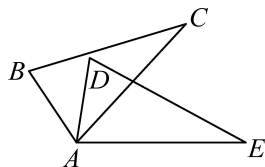


上海民办位育中学 2024 学年第二学期学科练习七年级数学

练习时长：70 分钟 练习分值：100 分

一、选择题（共 6 小题，满分 12 分，每小题 2 分）

1. 如图， $\triangle ABC \cong \triangle ADE$ ， $\angle B = 80^\circ$ ， $\angle C = 30^\circ$ ， $\angle DAC = 30^\circ$ ，则 $\angle EAC$ 的度数为（ ）



- A. 40° B. 35° C. 30° D. 25°

【答案】A

【解析】

【分析】由三角形内角和定理和全等三角形性质可得 $\angle DAE = 70^\circ$ ，再由 $\angle DAC = 30^\circ$ 可得 $\angle EAC = 40^\circ$ 。

【详解】解： $\because \angle B = 80^\circ$ ， $\angle C = 30^\circ$ ，

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - \angle B - \angle C = 70^\circ,$$

$$\because \triangle ABC \cong \triangle ADE,$$

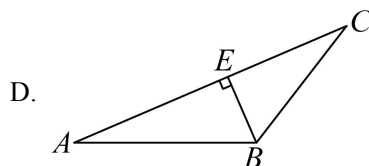
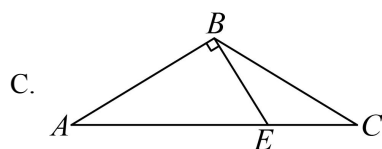
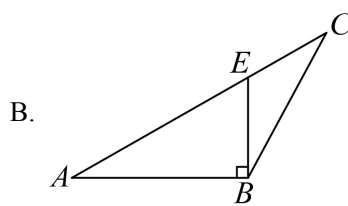
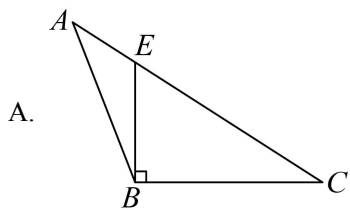
$$\therefore \angle DAE = \angle BAC = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle DAE - \angle DAC = 70^\circ - 30^\circ = 40^\circ,$$

故选 A.

【点睛】本题考查三角形全等的应用，熟练掌握全等三角形的性质和三角形内角和定理是解题关键。

2. 下列四个图形中，线段 BE 是 $\triangle ABC$ 的高的是（ ）



【答案】D

【解析】

【分析】本题考查三角形的高的定义，从三角形的一个顶点作对边的垂线，顶点与垂足所连线段即为三角形的高。

根据三角形的高的定义逐项进行判断即可.

【详解】解: 选项 D 的图形中, 线段 BE 是 ABC 的高, 其他图形均不符合三角形高的定义;
故选: D.

3. 根据下列已知条件, 能画出唯一的 $\triangle ABC$ 的是 ()

A. $AB=5$, $BC=4$, $AC=10$

B. $\angle A=45^\circ$, $\angle C=60^\circ$, $BC=8$

C. $\angle A=80^\circ$, $AB=6$, $BC=7$

D. $\angle C=90^\circ$, $AB=9$

【答案】B

【解析】

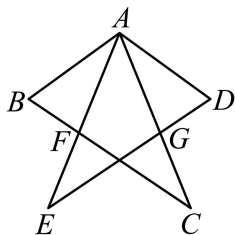
【分析】要满足唯一画出 $\triangle ABC$, 就要求选项给出的条件符合三角形全等的判定方法, 不符合判定方法的画出的图形不一样, 也就是三角形不唯一, 而各选项中只有 C 选项符合 ASA , 是满足题目要求的, 于是答案可得.

【详解】解: A、因为 $AB+BC < AC$, 所以这三边不能构成三角形;
B、已知两角可得到第三个角的度数, 已知一边, 则可以根据 ASA 来画一个三角形;
C、因为 $\angle A$ 不是已知两边的夹角, 无法确定其他角的度数与边的长度;
D、只有一个角和一个边无法根据此作出一个三角形.

故选: B.

【点睛】此题主要考查了全等三角形的判定及三角形的作图方法等知识点; 能画出唯一三角形的条件一定要满足三角形全等的判定方法, 不符合判定方法的画出的三角形不确定, 当然不唯一.

4. 据史书记载, 最早的风筝是由古代匠人墨子用木头制成的木鸟, 称为“木鸢”. 后来随着造纸术的发明, 人们开始用纸张和竹条制作风筝, 使其更加轻便、易于放飞. 在如图所示的“风筝”图案中, $AB=AD$ 、 $\angle B=\angle D$ 、 $BC=DE$. 则不一定能得到以下哪个结论 ()



A. $\triangle ABC \cong \triangle ADE$

B. $\triangle ABF \cong \triangle ADG$

C. $FC=GE$

D. $AG=GC$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的判定, 根据图形分析利用手拉手模型解决是解题的关键.

根据已知条件, 分析 ABC 和 ADE , 易得 $\triangle ABC \cong \triangle ADE(SAS)$, 证明 A, 得出

$\angle BAC = \angle DAE, BC = DE$ ，再由全等三角形的判定和性质即可证明 B、C.

