

初一数学

一、选择题

1. 已知 $a < b$ ，下列不等式一定成立的是 ()

- A. $a^2 < b^2$ B. $2a < 2b$ C. $|a| > |b|$ D. $-2a < -2b$

【答案】B

【解析】

【分析】通过不等式性质或举反例判断各选项正误.

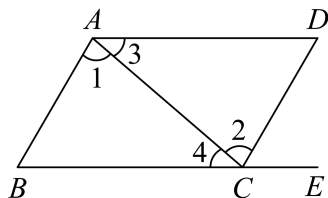
【详解】解：A、已知 $a < b$ ，当 $a = -2$ ， $b = 1$ ，满足 $a < b$ ，此时 $a^2 = 4 > b^2 = 1$ ，不等式不成立，故 A 错误；

B、已知 $a < b$ ，不等式两边同时乘正数 2，不等号方向不变，可得 $2a < 2b$ ，不等式一定成立，故 B 正确；

C、已知 $a < b$ ，当 $a = 1$ ， $b = 2$ 时，满足 $a < b$ ，此时 $|a| = 1 < |b| = 2$ ，不等式不成立，故 C 错误；

D、已知 $a < b$ ，不等式两边同时乘负数 -2 ，不等号方向改变，可得 $-2a > -2b$ ，不等式不成立，故 D 错误.

2. 如图，已知四边形 $ABCD$ ，点 E 在 BC 延长线上，连接 AC ，则下列条件中，能判定 $AD \parallel BC$ 的是 ()



- A. $\angle 1 = \angle 2$ B. $\angle 3 = \angle 4$
C. $\angle D + \angle DAB = 180^\circ$ D. $\angle B = \angle DCE$

【答案】B

【解析】

【分析】依据平行线的判定方法进行判断，即可得出结论.

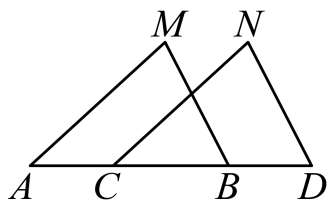
【详解】解：若 $\angle 1 = \angle 2$ ，则 $AB \parallel CD$ ，故 A 选项不合题意；

若 $\angle 3 = \angle 4$ ，则 $AD \parallel BC$ ，故 B 选项符合题意；

若 $\angle D + \angle DAB = 180^\circ$ ，则 $AB \parallel CD$ ，故 C 选项不合题意；

若 $\angle B = \angle DCE$ ，则 $AB \parallel CD$ ，故 D 选项不合题意.

3. 如图, 已知 $\triangle ABM$ 和 $\triangle CDN$ 的顶点 A 、 C 、 B 、 D 在同一直线上, 已知 $MA = NC$, $\angle MAB = \angle NCD$, 下列哪个条件不能判定 $\triangle ABM \cong \triangle CDN$ ()



- A. $\angle M = \angle N$ B. $AC = BD$ C. $MB \parallel ND$ D. $BM = DN$

【答案】D

【解析】

【分析】根据已知条件结合各选项提供的条件, 利用全等三角形的判定定理 (SSS、SAS、ASA、AAS 和 HL) 进行判断即可, 注意 “AAA、SSA” 不能判定三角形全等.

【详解】解: 已知 $MA = NC$, $\angle MAB = \angle NCD$

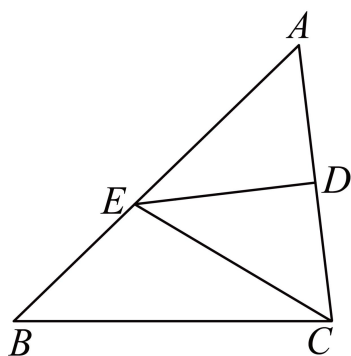
对于 A, 添加 $\angle M = \angle N$, 根据 ASA 可判定 $\triangle ABM \cong \triangle CDN$, 故不符合题意;

对于 B, 添加 $AC = BD$, $\because AC = BD \therefore AC + CB = BD + CB$, 即 $AB = CD$, 根据 SAS 可判定 $\triangle ABM \cong \triangle CDN$, 故不符合题意;

对于 C, 添加 $MB \parallel ND$, $\therefore \angle MBA = \angle D$, 根据 AAS 可判定 $\triangle ABM \cong \triangle CDN$, 故不符合题意;

对于 D, 添加 $BM = DN$, 此时为两边及其中一边的对角对应相等 (SSA), 不能判定 $\triangle ABM \cong \triangle CDN$, 故符合题意.

