

2024 学年第二学期期中考试七年级数学试卷

(考试时间 90 分钟, 满分 100 分)

一、选择题 (本大题共有 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分)

1. 已知 $a < b$, 下列各式中不正确的是 ()

A. $2a < 2b$

B. $1 - 2a > 1 - 2b$

C. $a - b < 0$

D. $|a| < |b|$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了不等式的性质: ①把不等式的两边都加(或减去)同一个整式, 不等号的方向不变; ②不等式两边都乘(或除以)同一个正数, 不等号的方向不变; ③不等式两边都乘(或除以)同一个负数, 不等号的方向改变.

根据不等式的性质逐个判断即可.

【详解】解: A、 $\because a < b$, $\therefore 2a < 2b$, 正确, 不符合题意;

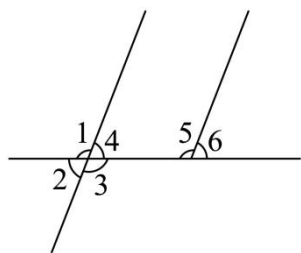
B、 $\because a < b$, $\therefore -2a > -2b$, $\therefore 1 - 2a > 1 - 2b$, 正确, 不符合题意;

C、 $\because a < b$, $\therefore a - b < b - b = 0$, 正确, 不符合题意;

D、 $a < b$ 时 $|a|$ 与 $|b|$ 可能相等, 也可能 $|a| > |b|$, $|a| < |b|$, 故错误, 符合题意,

故选: D.

2. 如图, 若其中 $\angle 1 = \angle 5$, 则与 $\angle 2$ 互补的角有 ()



A. 4 个

B. 3 个

C. 2 个

D. 1 个

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查的是补角, 若两个角的和等于 180° , 则这两个角互补, 掌握补角的定义是解题的关键. 根据补角的定义即可求解.

【详解】解: $\because \angle 2 + \angle 1 = 180^\circ, \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$,

$\therefore$ 与 $\angle 2$ 互补的角是 $\angle 1, \angle 3$,

$\therefore \angle 1 = \angle 5$,
 $\therefore \angle 2 + \angle 5 = 180^\circ$,
 $\therefore$ 与 $\angle 2$ 互补的角是 $\angle 5$,
 $\therefore$ 与 $\angle 2$ 互补的角有 3 个,

故选: B.

3. 已知某个不等式的解集是 $x < -2$, 下列说法正确的是 ()

- A. 0 是这个不等式的解
B. -3 不是这个不等式的解
C. 小于 -3 的数都是这个不等式的解
D. 小于 -1 的数都是这个不等式的解

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了解一元一次不等式. 根据不等式解集, 然后逐项分析求解即可.

【详解】解: $\therefore$ 不等式的解集是 $x < -2$,

$\therefore$ 0 不是这个不等式的解, 故选项 A 不符合题意;

-3 是这个不等式的解, 故选项 B 不符合题意;

小于 -3 的数都是这个不等式的解, 故选项 C 符合题意;

小于 -2 的数都是这个不等式的解, 故选项 D 不符合题意;

故选: C.

4. 下列各组长度的线段中, 能组成三角形的是 ()

- A. 1、2、3
B. 6、3、2
C. 2、2、3
D. 4、2、1

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查了构成三角形的条件, 三角形中, 任意两边之和大于第三边, 任意两边之差小于第三边, 据此求解即可.

【详解】解: A、 $\because 1+2=3$,

$\therefore$ 长为 1, 2, 3 的三条线段不能组成三角形, 不符合题意;

B、 $\because 2+3<6$,

$\therefore$ 长为 6, 3, 2 的三条线段不能组成三角形, 不符合题意;

C、 $\because 2+2>3$,

$\therefore$ 长为 2, 2, 3 的三条线段能组成三角形, 符合题意;

D、 $\because 1+2<4$,

∴ 长为 1, 2, 4 的三条线段不能组成三角形, 不符合题意;

故选: C.

5. 下列语句中真命题的个数是 ()

①两直线平行, 同旁内角相等;

②三角形的三条高交于三角形内一点;

③若 $a \perp b$, $a \perp c$, 则 $b \perp c$;

④在同一平面内, 经过一点有且只有一条直线与已知直线垂直;

⑤命题“对顶角相等”的逆命题是真命题;

⑥两条平行直线被第三条直线所截, 一组同旁内角的平分线互相垂直;

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】B

【解析】

【分析】本题主要考查了对顶角相等、平行公理、平行线的性质. 根据对顶角相等、线段、平行公理、平行线的性质逐个判断即可得.

【详解】解: ①两直线平行, 同旁内角互补, 原说法错误, 不是真命题;

②锐角三角形的三条高交于三角形内一点, 原说法错误, 不是真命题;

③在同一平面内, 若 $a \perp b$, $a \perp c$, 则 $b \perp c$, 原说法错误, 不是真命题;

④在同一平面内, 经过一点有且只有一条直线与已知直线垂直, 说法正确, 是真命题;

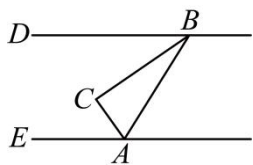
⑤命题“对顶角相等”的逆命题是“相等的角是对顶角”不是真命题;

⑥两条平行直线被第三条直线所截, 一组同旁内角的平分线互相垂直, 说法正确, 是真命题;

综上, 真命题的个数有 2 个,

故选: B.

6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 若 $BD \parallel AE$, $\angle CAE = 55^\circ$, 则 $\angle DBC$ 的度数是 ()



A. 25°

B. 35°

C. 45°

D. 55°

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了平行线的性质，三角形的内角和定理，掌握平行线的性质，三角形的内角和定理是解题的关键.

先由三角形内角和定理得到 $\angle CAB + \angle ABC = 90^\circ$ ，由平行得到 $\angle DBA + \angle BAE = 180^\circ$ ，而 $\angle CAE = 55^\circ$ ，再整体代入即可求解.

