

明星学校 2024 学年第二学期七年级数学第二次阶段测试

(考试时间 90 分钟，满分 100 分)

一、选择题 (本大题 5 小题，每题 3 分，满分 15 分)

1. 若 $a < b$ ，下列运用不等式基本性质变形正确的是 ()

- A. $-5a < -5b$ B. $4-3a < 4-3b$ C. $4a > 4b$ D. $a-3 < b-3$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了不等式的基本性质，熟练掌握不等式的基本性质是解题的关键. 根据不等式的基本性质，对选项逐一分析判断即可.

【详解】解：A、若 $a < b$ ，则应为 $-5a > -5b$ ，原说法错误，故不符合题意；

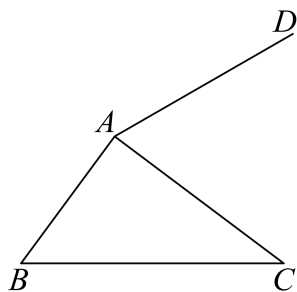
B、若 $a < b$ ，则应为 $4-3a > 4-3b$ ，原说法错误，故不符合题意；

C、若 $a < b$ ，则应为 $4a < 4b$ ，原说法错误，故不符合题意；

D、若 $a < b$ ，则 $a-3 < b-3$ ，原说法正确，故符合题意，

故选：D.

2. 如图所示，下列说法正确的是 ()



A. $\angle B$ 与 $\angle C$ 是同位角

B. $\angle C$ 与 $\angle DAB$ 是内错角

C. $\angle DAC$ 与 $\angle B$ 是同位角

D. $\angle CAB$ 与 $\angle B$ 是同旁内角

【答案】D

【解析】

【分析】根据同位角，内错角，同旁内角的定义解答即可.

本题考查了同位角，内错角，同旁内角的定义，熟练掌握定义是解题的关键.

【详解】解：A. $\angle B$ 与 $\angle C$ 是同旁内角，错误，不符合题意，

- B. $\angle C$ 与 $\angle DAB$ 是内错角，错误，不符合题意，
C. $\angle DAC$ 与 $\angle B$ 是同位角，错误，不符合题意，
D. $\angle CAB$ 与 $\angle B$ 是同旁内角，正确，符合题意，

故选：D.

3. 下列说法中能判断两个三角形全等的是 ()

- A. 有两边对应相等的两个等腰三角形
B. 斜边相等的两个直角三角形
C. 边长为 5cm 的两个等边三角形
D. 有一个钝角相等的两个等腰三角形

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查全等三角形的判定，根据全等三角形的判定方法，逐一进行判断即可.

【详解】解：A、有两边对应相等的两个等腰三角形只有两个条件，无法判断全等，不符合题意；
B、斜边相等的两个直角三角形只有两个条件，无法判断全等，不符合题意；
C、边长为 5cm 的两个等边三角形，利用 SSS 可以判断两个三角形全等，符合题意；
D、有一个钝角相等的两个等腰三角形，AAA 不能判断两个三角形全等，不符合题意；
故选 C.

4. 一个三角形的两边长分别为 4cm 和 7cm，那么第三边的长可能是 ()

- A. 11cm B. 4cm C. 2cm D. 3cm

【答案】B

【解析】

【分析】此题主要考查了三角形的三边关系，关键是掌握三角形两边之和大于第三边；三角形的两边之差小于第三边.

根据三角形的三边关系，第三边的长应大于已知的两边的差，而小于两边的和.

【详解】解：设第三边的长为 x cm，
由三角形的三边关系可得 $7-4 < x < 7+4$ ，
即 $3 < x < 11$ ，
所以它的第三边的长可能是 4cm.

故选：B.

5. 对 a, b 定义一种新运算“ $\otimes$ ”，规定： $a \otimes b = a - 2b$ ．若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} 3x \otimes (-5) < m - 7 \\ x \otimes (2x - 2) < 2 \end{cases}$ 有且只有一个整数解，则 m 的取值范围是 ()

- A. $m \geq 20$ B. $20 < m \leq 23$ C. $20 < m < 23$ D. $20 \leq m \leq 23$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查的是实数的运算，一元一次不等式组的解法和一元一次不等式组的整数解的确定，掌握一元一次不等式组的解法是解题的关键．

本题根据新运算列出不等式组求出 x 的取值范围，根据题意列出关于 m 的不等式组，解不等式组求出实数 m 的取值范围．

【详解】解：由 $\begin{cases} 3x \otimes (-5) < m - 7 \\ x \otimes (2x - 2) < 2 \end{cases}$ ，根据新运算，可化简为： $\begin{cases} 3x - 2 \times (-5) < m - 7 \\ x - 2 \times (2x - 2) < 2 \end{cases}$ ，