4. 如图, DE 是 $\triangle ABC$ 中 AC 边的垂直平分线, 若 $BC = 8$, $AB = 10$, $AC = 7$, 则 $\triangle EBC$ 的周长是 ()



- A. 15 B. 16 C. 17 D. 18

【答案】D

【解析】

【分析】根据线段的垂直平分线的性质得到 $EA = EC$, 根据三角形的周长公式计算即可.

【详解】解: $\because DE$ 是 $\triangle ABC$ 中 AC 边的垂直平分线,

$\therefore EA = EC$,

又 $\because BC = 8, AB = 10,$

$\therefore \triangle EBC$ 的周长 $= BC + BE + EC = BC + BE + EA = BC + BA = 18,$

故选: D.

【点睛】 本题考查的是线段的垂直平分线的性质, 掌握线段的垂直平分线上的点到线段的两个端点的距离相等是解题的关键.

5. 下列命题:

①线段垂直平分线上的任意一点到线段两个端点的距离相等;

②全等三角形的周长相等;

③在同一个三角形中, 大边对大角;

④同旁内角互补, 两直线平行;

其逆命题为真命题的是 ()

A. ①③④

B. ①②④

C. ②③④

D. ①②③

【答案】 A

【解析】

【分析】 先写出每个命题的逆命题, 再根据初中几何定理判断逆命题的真假, 即可得到结果.

【详解】 解: ①原命题: 线段垂直平分线上的任意一点到线段两个端点的距离相等; 逆命题: 到线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上; 该逆命题为真命题;

②原命题: 全等三角形的周长相等; 逆命题: 周长相等的三角形是全等三角形; 举例: 边长为 3, 4, 5 的三角形和边长为 4, 4, 4 的三角形周长都是 12, 但二者不全等, 因此该逆命题为假命题;

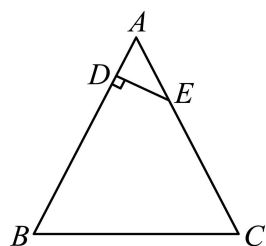
③原命题: 在同一个三角形中, 大边对大角; 逆命题: 在同一个三角形中, 大角对大边; 该逆命题为真命题;

④原命题: 同旁内角互补, 两直线平行; 逆命题: 两直线平行, 同旁内角互补; 该逆命题为真命题;

综上, 逆命题为真命题的是①③④,

故选: A.

6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = \angle C = 60^\circ$, 点 D 在 AB 边上, $DE \perp AB$, 并与 AC 边交于点 E . 如果 $AD = 1$, $BC = 6$, 那么 CE 等于 ()



A. 5

B. 4

C. 3

D. 2

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题主要考查了等边三角形的性质与判定，含 30° 角的直角三角形的性质，先证明 ABC 是等边三角形，得到 $AC = BC = 6$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，则可求出 $\angle AED = 30^\circ$ ，进而得到 $AE = 2AD = 2$ ，则 $CE = AC - AE = 4$ ．

【详解】 解： $\because \angle B = \angle C = 60^\circ$ ，

$\therefore ABC$ 是等边三角形，

$\therefore AC = BC = 6$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，

$\because DE \perp AB$ ，

$\therefore \angle AED = 30^\circ$ ，

$\therefore AE = 2AD = 2$ ，

$\therefore CE = AC - AE = 4$ ，

故选： B．

二、填空题

7. 不等式 $\frac{x-2}{3} > 1$ 的解集为_____．

【答案】 $x > 5$

【解析】

【详解】 解： $\frac{x-2}{3} > 1$ ，

$x - 2 > 3$

$x > 3 + 2$

$x > 5$ ，

故答案为： $x > 5$ ．

8. 在 ABC 中，若 $\angle A > \angle B$ ，则 $BC > AC$ ，其依据是_____．

【答案】

在同一个三角形中，大角对大边

【解析】

【详解】 解： 在 $\triangle ABC$ 中，边 BC 所对的角为 $\angle A$ ，边 AC 所对的角为 $\angle B$ ，由 $\angle A > \angle B$ 可推出 $BC > AC$ ，其依据是三角形的边角基本性质，即在同一个三角形中，大角对大边，

故答案为： 在同一个三角形中，大角对大边．

9. 一个等腰三角形的两边长分别为 4cm 和 9cm, 则它的周长为__cm.