【详解】解： $\because \angle C = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle CAB + \angle ABC = 180^\circ - \angle C = 90^\circ$ ，
 $\because BD \parallel AE$ ，
 $\therefore \angle DBA + \angle BAE = 180^\circ$ ，
 $\therefore \angle DBC + \angle ABC + \angle CAB + \angle CAE = 180^\circ$ ，
 $\because \angle CAE = 55^\circ$
 $\therefore \angle DBC + 90^\circ + 55^\circ = 180^\circ$
 $\therefore \angle DBC = 35^\circ$ ，

故选：B.

二、填空题（本大题共有 12 题，每题 2 分，满分 24 分）

7. 用不等式表示“ x 与 y 的一半的和是非负数”：_____.

【答案】 $x + \frac{1}{2}y \geq 0$

【解析】

【分析】本题考查的是列不等式，解答本题的关键是读懂题意，找出量与量之间的关系，正确列出不等式. 直接根据题意列不等式即可.

【详解】解：由题意得： $x + \frac{1}{2}y \geq 0$ ，
故答案为： $x + \frac{1}{2}y \geq 0$.

8. 不等式 $-2x + 5 > -3$ 的解集是_____.

【答案】 $x < 4$

【解析】

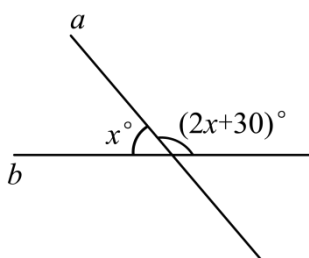
【分析】本题主要考查了解一元一次不等式按照移项，合并同类项，系数化为 1 的步骤解不等式即可得到答案.

【详解】解： $-2x + 5 > -3$
移项得： $-2x > -3 - 5$ ，
合并同类项得： $-2x > -8$ ，

系数化为1得: $x < 4$,

故答案为: $x < 4$.

9. 如图, 已知直线 a 、 b 相交, 这两条直线的夹角是_____.



【答案】 50° ##50 度

【解析】

【分析】 本题考查了邻补角的性质, 一元一次方程的应用. 根据邻补角的性质推出 $x + (2x + 30^\circ) = 180^\circ$, 解方程即可求解.

【详解】 解: 由题意得 $x + (2x + 30^\circ) = 180^\circ$,

解得 $x = 50^\circ$,

这两条直线的夹角是 50° ,

故答案为: 50° .

10. $\triangle ABC$ 中, 如果 $\angle A$ 是 $\angle B$ 的两倍, 且 $\angle C$ 比 $\angle A$ 大 30° , 那么 $\triangle ABC$ 是_____三角形. (按角分类)

【答案】 直角

【解析】

【分析】 本题考查的是三角形内角和定理. 设 $\angle B = x$, 得到 $\angle A = 2x$, $\angle C = 2x + 30^\circ$, 根据三角形内角和定理, 列式计算求得各内角的度数, 根据角度来判定三角形的类别.

【详解】 解: 设 $\angle B = x$,

$\because \angle A$ 是 $\angle B$ 的两倍,

$\therefore \angle A = 2x$,

$\because \angle C$ 比 $\angle A$ 大 30° ,

$\therefore \angle C = \angle A + 30^\circ = 2x + 30^\circ$,

$\because \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$,

$\therefore 2x + x + 2x + 30^\circ = 180^\circ$,

解得 $x = 30^\circ$,

$\therefore \angle A = 60^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

故答案为: 直角.

11. 已知 $\triangle ABC$ 是等腰三角形, 若 $AB = 5\text{cm}$, $AC = 3\text{cm}$, 那么 $\triangle ABC$ 的周长是_____ cm.

【答案】 11 或 13

【解析】

【分析】 本题主要考查了等腰三角形的定义, 构成三角形的条件, 分 AB 为腰和 AB 为底两种情况, 确定对应情形下三角形三边的长, 再根据构成三角形的条件求解即可.

【详解】 解: 当 AB 为腰时, 则该三角形的三边长分别为 $5\text{cm}, 5\text{cm}, 3\text{cm}$,

$$\therefore 5+3>5,$$

$\therefore$ 此时能构成三角形,

$$\therefore \text{该三角形的周长为 } 3+5+5=13\text{cm};$$

当 AB 为底时, 则该三角形的三边长分别为 $5\text{cm}, 3\text{cm}, 3\text{cm}$,

$$\therefore 3+3>5,$$

$\therefore$ 此时能构成三角形,

$$\therefore \text{该三角形的周长为 } 3+3+5=11\text{cm};$$

综上所述, $\triangle ABC$ 的周长是 11cm 或 13cm ,

故答案为: 11 或 13.

12. 若一个 30° 角的两边分别与另一个角的两边平行, 则另一个角为_____.

【答案】 30° 或 150°

【解析】

【分析】 本题考查了平行线的性质. 分类讨论; 分两种情况分别画出图形, 利用平行线的性质即可求解.

【详解】 解: 已知 $\angle ABC = 30^\circ$, $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, DE 、 BC 交于点 O . 求 $\angle DEF$ 的度数.