【详解】解：在 ABC 和 ADE 中，

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle B = \angle D, \\ BC = DE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADE$ (SAS)，故选项 A 不符合题意；

$\therefore \angle BAC = \angle DAE, BC = DE$ ，

$\therefore \angle BAC - \angle EAC = \angle DAE - \angle EAC$ ，即 $\angle BAE = \angle DAG$ ，

$\therefore AB = AD, \angle B = \angle D$ ，

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle ADG$ (ASA)，故选项 B 不符合题意；

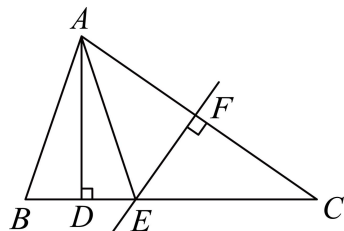
$\therefore BF = DG$ ，

$\therefore BC - BF = DE - DG$ ，即 $FC = GE$ ，故选项 C 不符合题意；

无法证明 $AG = GC$ ，故选项 D 符合题意；

故选：D

5. 如图，在 ABC 中， $AB = AE$ ，且 $AD \perp BC$ ， EF 垂直平分 AC ，交 AC 于点 F 。若 ABC 的周长为 20， $DC = 6$ ，则 AC 的长为 ()



A. 5

B. 4

C. 10

D. 8

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了线段垂直平分线的性质，等腰三角形的性质，线段的和差，解题的关键是根据性质找出相等的线段.

根据条件得出等腰三角形，依据等腰三角形的三线合一，得出相等线段，然后依据垂直平分线的性质找出相等的线段，利用线段的和差即可求出结果.

【详解】解： $\because AB = AE$ ，且 $AD \perp BC$ ，

$\therefore \triangle ABE$ 是等腰三角形，根据三线合一可得，

$$BD = DE,$$

$\because EF$ 垂直平分 AC ,

$$\therefore AE = CE,$$

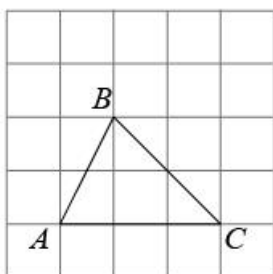
$$\therefore AB = AE = CE,$$

$$\backslash AB + BD = DE + EC = DC = 6,$$

$$\backslash AC = 20 - (AB + BD) - DC = 8,$$

故选: D.

6. 如图, 在 5×5 方格中, 每个小方格都是边长为 1 的正方形, ABC 是格点三角形 (即顶点恰好是正方形的顶点), 那么与 ABC 有一条公共边且全等的所有格点三角形的个数是 ().



A. 2

B. 3

C. 4

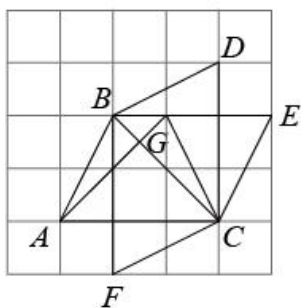
D. 5

【答案】 C

【解析】

【分析】 以 BC 为公共边时有 3 个三角形, 以 AC 为公共边时有 1 个三角形与 $\triangle ABC$ 全等.

【详解】 解析: 画出符合题意要求的三角形如图所示



以 BC 为公共边的三角形有 3 个, 分别是 $\triangle BCD$, $\triangle BCE$, $\triangle BCF$

以 AB 为公共边的三角形有 0 个

以 AC 为公共边的三角形有 1 个, 为 $\triangle ACG$

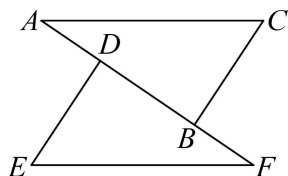
共 $3 + 0 + 1 = 4$ 个

故选: C

【点睛】本题考查了全等三角形的判定的应用，找出符合条件的所有三角形是解此题的关键．解题时考虑要全面，不要漏解．

二、填空题（共 12 小题，满分 36 分，每小题 3 分）

7. 如图，已知 $\triangle ABC \cong \triangle FDE$ （ $\angle A$ 与 $\angle F$ ， $\angle C$ 与 $\angle E$ 分别对应）， $AD = 2$ ， $BD = 3$ ，则 FD 的值为_____．



【答案】5

【解析】

【分析】本题考查全等三角形的性质，关键是掌握全等三角形的对应边相等．由全等三角形的对应边相等，即可得到答案．

【详解】解：∵ $AD = 2$ ， $BD = 3$ ，
∴ $AB = AD + BD = 5$ ，
∵ $\triangle ABC \cong \triangle FDE$ ，
∴ $FD = AB = 5$ ．

故答案为：5．

8. 已知等腰三角形的一个内角为 140° ，则等腰三角形的底角的度数为_____度．

【答案】20

【解析】

【分析】本题考查等边对等角，三角形的内角和定理，根据等腰三角形的两个底角相等，结合三角形的内角和定理，进行求解即可．

【详解】解：∵ $140^\circ + 140^\circ > 180^\circ$ ，
∴ 140° 的角为等腰三角形的顶角，
∴ 等腰三角形的底角的度数为 $\frac{1}{2} \times (180^\circ - 140^\circ) = 20^\circ$ ；

故答案为：20

9. 如果等腰三角形的两边长为 2cm，4cm，那么它的周长为_____cm．

【答案】10

【解析】

【分析】本题主要考查等腰三角形的性质，三角形的三边关系，熟练掌握三角形的三边关系是解题的关键．根

据等腰三角形的性质，得到 2cm 为腰时无法构成三角形，以 4cm 为腰时符合题意，即可得到答案.

【详解】解：2cm 为腰时，三角形三边分别为 2,2,4，

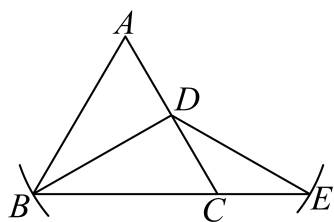
$\because 2+2=4$ ，无法构成三角形；

以 4cm 为腰时，三角形三边分别为 2,4,4，

那么它的周长为 $2+4+4=10\text{cm}$.