【答案】 22

【解析】

【分析】 底边可能是 4, 也可能是 9, 分类讨论, 去掉不合条件的, 然后可求周长.

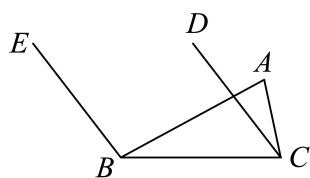
【详解】 解: ①当腰是 4cm, 底边是 9cm 时: 不满足三角形的三边关系, 因此舍去.

②当底边是 4cm, 腰长是 9cm 时, 能构成三角形, 则其周长= $4+9+9=22$ cm.

故填 22.

【点睛】 本题考查了等腰三角形的性质和三角形的三边关系; 已知没有明确腰和底边的题目一定要想到两种情况, 分类进行讨论, 还应验证各种情况是否能构成三角形进行解答.

10. 如图, 已知 $BE \parallel CD$, $\angle EBA = 98^\circ$, $\angle DCA = 25^\circ$, 则 $\angle A =$ _____度.



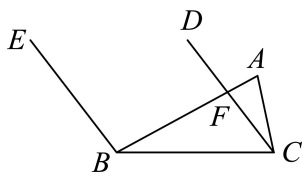
【答案】

73

【解析】

【分析】 设 CD 与 AB 交于点 F , 根据平行线的性质得 $\angle EBA = \angle BFC = 98^\circ$, 再根据外角的性质即可求解.

【详解】 解: 如图, 设 CD 与 AB 交于点 F ,



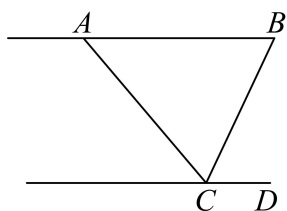
$\because BE \parallel CD$,

$\therefore \angle EBA = \angle BFC = 98^\circ$.

$\because \angle BFC = \angle DCA + \angle A$,

$\therefore \angle A = \angle BFC - \angle DCA = 98^\circ - 25^\circ = 73^\circ$.

11. 如图, 已知 $AB \parallel CD$, $AB = AC$, 若 $\angle BCD = 65^\circ$, 则 $\angle BAC =$ _____度.



【答案】 50

【解析】

【分析】由平行线的性质得到 $\angle ABC = \angle BCD = 65^\circ$ ，由 $AB = AC$ ，得到 $\angle ABC = \angle ACB = 65^\circ$ ，最后根据三角形的内角和即可求解。

【详解】解： $\because AB \parallel CD$ ， $\angle BCD = 65^\circ$ ，

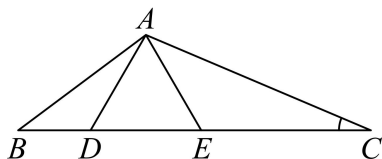
$$\therefore \angle ABC = \angle BCD = 65^\circ,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 65^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB = 180^\circ - 65^\circ - 65^\circ = 50^\circ.$$

12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAD = \angle C$ ， $\triangle ADE$ 是等边三角形，则 $\angle BAC =$ _____ 度.



【答案】 120

【解析】

【分析】根据等边三角形的性质可得 $\angle ADE = \angle DAE = \angle AED = 60^\circ$ ，根据三角形的外角性质得到 $\angle B + \angle BAD = \angle ADE = 60^\circ$ ， $\angle C + \angle CAE = \angle AED = 60^\circ$ ，结合 $\angle BAD = \angle C$ ，推出 $\angle B = \angle CAE$ ，在 $\triangle ABC$ 中，根据三角形的内角和定理求出 $\angle BAD + \angle CAE = 60^\circ$ ，即可求解。

【详解】解： $\because \triangle ADE$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle ADE = \angle DAE = \angle AED = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle B + \angle BAD = \angle ADE = 60^\circ, \quad \angle C + \angle CAE = \angle AED = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle B + \angle BAD = \angle CAE + \angle C,$$

$$\because \angle BAD = \angle C,$$

$$\therefore \angle B = \angle CAE,$$

$$\therefore \angle B + \angle BAE + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle B + \angle BAD + \angle DAE + \angle CAE + \angle C = 180^\circ$$

$$2\angle BAD + 2\angle CAE + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\angle BAD + \angle CAE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle BAD + \angle CAE + \angle DAE = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ,$$

故答案为：120.