①如图 1, $\because AB \parallel DE$,

$$\therefore \angle DOC = \angle ABC = 30^\circ;$$

$$\because BC \parallel EF,$$

$$\therefore \angle DEF = \angle DOC = 30^\circ;$$

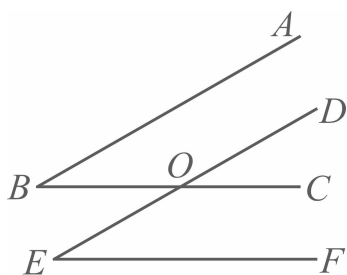


图1

②如图 2, $\because AB \parallel DE$,

$$\therefore \angle EOC = \angle ABC = 30^\circ;$$

$\because BC \parallel EF$,

$$\therefore \angle DEF + \angle EOC = 180^\circ;$$

$$\therefore \angle DEF = 180^\circ - \angle EOC = 150^\circ;$$

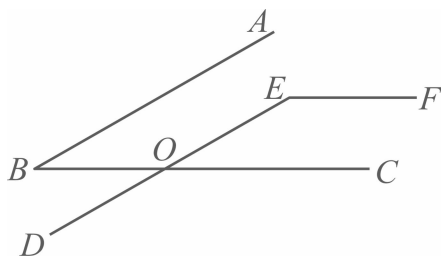
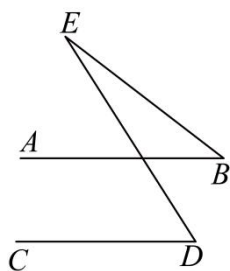


图2

综上, 另一个角的度数为 30° 或 150° .

故答案为: 30° 或 150° .

13. 如图, $AB \parallel CD$, $\angle D = 58^\circ$, $\angle B = 38^\circ$, 则 $\angle E = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$.



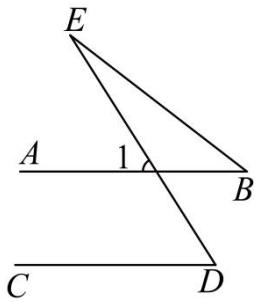
【答案】 20

【解析】

【分析】 本题考查了平行线的性质以及三角形的外角定理, 掌握三角形的外角等于与之不相邻的两个内角的和是解题的关键.

由平行得到 $\angle 1 = \angle D = 58^\circ$, 再由三角形的外角定理得到 $\angle 1 = \angle B + \angle E$, 即可求解.

【详解】 解: 如图:



$\because AB \parallel CD, \angle D = 58^\circ,$

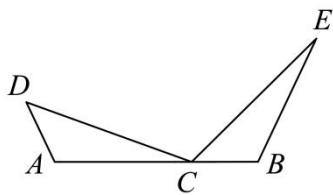
$\therefore \angle 1 = \angle D = 58^\circ,$

$\because \angle 1 = \angle B + \angle E, \angle B = 38^\circ$

$\therefore \angle E = \angle 1 - \angle B = 20^\circ,$

故答案为: 20.

14. 如图, 已知将 $\triangle DAC$ 旋转到 $\triangle ECB$ 的位置, 使得点 A, C, B 在同一条直线上, 请写出线段 AB, AD, BE 之间的数量关系_____.



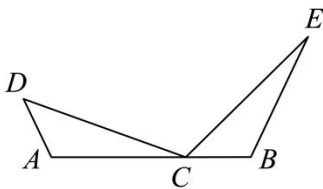
【答案】 $AB = BE + AD$

【解析】

【分析】 本题考查了旋转的性质. 先找到旋转中心, 得到 $AD = BC, AC = BE$, 根据 $AB = AC + BC$, 再等量代换, 即可得解.

【详解】 解: 如图, 旋转中心为点 O ,

$\bullet O$



根据旋转的性质得, $AD = BC, AC = BE$,

$\therefore AB = AC + BC = BE + AD,$

故答案为: $AB = BE + AD$.

15. 把命题“等角的余角相等”写成“如果..., 那么....”的形式为_____.

【答案】如果两个角相等，那么这两个角的余角也相等.

【解析】

【分析】本题主要考查了将原命题写成条件与结论的形式，“如果”后面是命题的条件，“那么”后面是命题的结论，解决本题的关键是找到相应的条件和结论，比较简单.

命题中的条件是两个角是等角，放在“如果”的后面，结论是这两个角的余角相等，应放在“那么”的后面.

【详解】解：题设为：两个角是等角；结论为：这两个角的余角相等，
故写成“如果……，那么……”的形式是：如果两个角相等，那么这两个角的余角也相等.
故答案为：如果两个角相等，那么这两个角的余角也相等.

16. 小明用 18 克咖啡粉冲泡了 300 毫升的咖啡液（假设咖啡粉完全溶解，体积忽略不计）. 他认为浓度过高，决定先倒掉一部分咖啡液，然后加入一定量的水进行稀释，倒掉咖啡液的量与加入的水量相等. 调整后的咖啡浓度既不低于 2.5% 又不超过 4%. 设加入的水量为 x 毫升，请列出符合题意的一元一次不等式组_____.

【答案】
$$\begin{cases} \frac{18 - \frac{18}{300}x}{300} \geq 2.5\% \\ \frac{18 - \frac{18}{300}x}{300} \leq 4\% \end{cases}$$

【解析】

【分析】本题考查了列不等式组. 先求得调整后咖啡浓度为 $\frac{18 - \frac{18}{300}x}{300}$ ，再根据“调整后的咖啡浓度既不低于 2.5% 又不超过 4%”列出不等式组即可.

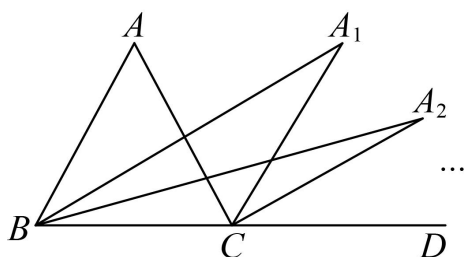
【详解】解：由题意倒掉了 x 毫升咖啡液，此时剩余的咖啡质量为 $\left(18 - \frac{18}{300}x\right)$ 克，

调整后咖啡浓度为 $\frac{18 - \frac{18}{300}x}{300}$ ，

根据题意得
$$\begin{cases} \frac{18 - \frac{18}{300}x}{300} \geq 2.5\% \\ \frac{18 - \frac{18}{300}x}{300} \leq 4\% \end{cases},$$

故答案为:
$$\begin{cases} \frac{18 - \frac{18}{300}x}{300} \geq 2.5\% \\ \frac{18 - \frac{18}{300}x}{300} \leq 4\% \end{cases}$$

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 延长 BC 到 D , $\angle ABC$ 、 $\angle ACD$ 的角平分线相交于点 A_1 点. $\angle A_1BC$ 与 $\angle A_1CD$ 的外角平分线交于点 A_2 , $\angle A_2BC$ 与 $\angle A_2CD$ 的外角平分线交于点 A_3 , 依次类推, $\angle A_{n-1}BC$ 与 $\angle A_{n-1}CD$ 的外角平分线交于点 A_n , 如果 $\angle A = m^\circ$, 那么 $\angle A_n = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$. (用含 m 、 n 的表示).



