

2024 学年第二学期期中学习素养分析

七年级 数学学科

(完卷时间 90 分钟, 满分 100 分)

一、选择题

1. “证明: 若 $a^2 \neq b^2$, 则 $a \neq b$ ”, 用反证法证明这个结论时, 应先假设 ()

- A. $a^2 = b^2$ B. $a = b$ C. $a = -b$ D. $a \neq b$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了反证法, 解此题关键要懂得反证法的意义及步骤. 根据反证法的步骤, 直接得出答案即可.

【详解】用反证法证明若 $a^2 \neq b^2$, 则 $a \neq b$ 时, 应先假设 $a = b$.

故选 B.

2. 下列不等式组中, 是一元一次不等式组的是 ()

- A. $\begin{cases} 3-y < 5 \\ 2x+5 > 8 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x-2 < 7 \\ x^2-2x-3 > 0 \end{cases}$
- C. $\begin{cases} 3x-10 > 0 \\ 16x < 3(4x+1) \end{cases}$ D. $\begin{cases} \frac{1}{x}+2 < 1 \\ 2(x+1) > 4 \end{cases}$

【答案】C

【解析】

【分析】此题主要考查了一元一次不等式组, 解题的关键是掌握几个含有同一个未知数的一元一次不等式组合在一起, 就组成了一个一元一次不等式组.

利用一元一次不等式组定义逐个判断解答即可.

【详解】A. $\begin{cases} 3-y < 5 \\ 2x+5 > 8 \end{cases}$, 含有两个未知数, 不是一元一次不等式组, 故不符合题意;

B. $\begin{cases} x-2 < 7 \\ x^2-2x-3 > 0 \end{cases}$, 未知数的最高次数是 2 次, 不是一元一次不等式组, 故不符合题意;

C. $\begin{cases} 3x-10 > 0 \\ 16x < 3(4x+1) \end{cases}$, 是一元一次不等式组, 故符合题意;

D. $\begin{cases} \frac{1}{x} + 2 < 1 \\ 2(x+1) > 4 \end{cases}$ ，含有分式不等式，不是一元一次不等式组，故不符合题意；

故选：C.

3. 下列命题中，是真命题的是（ ）

- A. 两条直线被第三条直线所截，同位角相等
- B. 若两条平行线被第三条直线所截，一对同旁内角的平分线互相平行
- C. 在同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线平行
- D. 直线外一点到这条直线的垂线段叫做这点到直线的距离

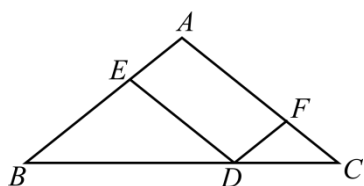
【答案】C

【解析】

【分析】本题考查的是命题与定理，正确的命题叫真命题，错误的命题叫做假命题．根据平行线的性质、平行公理的推论、平行线的判定、点到直线的距离的定义判断即可．

【详解】解：A、两条平行线被第三条直线所截，同位角相等，故本选项命题是假命题，不符合题意；
 B、若两条平行线被第三条直线所截，一对同旁内角的平分线互相垂直，故本选项命题是假命题，不符合题意；
 C、在同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线平行，是真命题，符合题意；
 D、直线外一点到这条直线的垂线段的长度，叫做这点到直线的距离，故本选项命题是假命题，不符合题意；
 故选：C.

4. 如图，在下列条件中，能说明 $AC \parallel DE$ 的是（ ）



- A. $\angle A = \angle CFD$
- B. $\angle BED = \angle EDF$
- C. $\angle BED = \angle A$
- D. $\angle A + \angle AFD = 180^\circ$

【答案】C

【解析】

【分析】根据平行线的判定逐项进行分析即可；

【详解】解：A、当 $\angle A = \angle CFD$ 时，则 $AB \parallel DF$ ，不合题意；
 B、当 $\angle BED = \angle EDF$ 时，则 $AB \parallel DF$ ，不合题意；

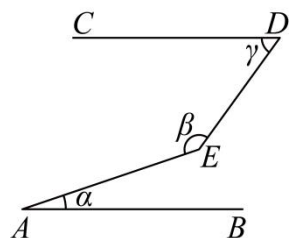
C、当 $\angle BED = \angle A$ 时，则 $AC \parallel DE$ ，符合题意；

D、当 $\angle A + \angle AFD = 180^\circ$ 时，则 $AB \parallel DF$ ，不合题意；

故选：C.

【点睛】 本题主要考查了平行线的判定，准确分析是解题的关键.

5. 如图，已知直线 $AB \parallel CD$ ，则 α 、 β 、 γ 之间的关系是 ()



A. $\alpha + \beta - 2\gamma = 180^\circ$

B. $\beta - \alpha = \gamma$

C. $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$

D. $\beta + \gamma - \alpha = 180^\circ$

【答案】 D

【解析】

【分析】 本题考查了平行线的性质，解决本题的关键是根据平行线的性质找到角之间的关系.