解这个不等式组，解得： $\frac{2}{3} < x < \frac{m-17}{3}$ ，

$\therefore$ 关于 x 的不等式组有且只有一个整数解，

$\therefore x = 1$ ，

$\therefore 1 < \frac{m-17}{3} \leq 2$ ，

解得： $20 < m \leq 23$ ，

故选：B．

二、填空题（本大题 14 小题，每题 3 分，满分 42 分）

6. 根据数量关系“ x 的 2 倍与 3 的和小于 4”，列不等式为_____．

【答案】 $2x + 3 < 4$

【解析】

【分析】本题考查了列一元一次不等式，读懂题意，根据题中描述的数量关系正确列出不等式是解题的关键．

根据题中描述的数量关系列出不等式即可．

【详解】解： $\because x$ 的 2 倍为 $2x$ ，

$\therefore x$ 的 2 倍与 3 的和小于 4 可表示为： $2x + 3 < 4$ ，

故答案为： $2x + 3 < 4$ ．

7. 不等式 $x - 2 \leq 1$ 的所有非负整数解的和等于_____．

【答案】6

【解析】

【分析】 本题主要考查了解不等式. 先解不等式, 然后根据非负整数的定义, 即可求解.

【详解】 解: $x-2 \leq 1$,

解得: $x \leq 3$,

$\therefore$ 不等式 $x-2 \leq 1$ 的非负整数解为 0, 1, 2, 3,

$0+1+2+3=6$,

故答案为: 6.

8. 若分式方程 $\frac{2x}{x-1}-1=\frac{a}{x-1}$ 的解为正数, 则 a 的取值范围为_____.

【答案】 $a > 1$ 且 $a \neq 2$

【解析】

【分析】 本题考查分式方程的解及解一元一次不等式, 根据题意得出不等式组是解决问题的关键.

去分母把分式方程化成整式方程, 解方程后得出 $a-1 > 0, a-1 \neq 1$, 解不等式即可得出答案.

【详解】 解: $\frac{2x}{x-1}-1=\frac{a}{x-1}$,

去分母得: $2x-x+1=a$,

移项得: $2x-x=a-1$,

合并同类项得: $x=a-1$,

$\therefore x > 0$ 且 $x-1 \neq 0$,

$\therefore a-1 > 0, a-1 \neq 1$,

$\therefore a > 1$ 且 $a \neq 2$,

故答案为: $a > 1$ 且 $a \neq 2$.

9. 已知三条不同的直线 a 、 b 、 c 在同一平面内, 下列四条命题:

- ①如果 $a \parallel b$, $a \perp c$, 那么 $b \perp c$; ②如果 $b \parallel a$, $c \parallel a$, 那么 $b \parallel c$; ③如果 $b \perp a$, $c \perp a$, 那么 $b \perp c$;
④如果 $b \perp a$, $c \perp a$, 那么 $b \parallel c$. 其中假命题的是____. (填写序号)

【答案】 ③

【解析】

【分析】 本题考查两直线的位置关系, 解题的关键是掌握垂直于同一直线的两条直线平行, 平行于同一直线的两条直线平行. 根据两直线的位置关系一一判断即可.

【详解】①如果 $a \parallel b$, $a \perp c$, 那么 $b \perp c$, 正确, 是真命题;

②如果 $b \parallel a$, $c \parallel a$, 那么 $b \parallel c$, 正确, 是真命题;

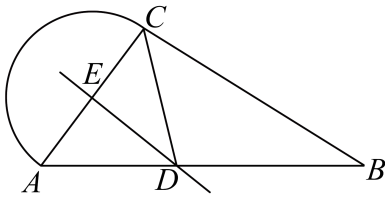
③如果 $b \perp a$, $c \perp a$, 那么 $b \perp c$, 错误, 应该是 $b \parallel c$, 故原命题是假命题;

④如果 $b \perp a$, $c \perp a$, 那么 $b \parallel c$, 正确, 是真命题.

假命题有③,

故答案为: ③.

10. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AC 的垂直平分线交 AB 于点 D , 垂足为点 E . 若 $AE = 2\text{cm}$, $\triangle BCD$ 的周长为 20cm , 则 $\triangle ABC$ 的周长为 _____ cm .



【答案】 24

【解析】

【分析】 本题考查中垂线的性质, 根据中垂线的性质得到 $AD = CD$, $AC = 2AE$, 进而推出 $\triangle BCD$ 的周长为 $BC + AB$ 的长, 再根据 $\triangle ABC$ 的周长公式进行计算即可.

【详解】 解: $\because AC$ 的垂直平分线交 AB 于点 D , 垂足为点 E , $AE = 2\text{cm}$,

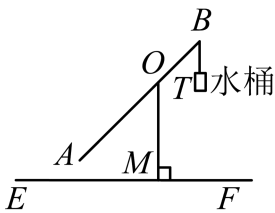
$\therefore AD = CD$, $AC = 2AE = 4\text{cm}$,

$\therefore \triangle BCD$ 的周长 $= BC + CD + BD = BC + BD + AD = BC + AB = 20\text{cm}$,

$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $AB + BC + AC = 20 + 4 = 24\text{cm}$;

故答案为: 24.