【答案】 $\frac{m}{2^n}$ $\frac{1}{2^n}m$

【解析】

【分析】 此题考查了三角形外角的性质、角平分线的相关计算等知识. 根据三角形外角的性质得到

$$\angle A = \angle ACD - \angle ABC, \quad \angle A_1 = \angle A_1CD - \angle A_1BC, \quad \text{由角平分线的性质得到 } \angle A_1CD = \frac{1}{2} \angle ACD,$$

$\angle A_1BC = \frac{1}{2} \angle ABC$, 即可得到 $\angle A_1 = \frac{1}{2} \angle A = \frac{m}{2}$, 同理可得 $\angle A_2 = \frac{1}{2} \angle A_1 = \frac{1}{2^2} \angle A = \frac{m}{2^2}$, 进一步得到答案即可.

【详解】 解: $\because \angle ACD$ 是 $\triangle ABC$ 的外角,

$$\therefore \angle A = \angle ACD - \angle ABC,$$

$\because \angle A_1CD$ 是 $\triangle A_1BC$ 的外角,

$$\therefore \angle A_1 = \angle A_1CD - \angle A_1BC,$$

$\because BA_1$ 平分 $\angle ABC$, CA_1 平分 $\angle ACD$,

$$\therefore \angle A_1CD = \frac{1}{2} \angle ACD, \quad \angle A_1BC = \frac{1}{2} \angle ABC,$$

$$\therefore \angle A_1 = \angle A_1CD - \angle A_1BC = \frac{1}{2} \angle ACD - \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} \angle A = \frac{m}{2},$$

同理可得: $\angle A_2 = \frac{1}{2} \angle A_1 = \frac{1}{2^2} \angle A = \frac{m}{2^2}$,

....,

$$\therefore \angle A_n = \frac{m}{2^n},$$

故答案为: $\frac{m}{2^n}$.

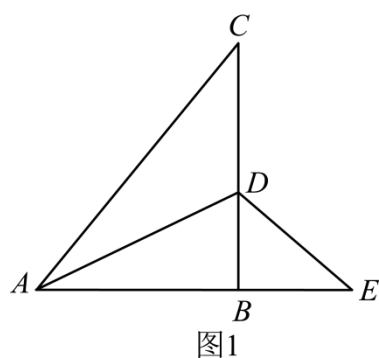
18. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 50^\circ$, 点 D 是边 BC 上一点, 将 $\triangle ACD$ 沿直线 AD 翻折, 使点 C 落在直线 AB 上的点 E 处, 如果 $\triangle BED$ 是直角三角形, 那么 $\angle ACB = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$.

【答案】 20° 或 40° 或 90° 或 110°

【解析】

【分析】 本题主要考查了三角形折叠中的角度问题, 分图 1, 图 2, 图 3, 图 4 四种情况, 根据折叠的性质和三角形内角和定理讨论求解即可.

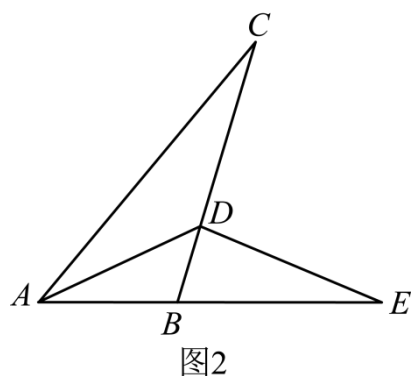
【详解】 解: 如图 1 所示, 当 $\angle DBE = 90^\circ$ 时, 则 $\angle ABC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$,



$$\therefore \angle BAC = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ;$$

如图 2 所示, 当 $\angle BDE = 90^\circ$ 时, 则 $\angle AED + \angle DBE = 90^\circ$,



由折叠的性质可得 $\angle AED = \angle ACD$,

$$\therefore \angle DBE = \angle ACB + \angle BAC,$$

$$\therefore \angle DBE = \angle ACB + 50^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB + 50^\circ + \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 20^\circ;$$

如图 3 所示, 当 $\angle BED = 90^\circ$ 时, 则 $\angle ACB = \angle AED = 180^\circ - \angle BED = 90^\circ$;

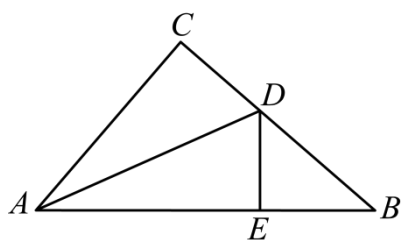


图3

如图 4 所示, 当 $\angle EDB = 90^\circ$ 时, 则 $\angle CDE = 90^\circ$,

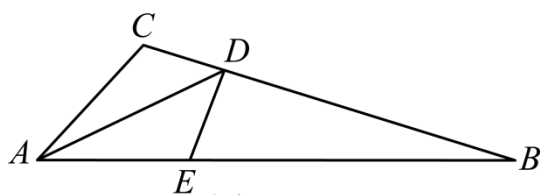


图4

由折叠的性质可得 $\angle CAD = \frac{1}{2} \angle CAB = 25^\circ$, $\angle ADC = \frac{1}{2} \angle CDE = 45^\circ$,

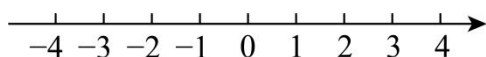
$$\therefore \angle ACB = 180^\circ - 45^\circ - 25^\circ = 110^\circ;$$

综上所述, $\angle ACB$ 的度数为 20° 或 40° 或 90° 或 110° ;

故答案为: 20° 或 40° 或 90° 或 110° .