13. $\triangle ABC$ 中， AB 与 AC 这两条边上的高所在直线的夹角为 50 度，那么 $\angle BAC =$ _____ 度.

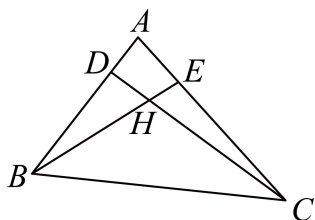
【答案】

50 或 130

【解析】

【分析】本题需要分 $\angle BAC$ 为锐角和钝角两种情况讨论，结合直角三角形两锐角互余的性质，四边形的内角和，求解角度.

【详解】解：①当 $\angle BAC$ 为锐角时，设 AB 边上的高为 CD ， AC 边上的高为 BE ， CD 与 BE 交于点 H ，



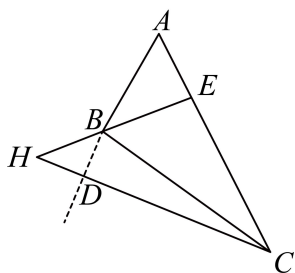
由题意得，两条高所在直线的夹角 $\angle DHE = 50^\circ$ ，

$$\because CD \perp AB, BE \perp AC,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 360^\circ - \angle DHE - \angle ADH - \angle AEH = 360^\circ - 50^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 130^\circ.$$

②当 $\angle BAC$ 为钝角时，设 AB 边上的高 CD 与 AC 边上的高 BE 交于点 H ，



由题意得 $\angle H = 50^\circ$ ，

$$\because CD \perp AB, BE \perp AC,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle ADH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle HBD,$$

$$\therefore \angle H = \angle BAC = 50^\circ.$$

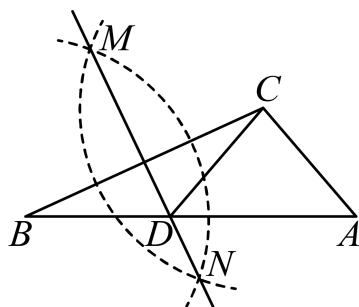
综上, $\angle BAC$ 的度数为 50° 或 130° .

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 按以下步骤作图:

①分别以 B 、 C 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}BC$ 的同样长为半径画弧, 两弧相交于两点 M 、 N .

②作直线 MN 交 AB 于点 D , 连接 CD .

若 $BD = AC$, $\angle A = 50^\circ$, 则 $\angle ACB$ 的度数为_____度.



【答案】 105

【解析】

【分析】由作图可得, MN 垂直平分 BC , 推出 $\angle B = \angle BCD$, $CD = AC$, 进而得到 $\angle ADC = \angle A = 50^\circ$, 再根据三角形的内角和定理求出 $\angle ACD = 80^\circ$, 由三角形的外角性质求出 $\angle BCD = 25^\circ$, 即可求解.

【详解】解: 由作图可得, MN 垂直平分 BC ,

$$\therefore BD = CD,$$

$$\therefore \angle B = \angle BCD,$$

$$\because BD = AC,$$

$$\therefore CD = AC,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle A = 50^\circ,$$

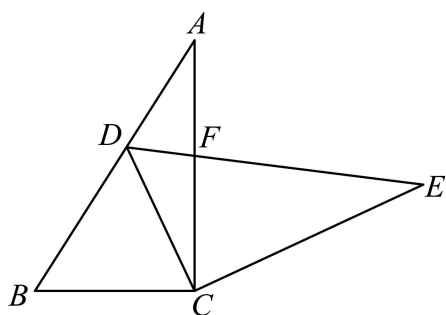
$$\therefore \angle ACD = 180^\circ - \angle A - \angle ADC = 80^\circ,$$

$$\because \angle B + \angle BCD = \angle ADC = 50^\circ, \angle B = \angle BCD,$$

$$\therefore \angle BCD = 25^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle ACD + \angle BCD = 80^\circ + 25^\circ = 105^\circ.$$

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 35^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 旋转, 使点 B 落在 AB 上的 D 点、点 A 落在点 E , 若 DE 、 AC 交于 F 点, 则 $\angle AFD =$ _____度.



【答案】

75

【解析】

【分析】根据直角三角形两锐角互余得 $\angle B = 55^\circ$ ，由旋转的性质得， $CB = CD$ ， $\angle B = \angle CDE = 55^\circ$ ，由等边对等角得 $\angle B = \angle CDB = 55^\circ$ ，再根据外角的性质即可求解.