故答案为：10 .

10. 如图， BD 是等边三角形 ABC 的边 AC 上的中线，以点 D 为圆心， DB 长为半径画弧交 BC 的延长线于点 E ，则 $\angle CDE =$ _____.



【答案】 30° ## 30 度

【解析】

【分析】 本题主要考查等边三角形的性质，等腰三角形的性质，熟练掌握性质定理是解题的关键. 根据等边三角形得到 $\angle ABC = 60^\circ$ ，根据三线合一得到 $\angle DBC$ 的度数，进而根据三角形的外角的性质即可得到答案.

【详解】解：在等边 ABC 中， $\angle ABC = \angle ACB = 60^\circ$ ，

$\because BD$ 是等边 ABC 的边 AC 上的中线，

$\therefore BD$ 平分 $\angle ABC$ ，

$\therefore \angle DBC = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ$ ，

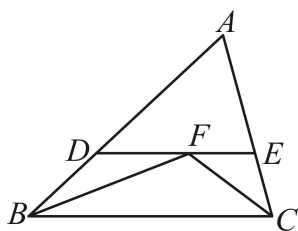
$\because BD = ED$ ，

$\therefore \angle DEC = \angle CBD = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle CDE = \angle ACB - \angle DEC = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$

故答案为： 30° .

11. 如图，在 ABC 中，已知 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线相交于点 F ，过 F 作 $DE \parallel BC$ ，交 AB 于点 D ，交 AC 于点 E ，若 $BD = 3, CE = 2$ ，则线段 DE 的长为_____.



【答案】 5

【解析】

【分析】 本题考查了角平分线以及平行线性质的应用，掌握以上知识是解题关键.

题干要求线段 EC 的长，根据 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线相交于点 F ，且 $DE \parallel BC$ 得到 $BD = DF, EF = EC$ ，从而进行分析即可求解.

【详解】 解： $\because \angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线相交于 F 点，

$$\therefore \angle DBF = \angle FBC, \angle ECF = \angle FCB,$$

又 $DE \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle DBF = \angle FBC = \angle DFB, \angle ECF = \angle FCB = \angle EFC$$

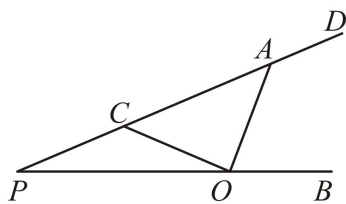
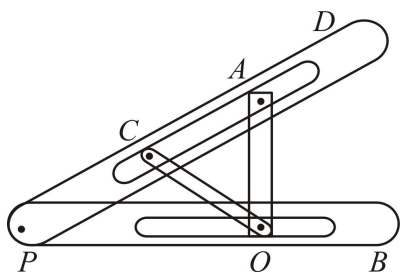
$$\therefore BD = DF, EF = EC,$$

$$\because BD = 3, CE = 2,$$

$$\therefore DE = DF + EF = BD + CE = 5.$$

故答案为： 5.

12. 如图“三等分角”大约是在公元前五世纪由古希腊人提出来的，借助如图所示的“三等分角仪”能三等分任一角. 这个三等分角仪由两根有槽的棒 PB ， PD 组成，两根棒在 P 点相连并可绕 P 转动， C 点固定， $CP = OC = OA$ ，点 O ， A 可在槽中滑动，若 $\angle AOB = 75^\circ$ ，则 $\angle P$ 的度数是_____.



【答案】 25° 度

【解析】

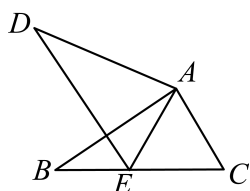
【分析】 本题主要考查了等腰三角形的性质以及三角形的外角性质. 先根据等边对等角求出 $\angle P = \angle COP = x$ ，再由三角形外角性质求得 $\angle OAC = \angle OCA = 2x$ ，最后由三角形外角性质列式计算即可求解.

【详解】 解： 设 $\angle P = x$ ，

$\because CP = OC,$
 $\therefore \angle P = \angle COP = x,$
 $\therefore \angle OCA = 2\angle P = 2x,$
 $\because OC = OA,$
 $\therefore \angle OAC = \angle OCA = 2x,$
 $\therefore \angle AOB = \angle P + \angle OAC = 3x = 75^\circ,$
 解得 $x = 25^\circ$, 即 $\angle P = 25^\circ$.

故答案为: 25° .

13. 如图在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 60^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转得到 $\triangle ADE$, 点 C 的对应点 E 恰好落在边 BC 上, 若 $AC = 5$, 则 $CE =$ _____.



【答案】 5

【解析】

【分析】本题考查了旋转的性质, 等边三角形的判定和性质, 由旋转的性质可得 $AE = AC$, 进而可得 $\triangle ACE$ 是等边三角形, 据此即可求解, 掌握旋转的性质是解题的关键.

【详解】解: $\because$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转得到 $\triangle ADE$,

$\therefore AE = AC,$

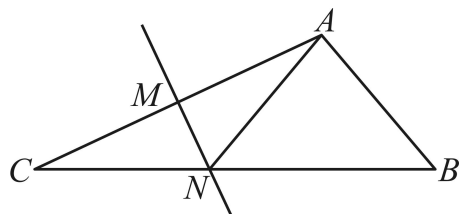
$\because \angle C = 60^\circ,$

$\therefore \triangle ACE$ 为等边三角形,

$\therefore CE = AC = 5,$

故答案为: 5.

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 25^\circ$, AC 的垂直平分线 MN 交 BC 于点 N , 且 $AB + BN = BC$, 则 $\angle B$ 的度数是_____°.