三、简答题 (本大题共有 5 题, 第 19 题满分 5 分, 第 20 题满分 6 分, 第 21 题满分 7 分, 第 22 题满分 5 分, 第 23 题满分 10 分, 共 33 分)

19. 解不等式: $3(2x+1) \leq 7-2(5x-6)$, 并把它的解集在数轴上表示出来.



【答案】 $x \leq 1$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元一次不等式, 在数轴上表示不等式的解集, 按照去括号, 移项, 合并同类项, 系数化为 1 的步骤求出不等式的解集, 再在数轴上表示出不等式的解集即可.

【详解】 解: $3(2x+1) \leq 7-2(5x-6)$

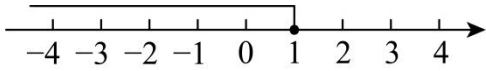
去括号得: $6x+3 \leq 7-10x+12$,

移项得: $6x+10x \leq 7+12-3$,

合并同类项得: $16x \leq 16$,

系数化为 1 得: $x \leq 1$,

数轴表示如下所示:



20. 求不等式组
$$\begin{cases} \frac{2x+5}{4} - 2 < x \\ 3\left(x - \frac{1}{9}\right) \leq \frac{17}{3} \end{cases}$$
 的整数解.

【答案】 $-1, 0, 1, 2$

【解析】

【分析】 本题主要考查了求一元一次不等式组的整数解, 先求出每个不等式的解集, 再根据 “同大取大, 同小取小, 大小小大中间找, 大大小小找不到 (无解)” 求出不等式组的解集, 据此求出不等式组的整数解即可.

【详解】 解:
$$\begin{cases} \frac{2x+5}{4} - 2 < x \text{ ①} \\ 3\left(x - \frac{1}{9}\right) \leq \frac{17}{3} \text{ ②} \end{cases}$$

解不等式①得: $x > -\frac{3}{2}$,

解不等式②得: $x \leq 2$,

$\therefore$ 不等式组的解集为 $-\frac{3}{2} < x \leq 2$,

$\therefore$ 不等式组的整数解为 $-1, 0, 1, 2$.

21. 如果关于 x 的不等式组
$$\begin{cases} 5x > 3(x+a) - 10 \\ 3-x \geq \frac{a-3}{4} \end{cases}$$
 无解, 求 a 的取值范围.

【答案】 $a \geq 5$

【解析】

【分析】 本题主要考查由一元一次不等式组的解集求参数, 根据不等式的解集确定 a 的取值范围是解题的关键.

先求解一元一次不等式组, 再根据题意建立关于参数的不等式求解即可.

【详解】解：
$$\begin{cases} 5x > 3(x+a)-10 \text{ ①} \\ 3-x \geq \frac{a-3}{4} \text{ ②} \end{cases},$$

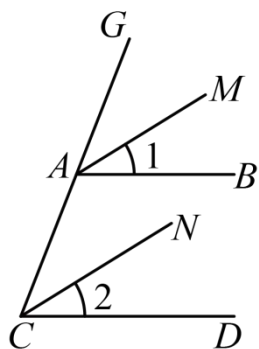
由①得， $x > \frac{3}{2}a-5,$

由②得， $x \leq \frac{15-a}{4},$

$\therefore$ 不等式组 $\begin{cases} 5x > 3(x+a)-10 \\ 3-x \geq \frac{a-3}{4} \end{cases}$ 无解，

$\therefore \frac{3}{2}a-5 \geq \frac{15-a}{4},$ 解得： $a \geq 5.$

22. 如图，已知 $AM \parallel CN$ ，且 $\angle 1 = \angle 2$ ，那么 $AB \parallel CD$ 吗？为什么？



解： $\because AM \parallel CN$ (已知)

$\therefore \angle GAM = \angle GCN$ ()

又 $\because \angle 1 = \angle 2$

$\therefore \angle \underline{\hspace{1cm}} + \angle \underline{\hspace{1cm}} = \angle \underline{\hspace{1cm}} + \angle \underline{\hspace{1cm}}$

即 $\angle \underline{\hspace{1cm}} = \angle \underline{\hspace{1cm}}$

$\therefore AB \parallel CD$ ()

【答案】两直线平行，同位角相等； GAM ；1； GCN ；2； GAB ； GCD ；同位角相等，两直线平行

【解析】

【分析】本题主要考查了平行线的性质与判定，先由平行线的性质得到 $\angle GAM = \angle GCN$ ，再由角的和差关系证明 $\angle GAB = \angle GCD$ ，据此可证明 $AB \parallel CD$ 。

【详解】解： $\because AM \parallel CN$ (已知)

$\therefore \angle GAM = \angle GCN$ (两直线平行，同位角相等)

又 $\because \angle 1 = \angle 2$

$$\therefore \angle GAM + \angle 1 = \angle GCN + \angle 2,$$

即 $\angle GAB = \angle GCD$,

$\therefore AB \parallel CD$ (同位角相等, 两直线平行)

23. (1) 反证法是数学中一种常用的证明方法, 通常先假设求证的结论是错误的, 再由此推导出与已知、公理、定理或条件等相矛盾的结果, 从而否定开始的假设, 肯定先前求证结论的正确性. 在证明“两直线平行, 内错角相等”时, 采用反证法.

如图 1, 已知: $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是直线 AB 、 CD 被直线 EF 所截得到的一对内错角, $AB \parallel CD$, 直线 AB 、 CD 分别与直线 EF 相交于点 M 、 N .