【详解】 解：过 E 向左作射线 $EF \parallel AB$ ，

则 $\angle FEA = \angle EAB = \alpha$ ，

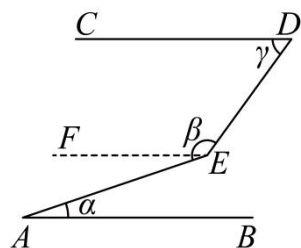
$$\therefore \angle FED = \angle AED - \angle FEA = \beta - \alpha,$$

$\because AB \parallel CD$ ，

$\therefore FE \parallel CD$ ，

$$\therefore \angle D + \angle FED = 180^\circ,$$

$$\therefore \beta + \gamma - \alpha = 180^\circ.$$



故选：D.

6. 已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases} -x < -1 \\ x - a < 0 \end{cases}$ 无解，则 a 的值可能为 ()

A. 3

B. 2

C. 4

D. -1

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了一元一次不等式组的解法，熟练掌握一元一次不等式组的解法是解答本题的关键. 根据同大取大，同小取小，大小小大取中间，大大小小无解求解即可.

【详解】解不等式 $-x < -1$ ，得

$$x > 1,$$

解不等式 $x - a < 0$ ，得

$$x < a.$$

因为此不等式组无解，

所以 $a \leq 1$.

故选：D.

二、填空题

7. 命题“如果两个角是同一个角的余角，那么这两个角相等”的逆命题是_____.

【答案】如果两个角相等，那么这两个角是同一个角的余角

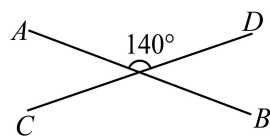
【解析】

【分析】本题考查命题与定理，根据逆命题定义把题设和结论互换得到逆命题.

【详解】解：“如果两个角是同一个角的余角，那么这两个角相等”的逆命题是“如果两个角相等，那么这两个角是同一个角的余角”.

故答案为：如果两个角相等，那么这两个角是同一个角的余角.

8. 如图，直线 AB 与直线 CD 的夹角大小为_____.

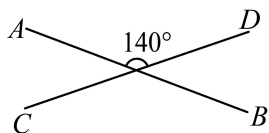


【答案】 40°

【解析】

【分析】本题考查了邻补角，根据邻补角互补求出 $\angle AOC$ ，即可求解.

【详解】解：如图：

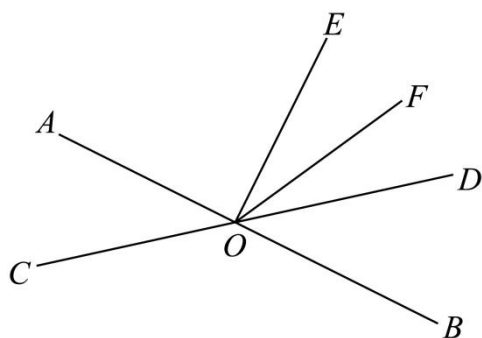


$$\because \angle AOD = 140^\circ, \quad \angle AOD + \angle AOC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC = 40^\circ.$$

故答案为: 40° .

9. 如图, 直线 AB , CD 相交于点 O , $OE \perp AB$, OF 平分 $\angle EOD$, 若 $\angle AOC = 40^\circ$, 则 $\angle FOB = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$.



【答案】 65

【解析】

【分析】 本题主要考查了角平分线的定义, 垂直的定义, 对顶角相等, 几何图形中角度的计算, 先由对顶角相等得到 $\angle BOD = \angle AOC = 40^\circ$, 再由垂直的定义得到 $\angle DOE = 50^\circ$, 由角平分线的定义得到 $\angle DOF = \frac{1}{2} \angle DOE = 25^\circ$, 据此可得答案.

【详解】 解: $\because \angle AOC = 40^\circ$,

$$\therefore \angle BOD = \angle AOC = 40^\circ,$$

$$\because OE \perp AB,$$

$$\therefore \angle BOE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DOE = 50^\circ,$$

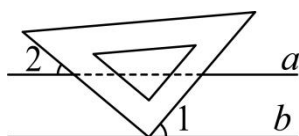
$$\because OF \text{ 平分 } \angle EOD,$$

$$\therefore \angle DOF = \frac{1}{2} \angle DOE = 25^\circ,$$

$$\therefore \angle FOB = \angle BOD + \angle DOF = 65^\circ,$$

故答案为: 65.

10. 如图, 把三角尺的直角顶点放在直线 b 上. 若 $\angle 1 = 50^\circ$, 则当 $\angle 2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, $a \parallel b$.

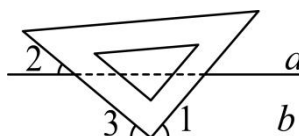


【答案】40°##40 度

【解析】

【分析】根据三角尺的直角顶点在直线 b 上， $\angle 1 = 50^\circ$ ，即可得到 $\angle 3 = 180^\circ - 90^\circ - \angle 1 = 40^\circ$ ，再根据 $a \parallel b$ ，即可得到 $\angle 2 = \angle 3 = 40^\circ$ 。

【详解】解：如图，



$\because$ 三角尺的直角顶点在直线 b 上， $\angle 1 = 20^\circ$ ，

$\therefore \angle 3 = 180^\circ - 90^\circ - \angle 1 = 40^\circ$ ，

又 $\because$ 要使得 $a \parallel b$ ，

$\therefore$ 只需要 $\angle 2 = \angle 3 = 40^\circ$ ，

故答案为：40.

