin{aligned}\therefore \text{原式} &= \left[\frac{2}{b} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \div 3 \right] \cdot \sqrt{ab^5c^3 \cdot a^3b \div \frac{b}{ac}} \\ &= -\frac{1}{b} \cdot \sqrt{ab^5c^3 \cdot a^3b \cdot \frac{ac}{b}} \\ &= -\frac{1}{b} \cdot \sqrt{a^5b^5c^4} \\ &= -\frac{1}{b} \cdot a^2b^2c^2\sqrt{ab} \\ &= -a^2bc^2\sqrt{ab}\end{aligned}$$

四、解答题 (本大题共 5 题, 22-23 每题 7 分, 24 题 8 分, 25 题 10 分, 26 题 8 分, 共 40 分)

22. 若关于 x 的方程 $\frac{x}{2} + \frac{6m-1}{3} = x + \frac{3m-1}{2}$ 的解大于 1 小于 3, 求 m 的取值范围.

【答案】 $\frac{2}{3} < m < \frac{8}{3}$

【解析】

【详解】 解: 去分母, 得: $3x + 2(6m-1) = 6x + 3(3m-1),$

去括号, 得: $3x + 12m - 2 = 6x + 9m - 3,$

移项, 得: $3x - 6x = 9m - 3 - 12m + 2,$

合并同类项, 得: $-3x = -3m - 1,$

系数化为 1, 得: $x = \frac{3m+1}{3},$

$\because$ 方程的解大于 1 小于 3,

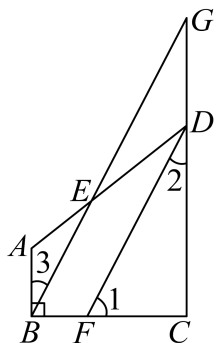
$$\therefore 1 < \frac{3m+1}{3} < 3,$$

去分母, 得: $3 < 3m+1 < 9,$

移项, 得: $2 < 3m < 8,$

系数化为 1, 得: $\frac{2}{3} < m < \frac{8}{3}$.

23. 如图, 已知 $AB \perp BC$, 垂足为 B , $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$, $\angle 2 = \angle 3$. 证明: $BE \parallel DF$.



【答案】见解析

【解析】

【分析】根据平行线的判定和性质进行证明即可.

【详解】证明: $\because \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$,

$\therefore \angle C = 90^\circ$,

$\because AB \perp BC$,

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABC + \angle C = 180^\circ$,

$\therefore AB \parallel CG$,

$\therefore \angle 3 = \angle G$,

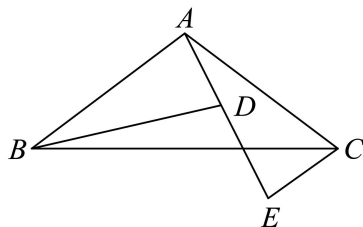
又 $\because \angle 2 = \angle 3$,

$\therefore \angle 2 = \angle G$,

$\therefore BE \parallel DF$.

24. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, A, D, E 三点在同一直线上, $\angle BAD = \angle ACE$,

$\angle BAC = \angle ABD + \angle BAD$



(1) 求证: $\triangle BAD \cong \triangle ACE$;

(2) 猜想线段 BD , CE , DE 之间的数量关系并证明.

【答案】(1) 见解析 (2) $BD = DE + CE$

【解析】

【分析】(1) 利用 ASA 可证 $\triangle BAD \cong \triangle ACE$;

(2) 根据全等三角形的性质可证 $AE = BD$, $AD = EC$, 根据 $AE = AD + DE$ 可知 $BD = DE + CE$.

【小问 1 详解】

证明: $\because \angle BAC = \angle BAD + \angle EAC$, $\angle BAC = \angle ABD + \angle BAD$,

$\therefore \angle EAC = \angle ABD$,

在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle ACE$ 中,
$$\begin{cases} \angle EAC = \angle ABD \\ AC = AB \\ \angle ACE = \angle BAD \end{cases},$$

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle ACE (ASA)$;

【小问 2 详解】

解: $\because \triangle BAD \cong \triangle ACE$,

$\therefore AE = BD$, $AD = EC$,

$\because AE = AD + DE$,

$\therefore BD = DE + CE$.

25. 如何将任意一个四边形剪开拼成一个三角形?