求证: $\angle 1 = \angle 2$

证明: 假设_____, 过点 N 画一条直线 GH , 使得 $\angle 1 = \angle ENG$, 如图 2 所示, 根据_____, 可得 $AB \parallel GH$, 又因为 $AB \parallel CD$, 这样直线 GH 、 CD 都过点 N , 这与_____矛盾.

说明假设不成立, 所以 $\angle 1 = \angle 2$.

(2) 如图 3, 已知 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, $\angle CFA = \angle CAF$, $\angle 1 = 30^\circ$, $\angle D = 105^\circ$, 求 $\angle E$ 的度数.

解: $\because \triangle ABC \cong \triangle DEF$

$$\therefore \angle \underline{\hspace{1cm}} = \angle \underline{\hspace{1cm}} \quad (\quad)$$

$$\text{又} \because \angle D = 105^\circ, \angle 1 = 30^\circ$$

$$\therefore \angle CAF = \angle \underline{\hspace{1cm}} - \angle \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$$

$$\because \angle CFA = \angle CAF$$

$$\text{又} \because \angle CFA = \angle \underline{\hspace{1cm}} + \angle \underline{\hspace{1cm}} = (\quad)$$

$$\therefore \angle B = 45^\circ$$

$$\because \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

$$\therefore \angle \underline{\hspace{1cm}} = \angle \underline{\hspace{1cm}} = 45^\circ \quad (\quad)$$

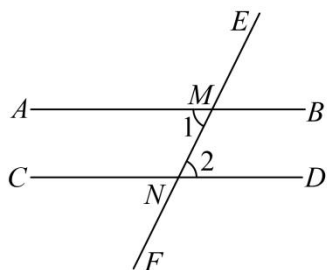


图 1

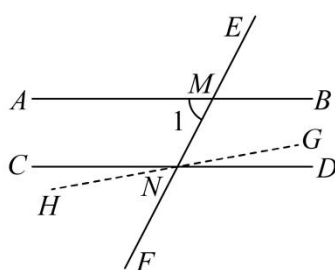


图 2

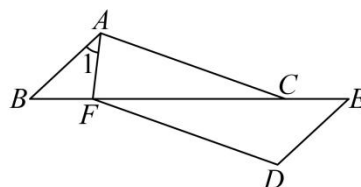


图 3

【答案】(1) $\angle 1 \neq \angle 2$; 内错角相等, 两直线平行; 过直线外一点, 有且只有一条直线与已知直线平行;

(2) BAC ; D ; 全等三角形对应角相等; BAC ; 1; 75° ; B ; 1; 三角形外角的性质; E ; B ; 全等三

角形对应角相等

【解析】

【分析】 本题主要考查了平行线的性质，全等三角形的性质，平行线的唯一性，三角形外角的性质等等，熟知相关知识是解题的关键.

(1) 根据题意先假设 $\angle 1 \neq \angle 2$ ，过点 N 画一条直线 GH ，使得 $\angle 1 = \angle ENG$ ，则可证明 $AB \parallel GH$ ，根据过直线外一点，有且只有一条直线与已知直线平行可得矛盾点，据此求解即可；

(2) 根据全等三角形对应角相等得到 $\angle BAC = \angle D$ ，则可求出 $\angle CAF$ 的度数，再由三角形外角的性质和已知条件求出 $\angle B$ 的度数，则可根据全等三角形的性质得到答案.

【详解】 (1) 证明：假设 $\angle 1 \neq \angle 2$ ，过点 N 画一条直线 GH ，使得 $\angle 1 = \angle ENG$ ，如图 2 所示，根据内错角相等，两直线平行，可得 $AB \parallel GH$ ，又因为 $AB \parallel CD$ ，这样直线 GH 、 CD 都过点 N ，这与过直线外一点，有且只有一条直线与已知直线平行矛盾.

说明假设不成立，所以 $\angle 1 = \angle 2$.

(2) 解： $\because \triangle ABC \cong \triangle DEF$

$\therefore \angle BAC = \angle D$ (全等三角形对应角相等)

又 $\because \angle D = 105^\circ, \angle 1 = 30^\circ$

$\therefore \angle CAF = \angle BAC - \angle 1 = 75^\circ$,

$\because \angle CFA = \angle CAF$

又 $\because \angle CFA = \angle B + \angle 1$ (三角形外角的性质)

$\therefore \angle B = 45^\circ$

$\because \triangle ABC \cong \triangle DEF$

$\therefore \angle E = \angle B = 45^\circ$ (全等三角形对应角相等)

四、解答题 (本大题共有 3 题，第 24、25 题满分 6 分，第 26 题满分 9 分，共 21 分)

24. 小明准备乘坐出租车从商场回家，商场到家的距离为 30 公里，当地出租车的收费标准是：起步价为 12 元 (3 公里以内)，超过 3 公里低于 15 公里，每公里收费 2 元，15 公里以上每公里单价是在 2 元的基础上上浮 50%，小明发现身上只有 75 元现金，请问他能直接乘出租车回家吗？

【答案】 不能，理由见解析

【解析】

【分析】 本题考查了有理数的混合运算的实际应用，有理数的大小比较，正确理解题意是解题的关键. 先求出 15 公里以上每公里单价，然后分段求费用，再相加即可得到总费用，再与 75 元比较大小即可.

【详解】 解：不能，理由如下：

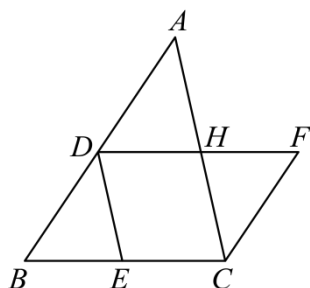
15 公里以上每公里单价为 $2 \times (1 + 50\%) = 3$ (元)

需要费用: $12 + 2 \times (15 - 3) + 3 \times (30 - 15) = 81$ (元),

$\therefore 81 > 75$

$\therefore$ 他不能直接乘出租车回家.