【点睛】本题主要考查了平行线的性质，熟记两直线平行线，同位角相等是解题的关键.

11. 研究表明，运动时将心率 p （次）控制在最佳燃脂心率范围内，能起到燃烧脂肪并且保护心脏功能的作用．最佳燃脂心率最高值为 $(220 - \text{年龄}) \times 0.8$ ，最低值为 $(220 - \text{年龄}) \times 0.6$ ．所以 30 岁的人最佳燃脂心率 p 的范围为_____．（包括最高值和最低值）

【答案】 $114 \leq p \leq 152$

【解析】

【分析】本题考查了不等式的应用，根据心率的最高值和最低值列出不等式求解即可．

【详解】解：解：根据题意得： $(220 - 30) \times 0.6 \leq p \leq (220 - 30) \times 0.8$ ，

即 $114 \leq p \leq 152$ ．

故答案为： $114 \leq p \leq 152$ ．

12. 如果不等式组 $\begin{cases} x < 5 \\ x \leq m \end{cases}$ 的解集为 $x < 5$ ，那么 m 的取值范围为_____．

【答案】 $m \geq 5$

【解析】

【分析】 本题考查了不等式组的解集情况，熟练掌握不等式组的解集取值方法是解题的关键.
根据不等式组解集情况分析求解即可.

【详解】 解： $\because$ 不等式组 $\begin{cases} x < 5 \\ x \leq m \end{cases}$ 的解集为 $x < 5$,

$\therefore m \geq 5$;

故答案为： $m \geq 5$.

13. 若不等式 $(2m-3)x > 2m-3$ 的解集为 $x < 1$ ，则符合条件的正整数 m 的值为_____.

【答案】 1

【解析】

【分析】 本题考查了解一元一次不等式，根据题意得 $2m-3 < 0$ ，进而得 $m < \frac{3}{2}$ ，即可得出答案.

【详解】 解： $\because$ 不等式组 $(2m-3)x > 2m-3$ 的解集为 $x < 1$,

$\therefore 2m-3 < 0$,

解得 $m < \frac{3}{2}$,

$\therefore$ 符合条件的正整数 m 的值为 1.

故答案为： 1.

14. 已知 $\angle A$ 的两边与 $\angle B$ 的两边互相平行，且 $\angle A$ 比 $\angle B$ 的两倍小 60° ，则 $\angle A =$ _____.

【答案】 60° 或 100°

【解析】

【分析】 本题考查了平行线的性质：两直线平行，同位角相等；两直线平行，同旁内角互补；两直线平行，内错角相等. 也考查了两边分别平行的两个角的关系. 关键是分类讨论.

设 $\angle B = x$ ，则 $\angle A = 2x - 60^\circ$ ，根据两边分别平行的两个角相等或互补得到 $x = 2x - 60^\circ$ 或 $x + 2x - 60^\circ = 180^\circ$ ，再分别解方程，然后计算 $2x - 60^\circ$ 的值即可.

【详解】 解：由题意得两边分别平行的两个角相等或互补

设 $\angle B = x$ ，则 $\angle A = 2x - 60^\circ$ ，

当 $\angle A = \angle B$ 时，即 $x = 2x - 60^\circ$ ，

解得 $x = 60^\circ$ ，

所以 $\angle A = 2x - 60^\circ = 60^\circ$ ；

当 $\angle A + \angle B = 180^\circ$ 时, 即 $x + 2x - 60^\circ = 180^\circ$,

解得 $x = 80^\circ$,

所以 $\angle A = 2x - 60^\circ = 100^\circ$;

所以 $\angle A$ 的度数为 60° 或 100° .

故答案为: 60° 或 100° .

15. 对于两个关于 x 的不等式, 若这两个不等式组成的不等式组有且仅有一个整数解, 则称这两个不等式是“互联”的. 例如, 不等式 $x > 1$ 和不等式 $x < 3$ 是“互联”的. 若 $2x - a < 0$ 和 $x > 0$ 是“互联”的, a 的最大值为_____.

【答案】4

【解析】

【分析】本题考查新定义两个不等式是“互联”, 只能包含一个整数使得这两个不等式同时成立, 解得不等式解集, $0 < x < \frac{a}{2}$, 是“互联”的, 得 $1 < \frac{a}{2} \leq 2$, 进而求解.