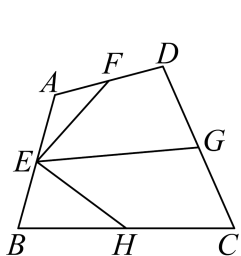


图1

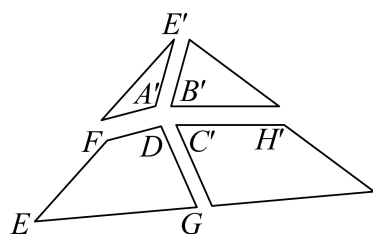


图2

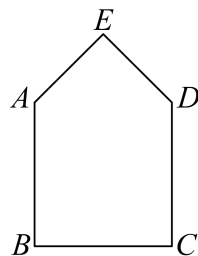


图3

(1) 操作: 如图1, 依次取四边形 $ABCD$ 四条边的中点 E 、 F 、 G 、 H , 连接 EF 、 EG 、 EH , 沿着 EF 、 EG 、 EH 把四边形剪开成 2 个三角形, 2 个四边形; 右上角的四边形 $EFDG$ 保持不动, 把左上角的三角形绕点 F 旋转 180° , 把右下角的四边形绕点 G 旋转 180° , 把左下角三角形平移使得点 B 与点 D 重合. 通过以上操作, 得到的图形就是拼接之后形成的三角形.

通过以上操作, 若拼得的三角形是三边长均为 2 的三角形, 则 $EF =$ _____;

(2) 思考: 以上操作中, 如果 $\angle FEG = \angle BEH = 60^\circ$, $\angle AEF = 20^\circ$, 则拼接之后形成的三角形的三个内角分别是 60° 、_____、_____;

(3) 应用: 以上操作引起了同学们极大的兴趣, 大家尝试把五边形拼成三角形. 小马虎仿照前面操作: 把

一边中点 O 和其余四边中点分别连起来，得到 2 个三角形、3 个四边形，通过旋转平移拼三角形，他（能，不能）拼成三角形.

(4) 小牛试着把特殊的五边形拼成一个特殊三角形；如图 3，五边形可以看作由一个正方形和等腰直角三角形 ($AE = ED$) 重合一边组成的五边形；小牛取 DC 中点 F ，连接 BE ，通过分割、旋转三角形把五边形拼成了一个以 BE 为腰的等腰直角三角形. 请参考小牛的做法，设计一个把图 3 拼成三角形的方法. (直接作图，不需要写做法)

【答案】(1) 1

(2) 40° ; 80°

(3) 见解析 (4) 图见解析

【解析】

【分析】(1) 利用旋转后线段共线的性质，通过拼接三角形边长与 EF 的倍数关系，算出 $EF = 1$ ；

(2) 利用平角和三角形内角和，结合已知角度，算出拼接后三角形的另外两个内角为 40° 、 80° ；

(3) 分析五边形的分割拼接方式，发现无法实现无缝拼接，因此不能拼成三角形；

(4) 通过选取中点连线、分割旋转的方法，将五边形拼接成以 BE 为腰的等腰直角三角形

【小问 1 详解】

解： $\triangle AEF$ 绕 F 旋转 180° 后， EF 与旋转后的线段共线，

且总长度 $EE' = 2EF$ ，拼接后的三角形边长为 2， EE' 即为该边长，

$$\therefore EF = \frac{2}{2} = 1;$$

【小问 2 详解】

解： E 在 AB 边上， A, E, B 共线，

$$\text{故 } \angle GEH = 180^\circ - \angle AEF - \angle FEG - \angle BEH = 180^\circ - 20^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 40^\circ,$$

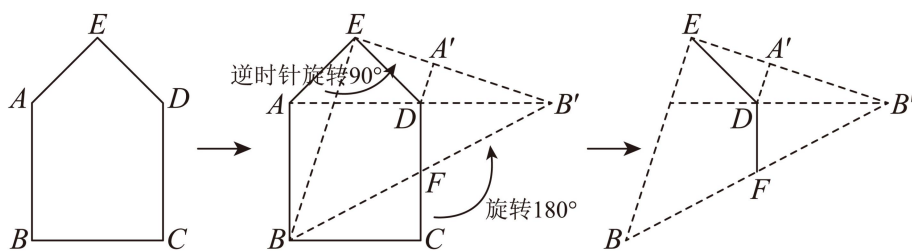
拼接后三角形的三个内角分别等于图 1 中的 $\angle FEG = 60^\circ$ 、 $\angle GEH = 40^\circ$ ，第三个内角为 $180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$.

【小问 3 详解】

解： 仿照四边形的操作，该分割方法旋转平移后，无法让所有顶点、边恰好拼接为三角形，因此不能拼成三角形；

【小问 4 详解】

解： 如图： $\triangle EBB'$ ，即：拼成三角形后的三角形.