25. 如图, 点 D 、 E 、 H 分别在线段 AB 、 BC 、 AC 上, 连接 DE , 过点 C 画 CF 交 DH 的延长线于点 F , 且满足 $\angle BDE = \angle FCA$, 若 $BC \parallel DF$, $\angle B = \angle F$, 求证 $DE \parallel AC$.



【答案】证明见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了平行线的性质与判定, 先由平行线的性质和已知条件证明 $\angle ADF = \angle F$, 则 $AB \parallel CF$, 再由平行线的性质和已知条件证明 $\angle BDE = \angle A$, 则可证明 $DE \parallel AC$.

【详解】证明: $\because BC \parallel DF$,

$\therefore \angle ADF = \angle B$,

$\because \angle B = \angle F$,

$\therefore \angle ADF = \angle F$,

$\therefore AB \parallel CF$,

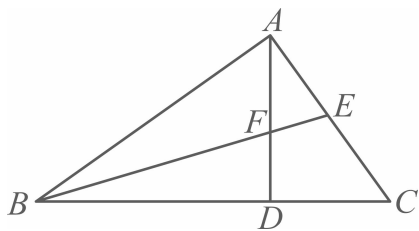
$\therefore \angle A = \angle FCA$,

$\because \angle BDE = \angle FCA$,

$\therefore \angle BDE = \angle A$,

$\therefore DE \parallel AC$.

26. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AD \perp BC$, 垂足为 D , 点 E 在 AC 上, BE 交 AD 于点 F , $\angle AFE = \angle AEB$.



(1) 点 B 到直线 AD 的距离是线段_____的长度；若 $BF = 5EF$ ， $AE = EC$ ，那么 $\triangle ABF$ 与 $\triangle ABC$ 的面积比值是_____.

(2) 求证 BE 平分 $\angle ABC$.

【答案】 (1) BD ； $\frac{5}{12}$

(2) 见解析

【解析】

【分析】 本题主要考查了角平分线的定义，三角形中线的性质，三角形内角和定理，点到直线的距离等等，熟知相关知识是解题的关键.

(1) 过直线外一点作直线的垂线，该点与垂足的连线段的长度叫做该点到该直线，据此可得答案；根据三角形中线平分三角形面积可得 $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$ ，再证明 $\frac{BF}{BE} = \frac{5}{6}$ 得到 $S_{\triangle ABF} = \frac{5}{6}S_{\triangle ABE}$ ，据此可得答案；

(2) 根据三角形内角和定理可得 $\angle ABE + \angle AEF = 90^\circ$ ， $\angle DBF + \angle DFB = 90^\circ$ ，再导角证明 $\angle ABE = \angle DBF$ ，即可证明结论.

【小问 1 详解】

解： $\because AD \perp BC$ ，

$\therefore$ 点 B 到直线 AD 的距离是线段 BD 的长度；

$\because AE = EC$ ，

$$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}，$$

$\because BF = 5EF$ ，

$$\therefore BE = BF + EF = 6EF，$$

$$\therefore \frac{BF}{BE} = \frac{5}{6}，$$

$$\therefore S_{\triangle ABF} = \frac{5}{6}S_{\triangle ABE}，$$

$$\therefore S_{\triangle ABF} = \frac{5}{12}S_{\triangle ABC}，$$

$\therefore \triangle ABF$ 与 $\triangle ABC$ 的面积比值是 $\frac{5}{12}$;

【小问 2 详解】

证明: $\because \angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABE + \angle AEF = 90^\circ$,

$\because AD \perp BC$,

$\therefore \angle DBF + \angle DFB = 90^\circ$,

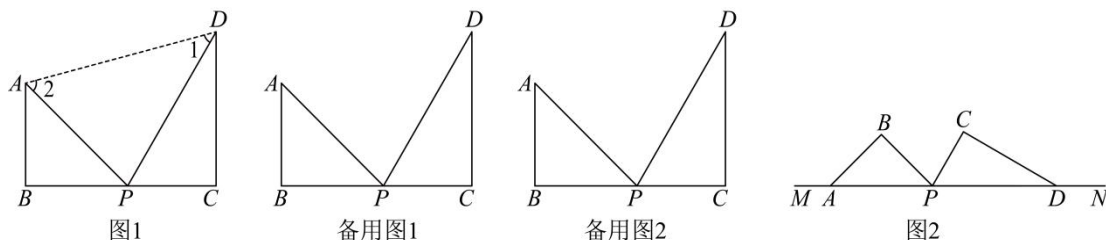
$\because \angle AFE = \angle AEB$, $\angle AFE = \angle DFB$,

$\therefore \angle ABE = \angle DBF$,

$\therefore BE$ 平分 $\angle ABC$.

五、综合题 (本大题共 1 题, 满分 10 分)

27. 在一副三角尺中 $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 90^\circ$, $\angle BPA = 45^\circ$, $\angle CPD = 60^\circ$



(1) 将一副三角尺按如图 1 所示方式摆放 (两条直角边在同一条直线上)

①联结 AD , 测得 $\angle 1 = 45^\circ$, 则 $\angle 2$ 的度数是多少?

②将三角尺 PCD 绕点 P 以每秒 3° 的速度逆时针旋转, 当三角尺 PCD 的边 PD 与射线 PB 重合时停止运动, 经历多久使得其中一块三角尺的直角边与另一块三角尺的斜边平行?

(2) 若将这副三角尺按照如图 2 所示方式摆放 (两条斜边在同一条直线 MN 上). 三角尺 PCD 绕点 P 以每秒 2° 的速度逆时针旋转, 同时三角尺 PAB 以每秒 3° 的速度顺时针旋转, 当三角尺 PAB 的边 PB 与射线 PN 重合时两块三角尺都停止运动, 运动_____秒, 使得其中一块三角尺的直角边与另一块三角尺的斜边平行?