【详解】解: $2x - a < 0$,

$$x < \frac{a}{2},$$

不等式解集: $0 < x < \frac{a}{2}$,

$2x - a < 0$ 和 $x > 0$ 是“互联”的, 要包含 1 但不包含 2,

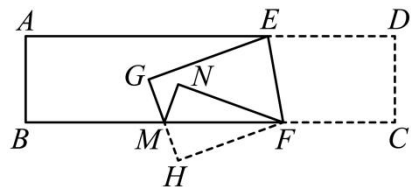
$$\therefore 1 < \frac{a}{2} \leq 2,$$

解得: $2 < a \leq 4$,

$\therefore a$ 的最大值: 4.

故答案为: 4.

16. 如图, 已知长方形纸带 $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, 将纸带沿 EF 折叠后, 点 C 、 D 分别落在 H 、 G 的位置, $\angle GEF = 80^\circ$, 再沿 BC 折叠, $\angle MFH =$ _____ $^\circ$.



【答案】 20°

【解析】

【分析】本题主要考查折叠的性质, 由折叠的性质可得 $\angle CFE = \angle HFE$, $\angle GEF = \angle DEF = 80^\circ$, 再由

平行的性质得 $\angle EFM = \angle DEF = 80^\circ$ ，再利用平角的性质得 $\angle EFC = 180^\circ - \angle EFM = 100^\circ$ ，则求得 $\angle HFE = 100^\circ$ ，再根据 $\angle MFH = \angle HFE - \angle EFM$ 可得答案.

【详解】解：由折叠可得， $\angle CFE = \angle HFE$ ， $\angle GEF = \angle DEF = 80^\circ$ ，

$\therefore AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle EFM = \angle DEF = 80^\circ$ ，

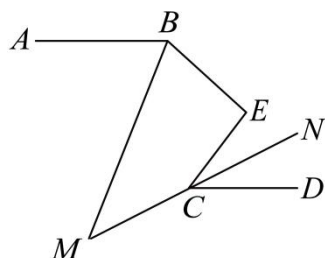
$\therefore \angle EFC = 180^\circ - \angle EFM = 100^\circ$ ，

$\therefore \angle HFE = 100^\circ$ ，

$\therefore \angle MFH = \angle HFE - \angle EFM = 100^\circ - 80^\circ = 20^\circ$ ，

故答案为： 20° 。

17. 如图 $AB \parallel CD$ ， BM 平分 $\angle ABE$ ， CN 平分 $\angle DCE$ ， CN 的反向延长线交 BM 于点 M ，若 $\angle E - \angle M = 54^\circ$ ，则 $\angle E =$ _____.

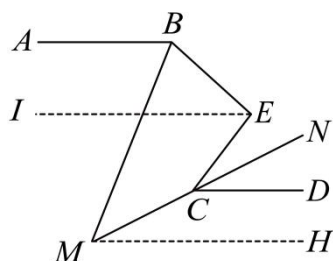


【答案】 96°

【解析】

【分析】本题主要考查平行线的性质与判定，角平分线的定义. 过点 M 作 $MH \parallel AB$ ，过点 E 作 $EI \parallel AB$ ，可得 $MH \parallel EI \parallel AB \parallel CD$ ，结合角平分线的计算得 $\angle ABE = 2\angle ABM$ ， $\angle DCE = 2\angle DCN$ ，结合图形利用各角之间的数量关系得出 $\angle E + 2\angle BMN = 180^\circ$ ，由已知条件求解即可得出结果.

【详解】解：如图所示，过点 M 作 $MH \parallel AB$ ，过点 E 作 $EI \parallel AB$ ，



$\therefore AB \parallel CD$ ，

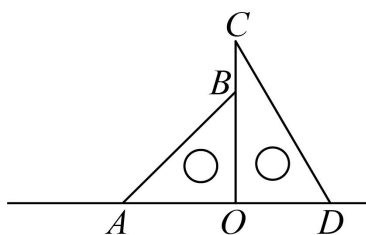
$\therefore MH \parallel EI \parallel AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle ABE + \angle BEI = 180^\circ$ ， $\angle CEI = \angle DCE$ ， $\angle DCN = \angle HMN$ ， $\angle ABM = \angle BMH$ ，

$$\begin{aligned}
&\therefore BM \text{ 平分 } \angle ABE, CN \text{ 平分 } \angle DCE, \\
&\therefore \angle ABE = 2\angle ABM, \angle DCE = 2\angle DCN, \\
&\therefore \angle ABE = 2\angle BMH, \angle DCE = 2\angle HMN, \\
&\therefore \angle BMH = \angle BMN + \angle HMN, \\
&\therefore \angle ABE = 2\angle BMN + 2\angle HMN = 2\angle BMN + \angle CEI, \\
&\therefore 2\angle BMN + \angle CEI + \angle BEI = 180^\circ, \\
&\therefore \angle BEC + 2\angle BMN = 180^\circ, \\
&\therefore \angle BEC - \angle BMN = 54^\circ, \\
&\therefore \angle E = 96^\circ.
\end{aligned}$$

故答案为： 96° .