【答案】 50

【解析】

【分析】 本题考查的是垂直平分线的性质，等边对等角，三角形的外角的性质，先证明 $NA = NC$ ，可得 $\angle C = \angle NAC = 25^\circ$ ，求解 $\angle ANB = \angle C + \angle CAN = 50^\circ$ ，证明 $AB = CN = AN$ ，从而可得答案.

【详解】 解： $\because AC$ 的垂直平分线 MN 交 BC 于点 N ,

$\therefore NA = NC$ ，而 $\angle C = 25^\circ$ ，

$\therefore \angle C = \angle NAC = 25^\circ$ ，

$\therefore \angle ANB = \angle C + \angle CAN = 50^\circ$ ，

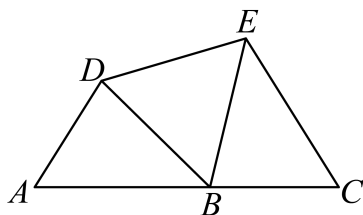
$\because AB + BN = BC$ ， $CN + BN = BC$ ，

$\therefore AB = CN = AN$ ，

$\therefore \angle B = \angle ANB = 50^\circ$ ，

故答案为： 50

15. 如图已知 A 、 B 、 C 在同一条直线上，且 $\angle A = \angle C = 56^\circ$ 、 $AB = CE$ 、 $AD = BC$ ，那么 $\angle BDE$ 的度数是_____°.



【答案】 62

【解析】

【分析】 先根据 SAS 证明 $\triangle ADB \cong \triangle CBE$ ，即得出 $\angle 1 = \angle 4$ ， $\angle 2 = \angle 6$ ， $DB = BE$ ，又根据平角定义、三角形内角和、等边对等角等知识点即可解答.

【详解】 解：如图，

$$\because \text{在 } \triangle ADB \text{ 和 } \triangle CBE \text{ 中 } \begin{cases} AB = CE \\ \angle A = \angle C, \\ AD = CB \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADB \cong \triangle CBE$ (SAS),

$\therefore \angle 1 = \angle 4$ ， $\angle 2 = \angle 6$ ， $DB = BE$ ，

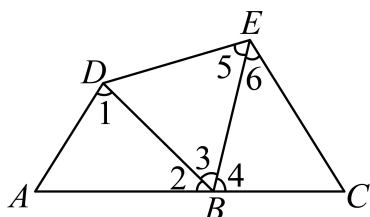
$\because \angle 1 + \angle 2 + \angle A = 180^\circ$ ， $\angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ ， $\angle A = 56^\circ$ ，

$\therefore \angle 3 = \angle A = 56^\circ$ ，

$\because$ 在 $\triangle DBE$ 中， $DB = BE$ ，

$$\therefore \angle BDE = \angle 5 = (180^\circ - \angle 3) \div 2 = 62^\circ,$$

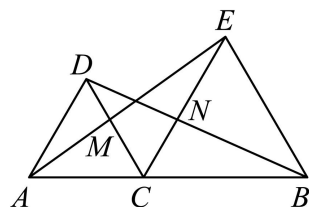
故答案为：62．



【点睛】本题考查全等三角形的判定和性质、三角形内角和定理，等边对等角．熟练掌握以上性质并利用数形结合的思想是解题关键．

16. 如图， $\triangle DAC$ 和 $\triangle EBC$ 均是等边三角形， AE 、 BD 分别与 CD 、 CE 交于点 M 、 N ，有如下结论：

① $\triangle ACE \cong \triangle DCB$ ；② $CM = CN$ ；③ $AC = DN$ ；④ $\angle DAE = \angle DBC$ ．其中正确的有_____．（只填序号）



【答案】①②④

【解析】

【分析】根据等边三角形的性质及全等三角形的判定和性质、三角形中大角对大边依次进行判断证明即可．

【详解】解： $\because \triangle DAC$ 和 $\triangle EBC$ 均是等边三角形，

$$\therefore AC = CD, BC = CE, \angle ACD = \angle BCE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD + \angle DCE = \angle BCE + \angle DCE,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle BCD,$$

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BCD$ 中

$$\begin{cases} AC = CD \\ \angle ACE = \angle BCD, \\ BC = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle DCB \text{ (SAS)};$$

$$\therefore \text{①正确};$$

$$\because \angle ACD = \angle BCE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ = \angle ACD,$$

$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle DCB,$$

$$\therefore \angle NDC = \angle CAM,$$

在 $\triangle ACM$ 和 $\triangle DCN$ 中

$$\begin{cases} \angle CAM = \angle CDN \\ AC = CD \\ \angle ACM = \angle DCN \end{cases},$$

$\therefore \triangle ACM \cong \triangle DCN$ (ASA),

$\therefore CM = CN, AM = DN,$

$\therefore$ ②正确;

$\therefore \triangle ADC$ 是等边三角形,

$\therefore AC = AD,$

$\angle ADC = \angle ACD,$

$\therefore \angle AMC > \angle ADC,$

$\therefore \angle AMC > \angle ACD,$

$\therefore AC > AM,$

即 $AC > DN,$

$\therefore$ ③错误;

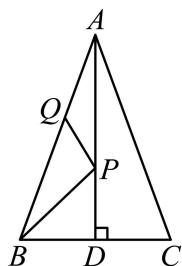
$\therefore \angle DBC + \angle CDB = 60^\circ, \angle DAE + \angle EAC = 60^\circ,$ 而 $\angle EAC = \angle CDB,$

$\therefore \angle DAE = \angle DBC,$ ④正确,

故答案为①②④.