【详解】解：在 ABC 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle A = 35^\circ$ ，

$\therefore \angle B = 55^\circ$ ，

由旋转的性质得， $CB = CD$ ， $\angle B = \angle CDE = 55^\circ$ ，

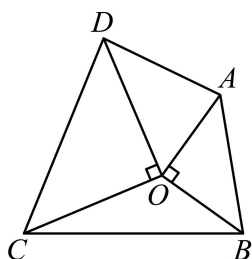
$\therefore \angle B = \angle CDB = 55^\circ$ ，

$\therefore \angle BDF = \angle CDB + \angle CDE = 55^\circ + 55^\circ = 110^\circ$ ，

$\because \angle BDF = \angle A + \angle AFD$ ，

$\therefore \angle AFD = \angle BDF - \angle A = 110^\circ - 35^\circ = 75^\circ$.

16. 如图， $\triangle ABO$ 和 $\triangle CDO$ 均为等腰直角三角形， $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$ ， $OA = OB = 2$ ， $OC = OD = 3$ ，连接 AD 、 BC ，那么以 AD 、 BC 、 $2OC$ 的长度为三边长的三角形的面积的最大值等于_____.



【答案】 6

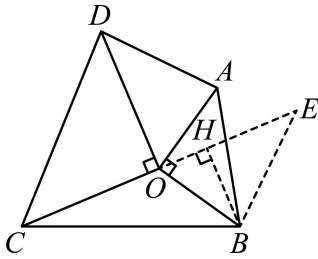
【解析】

【分析】延长 CO 到点 E ，使 $OE = CO = 3$ ，连接 BE ，作 $BH \perp OE$ 于点 H ，可得 $\triangle DOA \cong \triangle EOD$ (SAS)，进而得出 $AD = BE$ ，从而得到 $\triangle CBE$ 是以 AD 、 BC 、 $2OC$ 的长度为三边长，然后根据当 $BO \perp CE$ 时，

$S_{\triangle CBE}$ 最大求解即可.

【详解】解：延长 CO 到点 E ，使 $OE = CO = 3$ ，连接 BE ，作 $BH \perp OE$ 于点 H ，

$$\therefore CE = OE + CO = 2OC = 6,$$



$$\therefore \angle AOB = \angle COD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DOE = 180^\circ - \angle COD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DOE = \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DOE - \angle AOE = \angle AOB - \angle AOE,$$

$$\therefore \angle DOA = \angle EOB,$$

$$\therefore OD = OE = 3, OA = OB = 2$$

$$\therefore \triangle DOA \cong \triangle EOB (\text{SAS}),$$

$$\therefore AD = BE,$$

$\therefore \triangle CBE$ 是以 AD 、 BC 、 $2OC$ 的长度为三边长.

$$\therefore S_{\triangle CBE} = \frac{1}{2} CE \cdot BH = \frac{1}{2} \times 6BH = 3BH.$$

$$\therefore BH \leq OB,$$

$$\therefore \text{当 } BO \perp CE \text{ 时, } S_{\triangle CBE} \text{ 最大为: } 3 \times 2 = 6,$$

$\therefore$ 以 AD 、 BC 、 $2OC$ 的长度为三边长的三角形的面积的最大值等于 6.

三、解答题

17. 解不等式: $\frac{x+3}{5} < \frac{2x-5}{3} - 1.$

【答案】 $x > 7$

【解析】

【详解】解: $\frac{x+3}{5} < \frac{2x-5}{3} - 1$

$$3(x+3) < 5(2x-5) - 15$$

$$3x+9 < 10x-25-15$$

$$3x-10x < -25-15-9$$

$$-7x < -49$$

$$x > 7.$$

18. 为了建设美好家园, 提高垃圾分类意识, 某社区决定购买 A 、 B 两种型号的新型垃圾桶. 已知 B 型号的新型垃圾桶的单价比 A 型号的新型垃圾桶单价贵 40 元, 购买 2 个 A 型号的新型垃圾桶和购买 3 个 B 型号的新型垃圾桶共 370 元. 社区需要购买 A 、 B 两种型号的新型垃圾桶共 50 个, 且总费用不超过 4000 元.

(1) 求 A 、 B 两种型号的新型垃圾桶的单价;

(2) 社区最多能买几个 B 型号的新型垃圾桶?