(只写答案)

【答案】(1) ① 60° ; ② 10 秒或 15 秒

(2) 6 或 9 或 42 或 45

【解析】

【分析】(1) ①先由平角的意义求出 $\angle APD$, 再对 $\triangle APD$ 由三角形内角和定理即可求解;

②分两种情况讨论: 当 $PD' \parallel AB$ 和 $D'C \parallel AP$, 作出图形, 根据旋转的性质以及平行线的性质进行角度和差计算求出旋转角 $\angle DPD'$ 即可;

(2) 设旋转时间为 t 秒, 由题意得, $\angle MPA = 3t$, $\angle NPD = 2t$, 然后分四种情况讨论, 当 $PA \parallel CD$ 时,

得到 $\angle MPA + \angle APC + \angle DPC + \angle NPD = 180^\circ$ ；当 $AB \parallel PD$ 时，得到

$\angle MPA + \angle APB + \angle DPB + \angle NPD = 180^\circ$ ；当 $CD \parallel AP$ 时，得到 $\angle MPA + \angle NPD - \angle APD = 180^\circ$ ；

当 $AB \parallel PD$ 时，得到 $\angle MPA + \angle NPD - \angle APD = 180^\circ$ ，分别建立起关于时间 t 的方程求解即可。

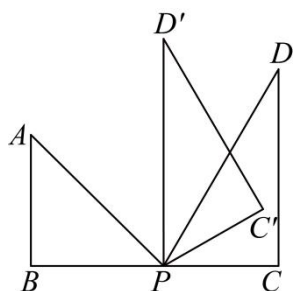
【小问 1 详解】

解：① $\because \angle BPA = 45^\circ$ ， $\angle CPD = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle APD = 180^\circ - \angle BPA - \angle CPD = 75^\circ$ ，

$\therefore \angle 2 = 180^\circ - \angle 1 - \angle APD = 180^\circ - 45^\circ - 75^\circ = 60^\circ$ ；

② 当 $PD' \parallel AB$ 时，

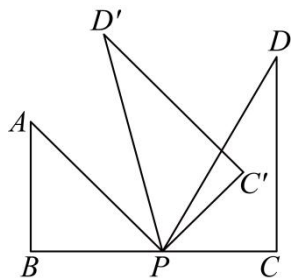


则 $\angle D'PC = \angle B = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle D'PD = \angle D'PC - \angle DPC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ，

$\therefore t = 30 \div 3 = 10$ （秒）；

当 $D'C \parallel AP$ 时，



$\because \angle C = 90^\circ$ ， $\angle CPD = 60^\circ$

$\therefore \angle D = 180^\circ - \angle C - \angle CPD = 30^\circ$ ，

$\because$ 旋转，

$\therefore \angle D' = D = 30^\circ$

$\because D'C \parallel AP$

$\therefore \angle APD' = \angle D' = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle DPD' = \angle APD - \angle APD' = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$

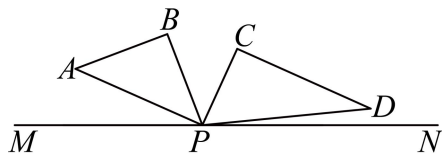
$\therefore t = 45 \div 3 = 15$ （秒），

综上所述：当 10 秒或 15 秒时，其中一块三角尺的直角边与另一块三角尺的斜边平行；

【小问 2 详解】

解：设旋转时间为 t 秒，由题意得， $\angle MPA = 3t$ ， $\angle NPD = 2t$ ，

当 $PA \parallel CD$ 时，



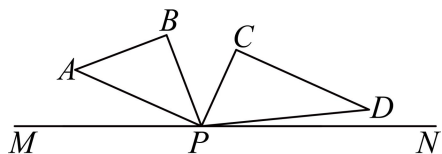
则 $\angle APC = \angle C = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle MPA + \angle APC + \angle DPC + \angle NPD = 180^\circ$ ，

$\therefore 3t + 90^\circ + 60^\circ + 2t = 180^\circ$

解得： $t = 6$ ；

当 $AB \parallel PD$ 时，



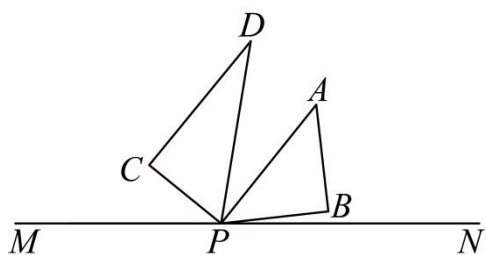
$\therefore \angle BPD = \angle B = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle MPA + \angle APB + \angle DPB + \angle NPD = 180^\circ$

$\therefore 3t + 45^\circ + 90^\circ + 2t = 180^\circ$ ，

解得： $t = 9$ ；

当 $CD \parallel AP$ 时，



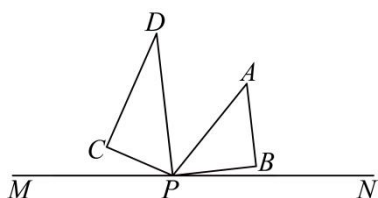
则 $\angle APD = \angle D = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle MPA + \angle NPD - \angle APD = 180^\circ$ ，

$\therefore 3t + 2t - 30^\circ = 180^\circ$ ，

解得： $t = 42$ ；

当 $AB \parallel PD$ 时，



则 $\angle APD = \angle A$,

$$\because \angle DB = 90^\circ, \quad \angle BPA = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 180^\circ - \angle B - \angle BPA = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle APD = 45^\circ$$

$$\because \angle MPA + \angle NPD - \angle APD = 180^\circ,$$

$$\therefore 3t + 2t - 45^\circ = 180^\circ,$$

解得: $t = 45$,

综上所述: 运动时间为 6 或 9 或 42 或 45 秒, 使得其中一块三角尺的直角边与另一块三角尺的斜边平行.

【点睛】 本题考查了旋转的性质, 平行线的性质, 三角形的内角和定理, 角的和差计算, 以及一元一次方程的应用, 难度较大, 注意分类讨论思想的应用,