【点睛】 本题考查了等边三角形的性质; 熟练掌握等边三角形的性质, 能够用全等求解边相等, 角相等是解题的关键.

17. 如图, 等腰 ABC , $AB = AC$, $\angle BCA = 70^\circ$, $AD \perp BC$ 于点 D , 点 P, Q 分别为 AD, AB 上的动点, 联结 BP, PQ , 当 $BP + PQ$ 最小时, $\angle PBD =$ _____ $^\circ$.



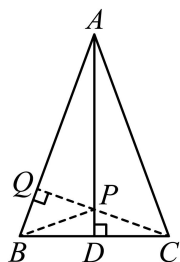
【答案】 20

【解析】

【分析】 本题考查等腰三角形的性质, 垂线段最短, 三角形的内角和定理, 理解等腰三角形的性质和垂线

段最短是解题的关键. 过点 C 作 $CQ \perp AB$, 垂足为 Q , 根据等腰三角形的性质可得 AD 垂直平分 BC , 因此 $BP = CP$, 故当 $BP + PQ$ 最小时, 即 $CP + PQ$ 最小, 此时 C, P, Q 共线, 且 $CQ \perp AB$, 根据三角形的内角和与等腰三角形的两底角相等可求得 $\angle ACB = \angle ABC = 70^\circ$, $\angle ACQ = 50^\circ$, 从而 $\angle QCB = \angle PBD = 20^\circ$.

【详解】解: 如图, 过点 C 作 $CQ \perp AB$, 垂足为 Q ,



$\because$ 等腰 ABC , $AB = AC$, $AD \perp BC$ 于点 D ,

$\therefore AD$ 垂直平分 BC ,

$\therefore BP = CP$,

当 $BP + PQ$ 最小时, 即 $CP + PQ$ 最小,

$\therefore$ 此时 C, P, Q 共线, 且 $CQ \perp AB$,

$\because \angle BCA = 70^\circ$,

$\therefore \angle BCA = \angle ABC = 70^\circ$,

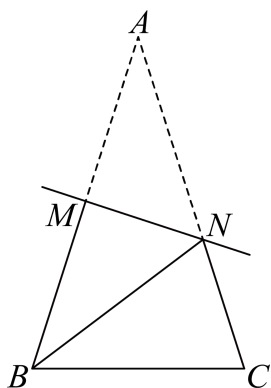
$\therefore \angle BAC = 180^\circ - \angle BCA - \angle ABC = 40^\circ$,

$\therefore \angle ACQ = 50^\circ$,

$\therefore \angle QCB = \angle PBD = 20^\circ$.

故答案为: 20.

18. 在 ABC 中, $AB = AC$, 把 ABC 折叠, 使点 B 与点 A 重合, 折痕交 AB 于点 M , 交 AC 于点 N . 如果 $\triangle CBN$ 是等腰三角形, 则 $\angle C$ 的度数为_____.



【答案】 72° 或 $\left(\frac{540}{7}\right)^\circ$

【解析】

【分析】 本题考查等腰三角形的性质，设 $\angle A = \alpha$ ，根据等边对等角得 $\angle ABC = \angle ACB = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$ ，根据折叠的性质得 $AN = BN$ ，继而得到 $\angle NBA = \angle A = \alpha$ ， $\angle BNC = \angle NBA + \angle A = 2\alpha$ ， $\angle NBC = \frac{180^\circ - 3\alpha}{2}$ ，然后分三种情况：①若 $NB = NC$ ；②若 $BN = BC$ ；③若 $CB = CN$ ，分别建立关于 α 的一元一次方程，求解即可。解题的关键是掌握等边对等角，方程思想和分类讨论思想的应用。

【详解】 解：设 $\angle A = \alpha$ ，

$\because AB = AC$ ，

$$\therefore \angle ABC = \angle C = \frac{180^\circ - \alpha}{2},$$

$\because$ 把 ABC 折叠，使点 B 与点 A 重合，

$\therefore AN = BN$ ，

$\therefore \angle NBA = \angle A = \alpha$ ，

$\therefore \angle BNC = \angle NBA + \angle A = \alpha + \alpha = 2\alpha$ ，

$$\therefore \angle NBC = 180^\circ - \angle C - \angle BNC = 180^\circ - \frac{180^\circ - \alpha}{2} - 2\alpha = \frac{180^\circ - 3\alpha}{2}$$

$\because \triangle CBN$ 是等腰三角形，

①若 $NB = NC$ ，则 $\angle NBC = \angle C$ ，

$$\text{即 } \frac{180^\circ - 3\alpha}{2} = \frac{180^\circ - \alpha}{2},$$

解得： $\alpha = 0^\circ$ ，不符合题意；

②若 $BN = BC$ ，则 $\angle C = \angle BNC$ ，

$$\text{即 } \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 2\alpha,$$

解得: $\alpha = 36^\circ$,

$$\therefore \angle C = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ;$$

③若 $CB = CN$, 则 $\angle NBC = \angle BNC$,

$$\text{即 } \frac{180^\circ - 3\alpha}{2} = 2\alpha,$$

$$\text{解得: } \alpha = \left(\frac{180}{7}\right)^\circ,$$

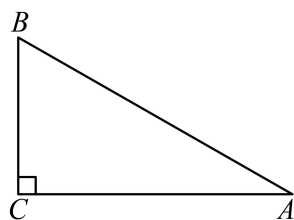
$$\therefore \angle C = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = \frac{180^\circ - \left(\frac{180}{7}\right)^\circ}{2} = \left(\frac{540}{7}\right)^\circ,$$

综上所述, $\angle C$ 的度数为 72° 或 $\left(\frac{540}{7}\right)^\circ$.