18. 把我们常用的一副三角尺按照如图方式摆放：如图，两个三角尺的直角边 OA 、 OD 摆放在同一直线上，另一条直角边 OB 、 OC 也在同一条直线上，如果把 $\triangle OAB$ 以 O 为中心顺时针旋转一周，两条斜边 $AB \parallel CD$ ，则 $\angle AOC$ 的度数为_____.



【答案】 15° 或 150°

【解析】

【分析】 本题考查了旋转的性质，平行线的性质，三角形的外角性质，分两种情况讨论，由平行线的性质可求解.

【详解】 解：由已知可得 $\angle D = 60^\circ$ ， $\angle A = \angle ABO = 45^\circ$ ， $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$ ，
分以下两种情况讨论：

当 $A'B'$ 与 OD 相交于点 E 时，

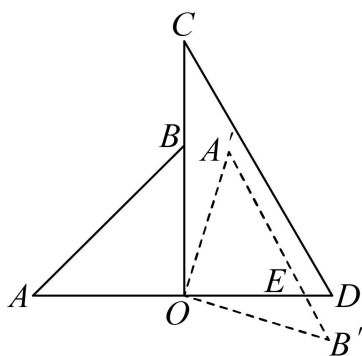


图 1

由旋转的性质可知， $\angle A = \angle A'$ ， $\angle AOB = \angle A'OB'$ ，

$\therefore A'B' \parallel CD$ ，

$\therefore \angle D = \angle A'EO = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle A'OE = 180^\circ - \angle A' - \angle A'EO = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ$ ，

$\therefore \angle A'OC = 90^\circ - \angle A'OE = 15^\circ$ ；

当 $A'B'$ 与 AO 相交于点 F 时，

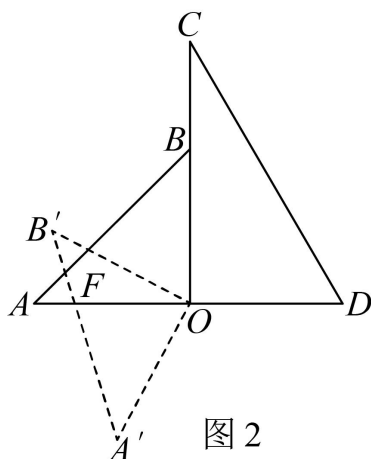


图 2

由旋转的性质可知， $\angle A = \angle A'$ ， $\angle AOB = \angle A'OB'$ ，

$\therefore A'B' \parallel CD$ ，

$\therefore \angle D = \angle AFB' = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle AOB = \angle AFB' = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle AOB = 60^\circ - \angle B = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle AOA' = 90^\circ - \angle AOB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle A'OC = \angle AOA' + 90^\circ = 150^\circ$ ，

综上所述： $\angle AOC$ 的度数为 15° 或 150° 。

故答案为： 15° 或 150° 。

三、简答题

19. 解不等式: $\frac{x+2}{3} \leq \frac{x-1}{2} + 1$.

【答案】 $x \geq 1$

【解析】

【分析】 本题考查解一元一次不等式，去分母，去括号，移项，合并，系数化1，进行求解即可.

【详解】 解: $\frac{x+2}{3} \leq \frac{x-1}{2} + 1$,

去分母得: $2(x+2) \leq 3(x-1) + 6$,

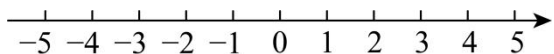
去括号得: $2x+4 \leq 3x-3+6$,

移项得: $2x-3x \leq -3+6-4$,

合并同类项得: $-x \leq -1$,

系数化1得: $x \geq 1$.

20. 解不等式组 $\begin{cases} \frac{1-2x}{5} \leq x+3 \\ 2x+3 > 2(2x-1) \end{cases}$, 并把解集表示在数轴上.



【答案】 $-2 \leq x < \frac{5}{2}$, 数轴见解析

【解析】

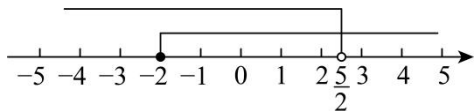
【分析】 本题考查了解一元一次不等式组，先分别求解两个不等式，再在数轴上表示出两个不等式的解集，找出其公共部分，即可解答.

【详解】 解: $\begin{cases} \frac{1-2x}{5} \leq x+3 \text{ ①} \\ 2x+3 > 2(2x-1) \text{ ②} \end{cases}$,

解不等式①得: $x \geq -2$,

解不等式②得: $x < \frac{5}{2}$,

在数轴上表示:

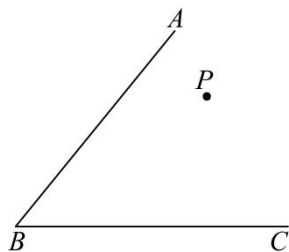


$\therefore$ 不等式组的解集为: $-2 \leq x < \frac{5}{2}$.