26. 如图 1, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle ABC = \angle ACB$, D 、 E 分别在 AC 、 AB 上 (D 、 E 不与 A 重合)、 BD 、 CE 交于点 O .

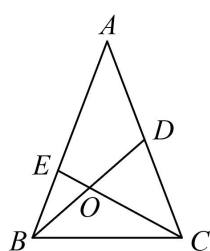


图1

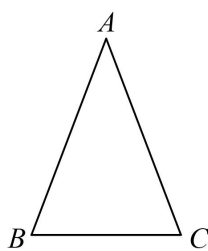


图2

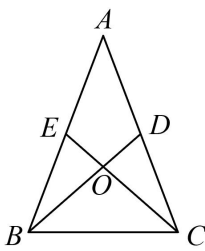
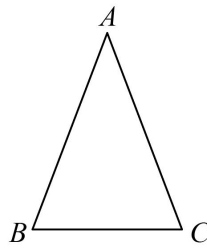


图3



备用图

(1) 若 $BD = CE$, 则 BE 与 CD 一定相等吗? 若不一定, 在图 2 中举出反例, 并简单说明 (不写作法, 保留痕迹).

(2) 如图 3, 若 $OD = OE$, 则 BO 与 OC 一定相等吗? 试用反证法给出证明.

(3) 若 $\triangle BCE$ 中有两角相等, $\triangle COD$ 中有两角相等, $\triangle BCD$ 中有两角相等, 直接写出 $\angle ABC$ 度数、 $\angle BEC$ 度数和 $\angle BDC$ 度数之和.

【答案】 (1) 不一定, 反例图见解析

(2) 一定相等, 见解析

(3) $\frac{2340^\circ}{11}$ 或 $\frac{1440^\circ}{7}$ 或 216° 或 $\frac{1620^\circ}{7}$

【解析】

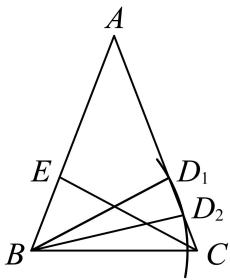
【分析】 (1) 当点 E 在 AB 上某个位置时, 以 B 为圆心, CE 为半径画弧与 AC 产生两个交点, 这两个交点即为点 D , 此时 $BE = CD_1$, 但 $BE \neq CD_2$;

(2) 假设 $OB \neq OC$, 这里不妨设 $OB > OC$, 在 OB 上截取 $OF = OC$, 连接 EF , 证明 $\triangle EOF \cong \triangle DOC$ (SAS), 然后根据全等三角形的性质, 三角形的外角性质进行证明即可;

(3) 分 9 种情况讨论, 根据三角形内角和以及三角形的外角性质列二元一次方程组求解即可.

【小问 1 详解】

解: 若 $BD = CE$, 则 BE 与 CD 不一定相等, 如图:



当点 E 在 AB 上某个位置时，以 B 为圆心， CE 为半径画弧与 AC 产生两个交点，这两个交点即为点 D ，此时 $BE = CD_1$ ，但 $BE \neq CD_2$ ，

故若 $BD = CE$ ，则 BE 与 CD 不一定相等；

【小问 2 详解】

解：若 $OD = OE$ ，则 BO 与 OC 一定相等，

证明：假设 $OB \neq OC$ ，这里不妨设 $OB > OC$ ，

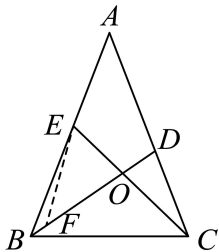
$$\therefore \angle OCB > \angle OBC,$$

$$\because \angle ABC = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle ABC - \angle OBC > \angle ACB - \angle OCB,$$

$$\therefore \angle EBF > \angle DCO,$$

在 OB 上截取 $OF = OC$ ，连接 EF ，



$$\because OD = OE, \angle EOF = \angle DOC$$

$$\therefore \triangle EOF \cong \triangle DOC (\text{SAS})$$

$$\therefore \angle EFO = \angle DCO,$$

$$\therefore \angle EBF > \angle EFO,$$

与 $\angle EFO > \angle EBF$ （三角形的一个外角大于任何一个与之不相邻的内角）矛盾，

故假设不成立，

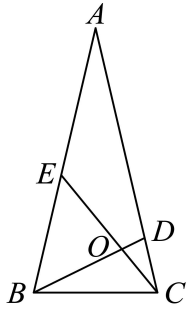
$$\therefore OB = OC;$$

若假设 $OB < OC$ 时，同理与三角形的外角性质矛盾，

$$\therefore OB = OC;$$

【小问3 详解】

解：①当 $\angle BEC = \angle BCE, \angle BDC = \angle BCD, \angle COD = \angle CDO$ 时，