故答案为: 72° 或 $\left(\frac{540}{7}\right)^\circ$.

三、解答题 (共 6 小题, 满分 52 分)

19. 如图所示, 在 ABC 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$.



(1) 尺规作图: 作 AB 的垂直平分线 DE , 垂足为 D , 交 AC 于点 E . (保留作图痕迹, 不要求写作法)

(2) 应用与证明: 在 (1) 的条件下, 求证: $DE = EC$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

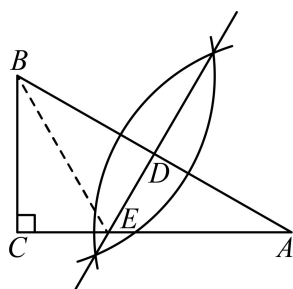
【分析】本题考查尺规作图——作垂线, 角平分线的性质, 熟练掌握相关知识点, 是解题的关键:

(1) 分别以 A, B 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径画弧, 连接两弧的交点, 交 AB 于 D , 交 AC 于点 E 即可;

(2) 等边对等角, 易得 $\angle CBE = \angle ABE$, 进而得到 BE 平分 $\angle ABC$, 即可得证.

【小问 1 详解】

解: 由题意, 作图如下:



【小问 2 详解】

连接 BE ,

$\because DE$ 是 AB 的垂直平分线,

$\therefore BE = AE$,

$\therefore \angle ABE = \angle A = 30^\circ$,

$\because \angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$,

$\therefore \angle ABC = 60^\circ$, $CE \perp BC$,

$\therefore \angle CBE = \angle ABC - \angle ABE = 30^\circ$,

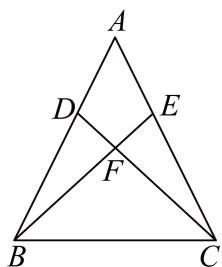
$\therefore \angle CBE = \angle ABE$,

$\therefore BE$ 平分 $\angle ABC$,

$\because CE \perp BC, DE \perp AB$,

$\therefore DE = EC$.

20. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = \angle ACB$, 点 D , E 分别在边 AB 和 AC 上, 连接 BE , CD , 交点为 F , 且 $AD = \frac{1}{3}AB$, $AE = \frac{1}{3}AC$.



(1) 求证: $CD = BE$.

(2) 求证: $DF = EF$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据等角对等边, 得到 $AB = AC$, 结合 $AD = \frac{1}{3}AB$, $AE = \frac{1}{3}AC$, 得到 $AD = AE$, 通过 $\triangle ACD \cong \triangle ABE$ (SAS), 即可求解,

(2) 由 $\triangle ACD \cong \triangle ABE$ ，得到 $\angle ACD = \angle ABE$ ， $\angle CFE = \angle BFD$ ，结合 $BD = CE$ ，得到 $\triangle BDF \cong \triangle CEF$ (AAS)，即可求解，

本题考查了，等角对等边，全等三角形的性质与判定，解题的关键是：全等三角形的性质与判定.

【小问 1 详解】

解： $\because \angle ABC = \angle ACB$ ，

$$\therefore AB = AC,$$

$$\because AD = \frac{1}{3}AB, \quad AE = \frac{1}{3}AC,$$

$$\therefore AD = AE,$$

$$\text{在 } \triangle ACD \text{ 和 } \triangle ABE \text{ 中, } \begin{cases} AD = AE \\ \angle CAD = \angle BAE, \\ AC = AB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle ABE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore CD = BE,$$

【小问 2 详解】

解：由 (1) 得 $\triangle ACD \cong \triangle ABE$ ，

$$\therefore \angle ACD = \angle ABE,$$

$$\because AB = AC, \quad AD = AE,$$

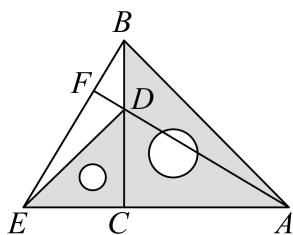
$$\therefore BD = CE,$$

$$\because \angle CFE = \angle BFD,$$

$$\therefore \triangle BDF \cong \triangle CEF \text{ (AAS)},$$

$$\therefore DF = EF.$$

21. 把两个含有 45° 角的直角三角板如图放置，点 D 在 BC 上，连接 BE 、 AD ， AD 的延长线交 BE 于点 F .



(1) 求证： $AD = BE$ ；

(2) 求证： $AF \perp BE$.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的判定与性质，等腰直角三角形的性质，直角三角形的两个锐角互余，解题关键是利用直角三角形的性质求解.

(1) 由 SAS 判定 $\triangle ECB \cong \triangle DCA$ ，根据全等三角形的性质可得 $AD = BE$ ；

(2) 利用全等三角形的性质可得 $\angle BEC = \angle ADC$ ，再证明 $\angle BEC + \angle DAC = 90^\circ$ ，即可得出结论成立.

【小问 1 详解】

解： $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ECD$ 都是等腰直角三角形，

$\therefore \angle ECD = \angle BCA = 90^\circ$ ， $CE = CD$ ， $BC = AC$ ，

$\therefore$ 在 $\triangle ECB$ 和 $\triangle DCA$ 中，

$$\begin{cases} CE = CD \\ \angle ECD = \angle BCA, \\ BC = AC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ECB \cong \triangle DCA$ (SAS),

$\therefore AD = BE$ ；

【小问 2 详解】

$\because \triangle ECB \cong \triangle DCA$ ，

$\therefore \angle BEC = \angle ADC$ ，

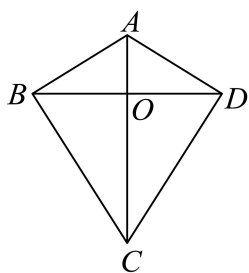
又 $\angle ADC + \angle DAC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BEC + \angle DAC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AFE = 90^\circ$.