21. 按下列要求画图并填空:

如图，点 P 为 $\angle ABC$ 内部一点，

- (1) 过点 P 画出 $PE \parallel AB$ ，交 BC 于 E 。
- (2) 过点 P 画出 $PF \perp BC$ 于 F 。
- (3) 点 E 到直线 PF 的距离是线段_____的长。



【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

(3) EF

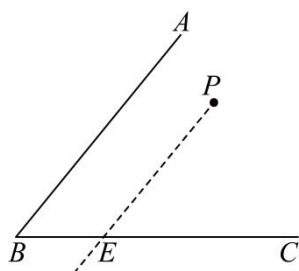
【解析】

【分析】 本题考查作平移和垂直，点与直线的距离；

- (1) 平移直线 AB ，使 AB 经过点 P ，与交 BC 于 E ，此时 $PE \parallel AB$ ；
- (2) 用三角板作 $PF \perp BC$ 即可；
- (3) 根据点与直线的距离的定义可得点 E 到直线 PF 的距离是线段 EF 的长。

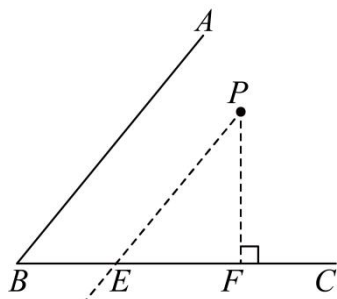
【小问 1 详解】

解：如图， $PE \parallel AB$ ，此时 PE 即为所求；



【小问 2 详解】

解：如图，过点 P 画出 $PF \perp BC$ 于 F ；



【小问 3 详解】

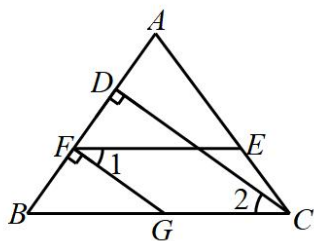
解： $\because PF \perp EF$ ，

∴ 点 E 到直线 PF 的距离是线段 EF 的长,

故答案为: EF .

22. 已知: 如图, $CD \perp AB$, $GF \perp AB$, $\angle 1 = \angle 2$.

求证: $\angle FEC + \angle ECB = 180^\circ$.



【答案】见解析.

【解析】

【分析】依据“同一平面内, 垂直于同一直线的两条直线互相垂直”可得 $CD \parallel GF$ 由平行线的性质和已知可得 $\angle 1 = \angle FGB$, 从而证明 $EF \parallel BC$, 从而得到结论.

【详解】证明: $\because CD \perp AB$, $GF \perp AB$,

$$\therefore CD \parallel GF$$

$$\therefore \angle 2 = \angle FGB$$

$$\text{又} \because \angle 1 = \angle 2$$

$$\therefore \angle 1 = \angle FGB$$

$$\therefore EF \parallel BC$$

$$\therefore \angle FEC + \angle ECB = 180^\circ$$

【点睛】本题考查了平行线的判定和性质; 解题的关键是找到 $\angle 1 = \angle FGB$ 从而证明 $EF \parallel BC$.

23. 2025 年春晚舞台上, 宇树科技的人形机器人以一身喜庆的大红棉袄亮相, 随着秧歌舞步灵活扭动, 手中的红手绢在空中划出流畅弧线. 这场表演不仅让观众惊叹于机器人动作的精准协调, 更因“机器人舞团”在舞蹈时队形变化整齐无误, 成为社交媒体热议的焦点. 某公司计划采购 A 、 B 两种机器人进行销售, 已知每个 B 种机器人比 A 种机器人贵 5 万元, 用 1200 万元可以采购 7 台 A 种机器人和 12 台 B 种机器人.

(1) 求采购一个 A 种机器人、一个 B 种机器人各需多少万元?

(2) 一段时间后, 该公司准备用不超过 6200 万元再采购第二批 A 、 B 两种机器人共 100 个, 且 A 种机器人数量不超过 B 种机器人数量的 3 倍. 求该公司可以采购 A 种机器人数量的范围.

【答案】(1) 采购一个 A 种机器人需 60 万元, 一个 B 种机器人需 65 万元

(2) 该公司可以采购 A 种机器人数量的范围 $60 \leq a \leq 75$

【解析】

【分析】 本题考查了一元一次方程的应用，一元一次不等式组的应用.

(1) 设采购一个 A 种机器人需 x 万元，则一个 B 种机器人需 $(x+5)$ 万元，根据“用 1200 万元可以采购 7 台 A 种机器人和 12 台 B 种机器人”列出一元一次方程解方程即可；

(2) 设采购 A 种机器人 a 个，则采购 B 种机器人 $(100-a)$ 个，根据题意列出一元一次不等式组，解不等式组即可.

【小问 1 详解】

解：设采购一个 A 种机器人需 x 万元，则一个 B 种机器人需 $(x+5)$ 万元，

由题意得， $7x+12(x+5)=1200$,

解得 $x=60$,

$\therefore x+5=65$,

答：采购一个 A 种机器人需 60 万元，一个 B 种机器人需 65 万元；

【小问 2 详解】

解：设采购 A 种机器人 a 个，则采购 B 种机器人 $(100-a)$ 个，

根据题意得
$$\begin{cases} 60a+65(100-a) \leq 6200 \\ a \leq 3(100-a) \end{cases},$$

解得 $60 \leq a \leq 75$,

$\therefore$ 该公司可以采购 A 种机器人数量的范围 $60 \leq a \leq 75$.