$$\because \angle ABC = \angle ACB$$

$$\therefore \angle ABC = \angle BDC = \angle BCD = \angle COD$$

设 $\angle ABC = \angle BDC = \angle BCD = \angle COD = y$, $\angle OCD = x$

则在 $\triangle COD$ 中，由三角形内角和定理可得 $x + 2y = 180^\circ$

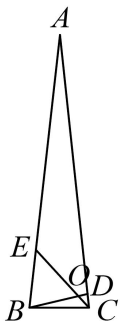
$$\therefore \angle BCE = \angle ACB - \angle OCD = y - x = \angle BEC ,$$

在 $\triangle BEC$ 中，由三角形内角和定理可得 $y + 2(y - x) = 180^\circ$,

$$\therefore \begin{cases} x + 2y = 180^\circ \\ y + 2(y - x) = 180^\circ \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = \frac{180^\circ}{7} \\ y = \frac{540^\circ}{7} \end{cases}$$

$$\therefore \angle ABC + \angle BEC + \angle BDC = \frac{540^\circ}{7} + \left(\frac{540^\circ}{7} - \frac{180^\circ}{7} \right) + \frac{540^\circ}{7} = \frac{1440^\circ}{7};$$

②当 $\angle BEC = \angle BCE, \angle BDC = \angle BCD, \angle DOC = \angle DCO$ 时，



$$\because \angle ABC = \angle ACB$$

$$\therefore \angle ABC = \angle BDC = \angle BCD$$

设 $\angle DOC = \angle DCO = x$, $\angle BCE = \angle BEC = y$

$$\therefore \angle ABC = \angle BDC = \angle BCD = x + y$$

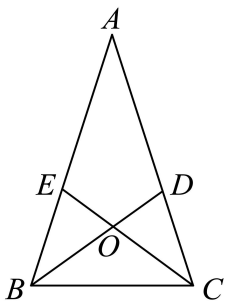
在 $\triangle DOC$ 和 BEC 中，由三角形内角和定理可得
$$\begin{cases} 2x + x + y = 180^\circ \\ x + y + 2y = 180^\circ \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 45^\circ \\ y = 45^\circ \end{cases},$$

此时 $\angle ABC = x + y = 90^\circ = \angle ABC$ ，不符合题意；

③当 $\angle BEC = \angle BCE, \angle BDC = \angle BCD, \angle ODC = \angle OCD$ 时，此时 O, B, E 重合，不符合题意；

④当 $\angle CBE = \angle CEB, \angle BDC = \angle BCD, \angle CDO = \angle COD$ 时，



$$\therefore \angle ABC = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \angle BEC = \angle CDO = \angle COD,$$

$$\text{设 } \angle DCO = x, \angle ABC = \angle ACB = \angle BEC = \angle CDO = \angle COD = y$$

则在 $\triangle CDO$ 中，由三角形内角和定理得 $x + 2y = 180^\circ$ ，则 $x = 180^\circ - 2y$

在 $\triangle BDC, \triangle CBE$ 中，由三角形内角和定理可得 $\angle DBC = \angle BCE = 180^\circ - 2y$

$$\therefore \angle DBC = \angle BCE = x,$$

$$\therefore \angle DOC = \angle DBC + \angle BCE = 2x,$$

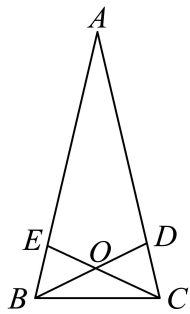
$$\therefore y = 2x,$$

$$\therefore \begin{cases} x + 2y = 180^\circ \\ y = 2x \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 36^\circ \\ y = 72^\circ \end{cases}$$

$$\therefore \angle ABC + \angle BEC + \angle BDC = 72^\circ + 72^\circ + 72^\circ = 216^\circ;$$