【答案】 (1) A 型号的新型垃圾桶单价为 50 元, B 型号的新型垃圾桶单价为 90 元

(2) 社区最多能买 37 个 B 型号的新型垃圾桶

【解析】

【分析】 (1) 设 A 型号的新型垃圾桶单价为 x 元, 则 B 型号的新型垃圾桶单价为 $(x + 40)$ 元, 根据题意可列方程, 求解即可.

(2) 设购买 B 型号的新型垃圾桶 m 个, 则购买 A 型号的新型垃圾桶 $(50 - m)$ 个, 再根据总费用不超过 4000 元的条件列不等式, 结合 m 数量为非负整数的实际要求, 求出 B 型号的新型垃圾桶的最大购买数量.

【小问 1 详解】

解: 设 A 型号的新型垃圾桶单价为 x 元, 则 B 型号的新型垃圾桶单价为 $(x + 40)$ 元,

根据题意可得 $2x + 3(x + 40) = 370$,

展开整理得 $5x = 250$,

解得 $x = 50$,

则 $x + 40 = 50 + 40 = 90$,

答: A 型号的新型垃圾桶单价为 50 元, B 型号的新型垃圾桶单价为 90 元.

【小问 2 详解】

解: 设购买 B 型号的新型垃圾桶 m 个, 则购买 A 型号的新型垃圾桶 $(50 - m)$ 个,

根据题意, 总费用不超过 4000 元, 可得 $90m + 50(50 - m) \leq 4000$,

展开整理得 $40m \leq 1500$,

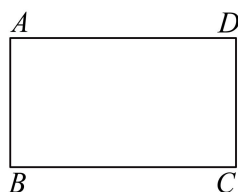
解得 $m \leq 37.5$,

$\because m$ 是非负整数,

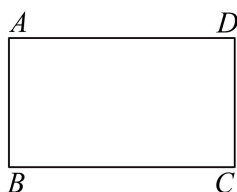
$\therefore m$ 的最大值为 37,

答: 社区最多能买 37 个 B 型号的新型垃圾桶.

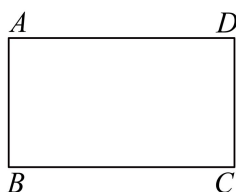
19. 在长和宽分别为 7 和 4 的长方形中作等腰三角形，使等腰三角形的一条边是长方形的长或宽，等腰三角形的第三个顶点在长方形的边上。用尺规作图的方法作出所有可能的情形，并直接写出所作三角形的面积。（注：形状相同的三角形按一种计算）



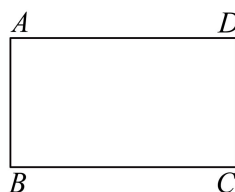
$$S = \underline{\hspace{2cm}}$$



$$S = \underline{\hspace{2cm}}$$



$$S = \underline{\hspace{2cm}}$$

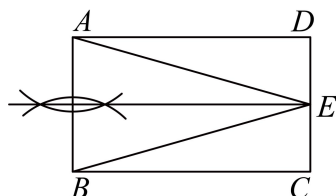


$$S = \underline{\hspace{2cm}}$$

【答案】见解析

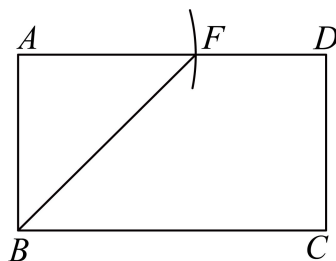
【解析】

【详解】解： $\triangle ABE$ 是等腰三角形， $AE = BE$ ，



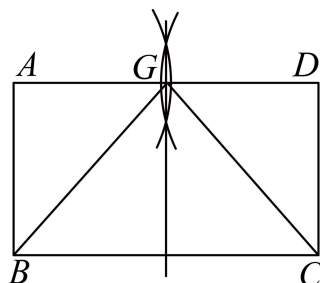
$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 7 = 14;$$

$\triangle ABF$ 是等腰三角形， $AB = AF$ ，



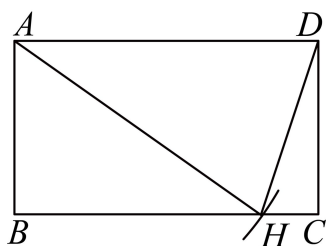
$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8;$$

$\triangle BCG$ 是等腰三角形， $BG = CG$ ，



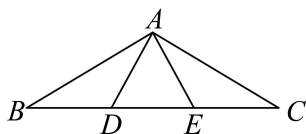
$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 7 = 14;$$

$\triangle BCG$ 是等腰三角形， $AD = AH$ ，



$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times 7 = 14.$$

20. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 、 E 是边 BC 上两点, 且 $AD = AE$, $\angle BAE = \angle CAD$.