24. 阅读材料：对 x, y 定义一种新运算“ T ”，规定： $T(x, y) = \frac{ax-2by}{x+y}$ (其中 a, b 均为非 0 常数，且

$x+y \neq 0$). 如 $T(1, 0) = \frac{a \times 1 - 2b \times 0}{1+0} = a$ ，若 $T(2, 1) = \frac{4}{3}$ ， $T(1, -2) = -7$.

(1) 求 a, b 的值；

(2) 求 $T(4, 3)$ 的值；

(3) 若关于 c 的不等式组 $\begin{cases} T(5+3c, -3c) > m \\ T(c, 2-c) < 2 \end{cases}$ 恰好有 3 个整数解，求实数 m 的取值范围.

【答案】 (1) $\begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases}$

(2) $T(4, 3) = \frac{6}{7}$

$$(3) \quad 3 \leq m < 0$$

【解析】

【分析】(1) 利用新规定，得出关于 a 、 b 的方程组，解方程组即可；

(2) 利用新运算，代数求解即可；

(3) 利用不等式的解集，求符合题目要求的 m 的取值范围即

【小问 1 详解】

$$\because T(2,1) = \frac{2a-2b \times 1}{2+1} = \frac{2a-2b}{3} = \frac{4}{3},$$

$$\therefore 2a-2b=2(a-b)=4,$$

$$\therefore a-b=2.$$

$$T(1,-2) = \frac{a-2b \times (-2)}{1+(-2)} = -(a+4b) = -7,$$

$$\therefore a+4b=7,$$

$$\text{解方程组: } \begin{cases} a-b=2 \\ a+4b=7 \end{cases},$$

$$\text{得: } \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases};$$

【小问 2 详解】

$$T(x,y) = \frac{3x-2y}{x+y}$$

$$\therefore T(4,3) = \frac{2 \times 4 - 2 \times 3}{4+3} = \frac{2}{7}$$

【小问 3 详解】

$$T(5+3c, -3c) = 3+3c$$

$$T(c, 2-c) = \frac{3c-2(2-c)}{c+2-c} = \frac{5c-4}{2}$$

$$\text{由 } 3+3c > m \text{ 得 } c > \frac{m-3}{3}$$

$$\text{由 } \frac{5c-4}{2} < 2 \text{ 得 } c < \frac{8}{5}$$

$$\therefore \text{解集为 } \frac{m-3}{3} < c < \frac{8}{5}$$

$$\therefore \frac{m-3}{3} < c < \frac{8}{5} \text{ 三个整数解}$$

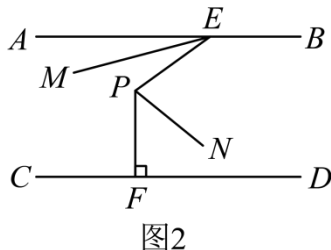
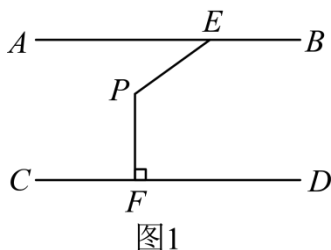
∴ 整数解为 $-1, 0, 1$

$$\therefore -2 \leq \frac{m-3}{3} < -1$$

$$\therefore 3 \leq m < 0.$$

【点睛】 本题考查的是新运算问题，解题关键就是理解新运算法则，熟练运用法则进行计算.

25. 如图，已知 $AB \parallel CD$, P 是直线 AB , CD 间的一点， $PF \perp CD$ 于点 F ， PE 交 AB 于点 E ， $\angle FPE = 120^\circ$.



(1) $\angle AEP =$ _____.

(2) 如图 2，射线 PN 从 PF 出发，以每秒 45° 的速度绕 P 点按逆时针方向旋转，当 PN 垂直 AB 时，立刻按原速返回至 PF 后停止运动；射线 EM 从 EA 出发，以每秒 20° 的速度绕 E 点按逆时针方向旋转至 EB 后停止运动，若射线 PN ，射线 EM 同时开始运动，设运动时间为 t 秒.

①当 $\angle MEP = 10^\circ$ 时，请求出 $\angle EPN$ 的度数；

②当 $EM \parallel PN$ 时，请求出 t 的值.

【答案】 (1) 30°

(2) ① 75° 或 30° ；② 3.6 或 $\frac{90}{13}$

【解析】

【分析】 本题考查了平行线的判定和性质以及一元一次方程的应用，正确理解题意、熟练掌握平行线的判定和性质是解题的关键.