$\therefore AF \perp BE$.

22. “风筝飞满天，笑语乐无边”，由喜闻乐见的风筝可以抽象得到一种特殊的四边形——筝形. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $CB = CD$ ，我们把这种两组邻边分别相等的四边形叫做筝形. 初步认识筝形后，数学活动小组的同学通过观察、测量、折纸等方法猜想筝形有什么性质，小明观察后认为 AC 垂直平分 BD ，请你帮助小明从几何证明的角度说明这一筝形性质.



已知：在四边形（筝形） $ABCD$ 中，_____，_____，求证：_____

（请把横线上的“已知”“求证”内容补充完成，并完成后续相应证明过程）

【答案】 $AB = AD$ ， $CB = CD$ ， AC 垂直平分 BD ，证明见解析

【解析】

【分析】此题考查了垂直平分线的判定，根据 $AB = AD$ ， $CB = CD$ ，得到点 A, C 均在线段 BD 的垂直平分线上，即可证明结论成立。

【详解】已知：在四边形（筝形） $ABCD$ 中， $AB = AD$ ， $CB = CD$ ，
求证： AC 垂直平分 BD

证明： $\because AB = AD$ ， $CB = CD$ ，

$\therefore$ 点 A, C 均在线段 BD 的垂直平分线上，

$\therefore AC$ 垂直平分 BD ；

故答案为： $AB = AD$ ， $CB = CD$ ， AC 垂直平分 BD

23. 在 ABC 中， $AB = AC$.

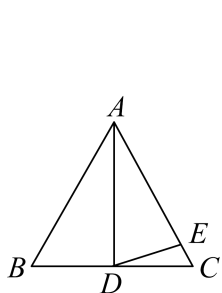


图1

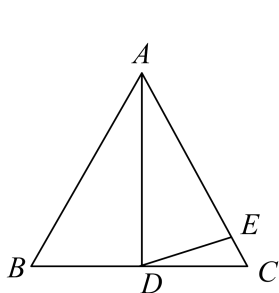


图2

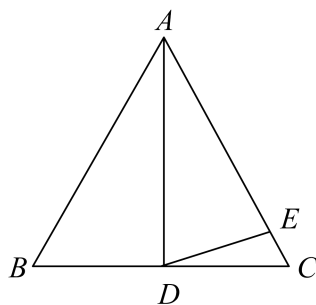


图3

(1) AD 是 BC 上的高， $AD = AE$.

①如图 1，如果 $\angle BAD = 20^\circ$ ，则 $\angle EDC = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$ ；

②如图 2，如果 $\angle BAD = 50^\circ$ ，则 $\angle EDC = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 思考：通过以上两小题，你发现 $\angle BAD$ 与 $\angle EDC$ 之间有什么关系？请用式子表示：_____ .

(3) 如图 3，如果 AD 不是 BC 上的高， $AD = AE$ ，是否仍有上述关系？如有，请你写出来，并说明理由.

【答案】(1) ①10; ②25°;

(2) $\angle EDC = \frac{1}{2} \angle BAD$;

(3) 仍成立, 理由见解析.

【解析】

【分析】本题考查等腰三角形的性质, 三角形内角和定理, 熟练掌握等腰三角形“三线合一”和等边对等角的性质是解题的关键.

(1) ①等腰三角形三线合一, 所以 $\angle DAE = 20^\circ$, 又因为 $AD = AE$, 所以 $\angle ADE = \angle AED = 80^\circ$, 所以 $\angle EDC = 10^\circ$.

②同理, 证明 $\angle ADE = 65^\circ$, 所以 $\angle EDC = 25^\circ$.

(2) 利用等腰三角形“三线合一”的性质得 $\angle BAD = \angle CAD$, 再根据 $AD = AE$, 得 $\angle ADE = \angle AEC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle DAE) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle DAE$, 再根据 $\angle EDC = 90^\circ - \angle ADE = \frac{1}{2}\angle DAE$, 从而可得出结论 $\angle EDC = \frac{1}{2}\angle BAD$.

(3) 由于 $AD = AE$, 所以 $\angle ADE = \angle AED$, 根据已知, 证明 $\angle BAD + \angle B = 2\angle EDC + \angle C$, 而 $B = \angle C$, 所以 $\angle BAD = 2\angle EDC$.

【小问1详解】

解: ①在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, AD 是 BC 上的高,

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD,$$

$$\because \angle BAD = 20^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD = 20^\circ,$$

$$\because AD = AE,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AED = 80^\circ,$$

$\because AD$ 是 BC 上的高,

$$\therefore \angle EDC = 90^\circ - \angle ADE = 10^\circ.$$

故答案为: 10;

② $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, AD 是 BC 上的高,

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD,$$

$$\because \angle BAD = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD = 40^\circ,$$

$$\because AD = AE,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AED = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle EDC = 20^\circ.$$