(1) 求证: $\triangle ABE \cong \triangle ACD$;

(2) 如果 $\angle BAE = \angle CAD = 90^\circ$ 且 $AD = BD$, 试判断 $\triangle ADE$ 的形状, 并说明理由.

【答案】 (1) 见解析 (2) $\triangle ADE$ 是等边三角形. 理由见解析

【解析】

【分析】 (1) 由 $AD = AE$ 得到 $\angle AED = \angle ADE$, 再由 ASA 即可得到 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$;

(2) 由 $AD = BD$ 得到 $\angle BAD = \angle B$, 根据等角的余角相等求得 $\angle DAE = \angle DEA$, 得到 $AD = DE$, $AD = DE = AE$, 可得到 $\triangle ADE$ 是等边三角形.

【小问 1 详解】

证明: $\because AD = AE$ (已知),

$\therefore \angle AED = \angle ADE$, 即 $\angle AEB = \angle ADC$,

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$$\begin{cases} \angle BAE = \angle CAD \\ AE = AD \\ \angle AEB = \angle ADC \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD$ (ASA);

【小问 2 详解】

解: $\triangle ADE$ 是等边三角形.

理由: $\because AD = BD$,

$$\therefore \angle BAD = \angle B,$$

$$\because \angle BAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle DAE = 90^\circ, \quad \angle B + \angle DEA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle DEA,$$

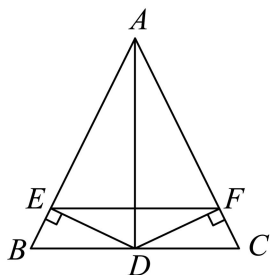
$$\therefore AD = DE,$$

$$\because AD = AE,$$

$$\therefore AD = DE = AE,$$

$\therefore \triangle ADE$ 是等边三角形.

21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = AC$, D 为 BC 的中点, $DE \perp AB$ 于点 E , $DF \perp AC$ 于点 F , 连接 AD 、 EF .



(1) 求证: $EF \parallel BC$;

(2) 求证: AD 垂直平分 EF .

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据三线合一定理得到 $\angle DAB = \angle DAC$, 利用三角形内角和定理求得 $\angle B = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC)$, 再证明 $\triangle AED \cong \triangle AFD$, 得到 $AE = AF$, 求得 $\angle AEF = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC)$, 得到 $\angle AEF = \angle B$, 即可证明 $EF \parallel BC$;

(2) 由 $\triangle AED \cong \triangle AFD$ 得到 $AE = AF$, $DE = DF$, 即可得到 AD 垂直平分 EF .

【小问 1 详解】

证明: $\because AB = AC$, D 为 BC 的中点,

$$\therefore \angle DAB = \angle DAC, \quad \angle B = \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC),$$

$\because DE \perp AB$ 于 E , $DF \perp AC$ 于 F ,

$$\therefore \angle AED = \angle AFD = 90^\circ,$$

又 $\because AD = AD$,

$\therefore \triangle AED \cong \triangle AFD$ (AAS),

$\therefore AE = AF$,

$\therefore \angle AEF = \angle AFE = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC)$,

$\therefore \angle AEF = \angle B$,

$\therefore EF \parallel BC$;

【小问2详解】

证明: 由(1)得 $\triangle AED \cong \triangle AFD$,

$\therefore AE = AF, DE = DF$,

$\therefore AD$ 垂直平分 EF .

22. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 在 $\triangle ABC$ 的外部作等边三角形 $\triangle ACD$, E 为 AC 的中点, 连接 DE 并延长交 BC 于点 F , 连接 BD .

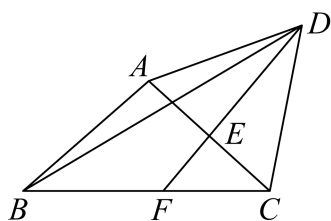


图1

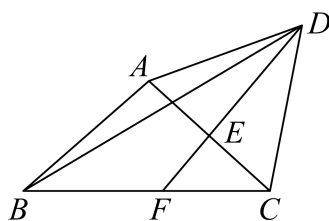


图2

(1) 如果 $\angle BAC = 100^\circ$, 求 $\angle BDF$ 的度数;

(2) 连接 AF , 交 BD 于点 P , 如果 $\triangle ABF$ 是等腰三角形, 求 $\angle BPF$ 的度数. (直接写出度数)

(3) 在图中画出 $\angle ACB$ 的平分线, 交 AB 于点 M , 交 EF 于点 N , 连接 BN . 如果 $BN = DN$, 求证: $MB = MN$.