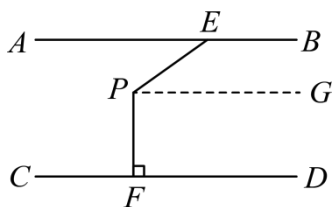
(1) 过点 P 作 $PG \parallel AB$ ，则 $\angle AEP = \angle EPG$ ，根据平行线的判定和性质以及垂直的定义可得 $\angle GPF = \angle PFC = 90^\circ$ ，再利用角的和差即可求解；

(2) ①当 $\angle MEP = 10^\circ$ 时，分两种情况，当 ME 在 AE 和 EP 之间，当 ME 在 EP 和 EB 之间，计算出 ME 的运动时间 t ，根据运动时间可计算出 $\angle FPN$ ，由已知 $\angle FPE = 120^\circ$ 可计算出 $\angle EPN$ 的度数；

②分四种情况：当 $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$ 、 $\frac{3}{2} < t \leq 4$ 、 $4 < t \leq 8$ 与 $8 < t \leq 9$ ，根据平行线的性质列出方程求解即可.

【小问 1 详解】

解：过点 P 作 $PG \parallel AB$ ，则 $\angle AEP = \angle EPG$ ，



$\because AB \parallel CD, PF \perp CD,$
 $\therefore PG \parallel AB \parallel CD, \angle PFC = 90^\circ,$
 $\therefore \angle GPF = \angle PFC = 90^\circ,$
 $\because \angle FPE = 120^\circ,$
 $\therefore \angle AEP = \angle EPG = 30^\circ;$

【小问 2 详解】

解：①当 ME 在 AE 和 EP 之间时，如图 2，

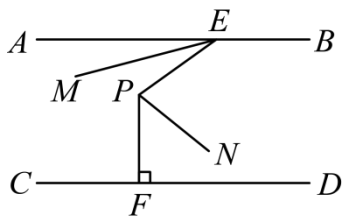


图2

$\because \angle AEP = 30^\circ, \angle MEP = 10^\circ,$
 $\therefore \angle AEM = 20^\circ,$
 $\therefore$ 射线 ME 运动的时间 $t = \frac{20}{20} = 1$ 秒,
 $\therefore$ 射线 PN 旋转的角度 $\angle FPN = 1 \times 45^\circ = 45^\circ,$
 又 $\because \angle EPF = 120^\circ,$
 $\therefore \angle EPN = \angle EPF - \angle FPN = 120^\circ - 45^\circ = 75^\circ;$

当 ME 在 EP 和 EB 之间时，如图 3 所示，

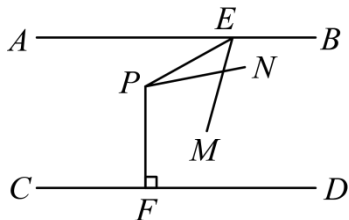


图3

$\because \angle AEP = 30^\circ, \angle MEP = 10^\circ,$
 $\therefore \angle AEM = 40^\circ,$

$\therefore$ 射线 ME 运动的时间 $t = \frac{40}{20} = 2$ 秒,

$\therefore$ 射线 PN 旋转的角度 $\angle FPN = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$,

又 $\because \angle EPF = 120^\circ$,

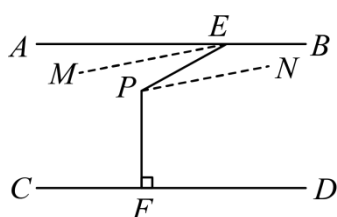
$\therefore \angle EPN = \angle EPF - \angle FPN = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$;

$\therefore \angle EPN$ 的度数为 75° 或 30° ;

② 当 $0 \leq t \leq \frac{30}{20}$, 即 $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$ 时, 若 $EM \parallel PN$, 如图,

则 $\angle MEP = \angle EPN$, 即 $30 - 20t = 120 - 45t$,

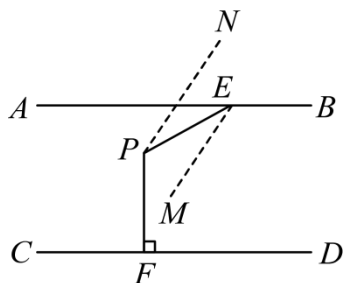
解得: $t = \frac{18}{5}$, 不合题意, 舍去;



当 $\frac{3}{2} < t \leq 4$ 时, 若 $EM \parallel PN$, 如图,

则 $\angle MEP = \angle EPN$, 即 $20t - 30 = 45t - 120$,

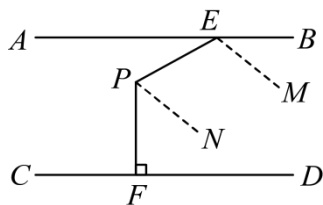
解得: $t = 3.6$;



当 $4 < t \leq 8$ 时, 若 $EM \parallel PN$, 如图,

则 $\angle MEP + \angle EPN = 180^\circ$, 即 $20t - 30 + 45(t - 4) - 60 = 180$,

解得: $t = \frac{90}{13}$;



当 $8 < t \leq 9$ 时, 不存在 EM, PN 互相平行的情况;

综上, 当 $EM \parallel PN$ 时, t 的值是 3.6 或 $\frac{90}{13}$.