故答案为：20；

【小问 2 详解】

解：在 ABC 中， $AB = AC$ ， AD 是 BC 上的高，

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD,$$

$$\therefore AD = AE$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AEC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle DAE) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle DAE,$$

$$\therefore AD \text{ 是 } BC \text{ 上的高,}$$

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle EDC = 90^\circ - \angle ADE = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\angle DAE\right) = \frac{1}{2}\angle DAE$$

$$\therefore \angle EDC = \frac{1}{2}\angle BAD.$$

【小问 3 详解】

解：仍成立，理由如下：

$$\because AD = AE,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AED,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle B = \angle ADC = \angle ADE + \angle EDC = \angle AED + \angle EDC = (\angle EDC + \angle C) + \angle EDC$$

$$= 2\angle EDC + \angle C,$$

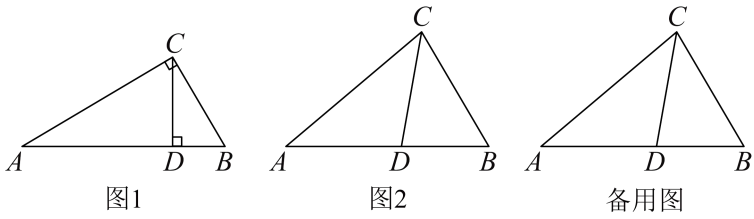
$$\text{又} \because AB = AC,$$

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

$$\therefore \angle BAD = 2\angle EDC, \text{ 即 } \angle EDC = \frac{1}{2}\angle BAD.$$

24. 请根据以下素材，完成探究任务.

探究等角三角形		
素材	定义 1	如果一个三角形的三个角分别等于另一个三角形的三个角，那么称这两个三角形互为“等角三角形”.
	定义 2	从三角形（不是等腰三角形）一个顶点引出一条射线与对边相交，顶点与交点之间的线段把这个三角形分割成两个小三角形，如果分

		得的两个小三角形中一个为等腰三角形，另一个与原来三角形是“等角三角形”，我们把这条线段叫做这个三角形的“等角分割线”。
任务图	 图1 图2 备用图	
探究任务	任务 1	如图 1，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$ ， $\triangle BCD$ 和 $\triangle ACD$ _____ 等角三角形（填“是”或者“不是”）。
	任务 2	如图 2，在 $\triangle ABC$ 中， CD 为角平分线， $\angle A = 40^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，求证： CD 为 $\triangle ABC$ 的等角分割线。
	任务 3	在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 42^\circ$ ， CD 是 $\triangle ABC$ 的等角分割线，若 $\triangle ACD$ 是等腰三角形，请求出 $\angle ACB$ 的度数。

【答案】任务 1：是；任务 2：见解析；任务 3： 84° 或 111°

【解析】

【分析】任务 1：推出 $\angle ADC = \angle BDC = 90^\circ$ ， $\angle A = \angle BCD$ ， $\angle ACD = \angle B$ ，从而得出结论；

任务 2：可计算得出 $\angle ACD = \angle A$ ，得出 $\triangle ACD$ 是等腰三角形，再结合 $\angle BCD = \angle A = 60^\circ$ ， $\angle B = \angle B$ ， $\angle BDC = \angle ACB = 80^\circ$ ，从而得出结论；

任务 3：当 $\triangle ACD$ 是等腰三角形时，分为： $AC = AD$ ， $AD = CD$ ， $AC = CD$ 三种情形讨论即可；

本题是在新定义的基础上，考查了等腰三角形的分类等知识，解决问题的关键是正确分类讨论。

【详解】解：任务 1：是

$\because CD \perp AB$

$\therefore \angle ADC = \angle BDC = 90^\circ$

$\therefore \angle A + \angle ACD = 90^\circ$

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$

$$\therefore \angle ACD + \angle BCD = 90^\circ$$

$$\therefore \angle A = \angle BCD$$

$$\therefore \angle ACD = \angle B$$

$\therefore \triangle BCD$ 和 $\triangle ACD$ 是等角三角形;

任务 2:

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 60^\circ$

则 $\angle ACB = 80^\circ$,

$\because CD$ 为角平分线,

$$\therefore \angle ACD = \angle DCB = \frac{1}{2} \angle ACB = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle A,$$

则 $CD = DA$,

$$\because \angle DCB = \angle A, \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = 80^\circ,$$

则 $\angle BDC = \angle ACB$,

$$\because CD = DA, \angle BDC = \angle ACB, \angle DCB = \angle A, \angle B = \angle B,$$

$\therefore CD$ 为 $\triangle ABC$ 的等角分割线.

任务 3:

①当 $DA = DC$ 时, 如图 1,

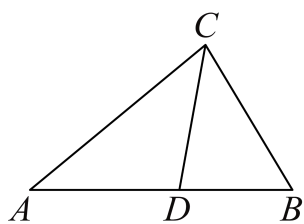


图1

$$\angle ACD = \angle A = 42^\circ,$$

$\because CD$ 是 $\triangle ABC$ 的等角分割线,

$$\therefore \angle ACB = 84^\circ,$$

②当 $DA = AC$ 时, 如图 2,

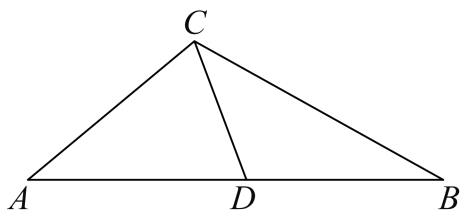


图2

$$\angle ACD = \angle ADC = 69^\circ,$$

$\because CD$ 是 ABC 的等角分割线,

$$\therefore \angle BCD = \angle A = 42^\circ,$$

$$\text{则 } \angle ACB = 69^\circ + 42^\circ = 111^\circ,$$

$$\textcircled{3} \text{ 当 } AC = DC \text{ 时, } \angle ADC = \angle A = 42^\circ,$$

$$\text{则 } \angle BDC = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ = \angle ACB,$$

$$\text{那么 } \angle B = 180^\circ - 42^\circ - 138^\circ = 0^\circ \text{ (舍去),}$$

故 $\angle ACB$ 的度数为 84° 或 111° .