⑤当 $\angle CBE = \angle CEB, \angle BDC = \angle BCD, \angle DOC = \angle DCO$ 时，



$$\because \angle ABC = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \angle BEC = \angle CDO, \text{ 设 } \angle ABC = \angle ACB = \angle BEC = \angle CDO = y,$$

$$\angle DOC = \angle DCO = x$$

则在 $\triangle DCO$ 中, 由三角形内角和定理可得 $2x + y = 180^\circ$,

在 $\triangle BEC, \triangle BDC$ 中, 由三角形内角和定理可得 $\angle OBC = \angle OCB$

$$\because \angle OBC + \angle OCB = \angle DOC = x,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle OCB = \frac{1}{2}x,$$

在 $\triangle BCD$ 中, 由三角形内角和定理可得 $\frac{1}{2}x + 2y = 180^\circ$,

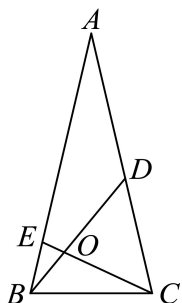
$$\therefore \begin{cases} 2x + y = 180^\circ \\ \frac{1}{2}x + 2y = 180^\circ \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = \frac{360^\circ}{7} \\ y = \frac{540^\circ}{7} \end{cases}$$

$$\therefore \angle ABC + \angle BEC + \angle BDC = \frac{540^\circ}{7} + \frac{540^\circ}{7} + \frac{540^\circ}{7} = \frac{1620^\circ}{7};$$

⑥当 $\angle CBE = \angle CEB, \angle BDC = \angle BCD, \angle ODC = \angle OCD$ 时, 此时 O, B, E 重合, 不符合题意;

⑦当 $\angle CBE = \angle CEB, \angle CBD = \angle CDB, \angle ODC = \angle OCD$ 时,



$$\therefore \angle ABC = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \angle CEB,$$

$$\text{设 } \angle ODC = \angle OCD = \angle CBD = x, \quad \angle BCE = y$$

$$\therefore \angle DOC = \angle OBC + \angle OCB = x + y, \quad \angle ACB = \angle ABC = \angle BEC = x + y$$

在 $\triangle DCO$ 中, 由三角形内角和定理可得 $x + y + x + x = 180^\circ$

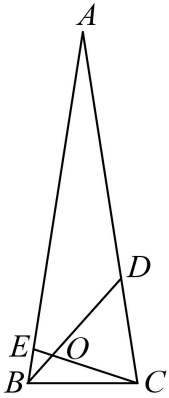
在 $\triangle CBE$ 中, 由三角形内角和定理可得 $y + (x + y) + (y + x) = 180^\circ$,

$$\therefore \begin{cases} x + y + x + x = 180^\circ \\ y + (x + y) + (y + x) = 180^\circ \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = \frac{360^\circ}{7} \\ y = \frac{180^\circ}{7} \end{cases}$$

$$\therefore \angle ABC + \angle BEC + \angle BDC = \left(\frac{360^\circ}{7} + \frac{180^\circ}{7} \right) \times 2 + \frac{360^\circ}{7} = \frac{1440^\circ}{7};$$

⑧当 $\angle BEC = \angle CBE, \angle CBD = \angle CDB, \angle DOC = \angle DCO$ 时,



设 $\angle CBD = \angle CDB = x, \angle DOC = \angle DCO = y$, 则 $\triangle CDO$ 中, 由三角形内角和定理可得 $x + 2y = 180^\circ$,

$$\therefore \angle BCE = \angle DOC - \angle CBD = y - x$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 180^\circ - \angle CBD - \angle CDB = 180^\circ - 2x,$$

$$\therefore \angle CEB = \angle CBE = 180^\circ - 2x,$$

在 $\triangle CBE$ 中, 由三角形内角和定理可得 $180^\circ - 2x + 180^\circ - 2x + y - x = 180^\circ$

$$\therefore \begin{cases} x + 2y = 180^\circ \\ 180^\circ - 2x + 180^\circ - 2x + y - x = 180^\circ \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = \frac{540^\circ}{11} \\ y = \frac{720^\circ}{11} \end{cases}$$

$$\therefore \angle ABC + \angle BEC + \angle BDC = \left(180^\circ - 2 \times \frac{540^\circ}{11}\right) \times 2 + \frac{540^\circ}{11} = \frac{2340^\circ}{11}$$

⑨ $\angle BEC = \angle CBE, \angle CBD = \angle CDB, \angle COD = \angle CDO$ 时, 此时 B, O, E 三点重合, 不符合题意,

综上: $\angle ABC$ 度数、 $\angle BEC$ 度数和 $\angle BDC$ 度数之和为 $\frac{2340^\circ}{11}$ 或 $\frac{1440^\circ}{7}$ 或 216° 或 $\frac{1620^\circ}{7}$.