【答案】(1) $\angle BDF = 20^\circ$

(2) 78° 或 60°

(3) 见解析

【解析】

【分析】(1) 分别求出 $\angle ADF, \angle ADB$, 根据 $\angle BDF = \angle ADF - \angle ADB$ 计算即可;

(2) 设 $\angle ACB = \angle ABC = \alpha$, 根据三角形内角和求出 $\angle BAC = 180^\circ - 2\alpha$, 根据垂直平分线的性质得到 $AF = CF$, 根据等边对等角求出 $\angle FAC = \alpha$, 根据三角形内角和求出 $\angle BAF = 180^\circ - 3\alpha$, 根据三角形外角的性质得到 $\angle AFB = 2\alpha$, 同(1)求出 $AD = AB$, 则 $\angle ADB = \angle ABD = \alpha - 30^\circ$, 根据三角形外角的性质得到 $\angle BPF = 150^\circ - 2\alpha$, 根据等腰三角形的定义分三种情况作答即可;

(3) 根据要求画出图形即可；设 $\angle ACM = \angle BCM = a$ ，由 $AB = AC$ 推出 $\angle ABC = \angle ACB = 2a$ ，可得 $\angle NAC = \angle NCA = a$ ， $\angle DAN = 60^\circ + a$ ，证明 $\triangle ABN \cong \triangle ADN$ (SSS)，推出 $\angle ABN = \angle ADN = 30^\circ$ ， $\angle BAN = \angle DAN = 60^\circ + a$ ， $\angle BAC = 60^\circ + 2a$ ，在 $\triangle ABC$ 中，根据 $\angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ$ ，构建方程求出 a ，再证明 $\angle MNB = \angle MBN$ ，即可解答.

【小问 1 详解】

解： $\because \triangle ACD$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle CAD = \angle ADC = 60^\circ, \quad AD = AC,$$

$\because E$ 为 AC 的中点，

$$\therefore \angle ADE = \frac{1}{2} \angle ADC = 30^\circ,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore AD = AB,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ABD,$$

$$\because \angle BAC = 100^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 160^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ABD = \frac{180^\circ - 160^\circ}{2} = 10^\circ,$$

$$\therefore \angle BDF = \angle ADF - \angle ADB = 30^\circ - 10^\circ = 20^\circ;$$

【小问 2 详解】

解：如图 1，

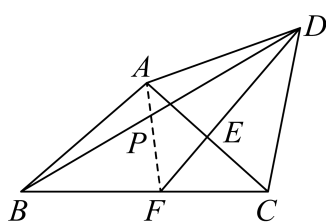


图1

设 $\angle ACB = \angle ABC = a$ ，则 $\angle BAC = 180^\circ - 2a$ ，

由 DF 垂直平分 AC 得 $AF = CF$ ，

则 $\angle FAC = a$ ，

$$\therefore \angle BAF = 180^\circ - 3a, \quad \angle AFB = 2a,$$

$\because \triangle ACD$ 是等边三角形，

$$\therefore AD = AC, \quad \angle CAD = 60^\circ$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle ABN = \angle ADN = 30^\circ, \\
&\therefore \angle BAN = \angle DAN = 60^\circ + a, \\
&\therefore \angle BAC = 60^\circ + 2a, \\
&\because AB = AC, \\
&\therefore \angle ABC = \angle ACB = 2a, \\
&\because \text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } \angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ, \\
&\therefore 60^\circ + 2a + 2a + 2a = 180^\circ, \\
&\therefore 6a = 120^\circ, \\
&\therefore a = 20^\circ, \\
&\therefore \angle ABC = 2a = 40^\circ, \\
&\therefore \angle NBC = \angle ABC - \angle ABN = 40^\circ - 30^\circ = 10^\circ, \\
&\therefore \angle MNB = \angle NBC + \angle NCB = 10^\circ + 20^\circ = 30^\circ, \\
&\because \angle ABN = 30^\circ, \\
&\therefore \angle MNB = \angle ABN, \\
&\therefore MB = MN.
\end{aligned}$$