11. 如图, 桔槔是一种原始的汲水工具, 它是在一根竖立的架子上加上一根细长的杠杆, 末端悬挂一重物, 前端悬挂水桶. 当人把水桶放入水中打满水以后, 由于杠杆末端的重力作用, 便能轻易把水提拉至所需处, 若已知支架 $OM \perp EF$, AB 可以绕着点 O 自由旋转, 当点 A 旋转到如图所示的位置时, $\angle AOM = 44^\circ$, 此时 $\angle B$ 为 _____.



【答案】 44° ## 44 度

【解析】

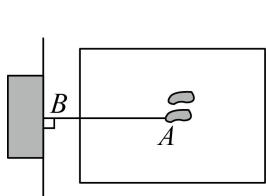
【分析】 本题考查了平行线的性质，根据平行线的性质即可求解，掌握平行线的性质是解题的关键.

【详解】 解：由题意得， $OM \parallel BT$ ，

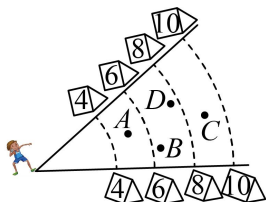
$$\therefore \angle B = \angle AOM = 44^\circ,$$

故答案为： 44° .

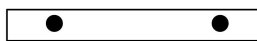
12. 下列三种现象中，可以用“两点之间，线段最短”来解释的现象是_____ (填序号).



① 跳远测量



② 投铅球测量



③ 木条固定

【答案】 ②

【解析】

【分析】 本题主要考查了线段的性质，分别判断三种现象，确定用“两点之间，线段最短”来解释的现象即可.

【详解】 解：①跳远测量反映的是“垂线段最短”；

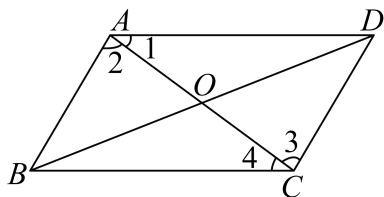
②投铅球测量反映的是“两点之间，线段最短”；

③木条固定反映的是“两点确定一条直线”；

所以，可以用“两点之间，线段最短”来解释的现象是②，

故答案为： ② .

13. 如图，四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ，则图中标的四个角中 $\angle$ _____ = $\angle$ _____.



【答案】 ①. 2 ②. 3

【解析】

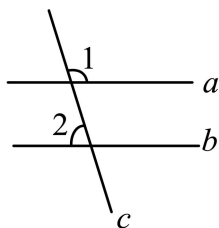
【分析】 题目主要考查平行线的性质，结合图形，利用两直线平行，内错角相等求解即可，熟练掌握平行线的性质是解题关键.

【详解】 解： $\because AB \parallel CD$ ，

$$\therefore \angle 2 = \angle 3,$$

故答案为：2；3

14. 如图，直线 $a \parallel b$ ， $\angle 1 = 110^\circ$ ，则 $\angle 2 =$ _____ $^\circ$ 。



【答案】 70

【解析】

【分析】 本题主要考查了平行线的性质，平角的定义，根据两直线平行，同位角相等得到 $\angle 3 = \angle 1 = 110^\circ$ ，再由平角的定义即可得到答案。

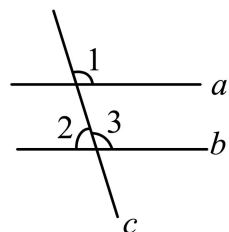
【详解】 解： $\because a \parallel b$ ， $\angle 1 = 110^\circ$ ，

$$\therefore \angle 3 = \angle 1 = 110^\circ,$$

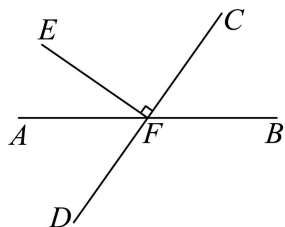
$$\because \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = 70^\circ,$$

故答案为：70。



15. 如图，已知 AB 与 CD 交于点 F ，且 $EF \perp CF$ ，垂足为 F ，若 $\angle AFE = 35^\circ$ ，则 $\angle BFD =$ _____ 度。



【答案】 125° ## 125 度

【解析】

【分析】 本题考查垂直的定义，角的和差关系，对顶角相等知识，利用垂直的定义可知 $\angle CEF = 90^\circ$ ，再运用 $\angle BFD = \angle AFC = \angle CEF + \angle AFE$ 求解即可。

【详解】解：∵ $EF \perp CF$ ，

$$\therefore \angle CEF = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle AFE = 35^\circ,$$

$$\therefore \angle BFD = \angle AFC = \angle CEF + \angle AFE = 125^\circ.$$

故答案为： 125°

16. 已知等腰三角形两条边的长分别是4和6，则它的周长等于_____.

【答案】14或16

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的性质，三角形三边的关系，熟练掌握等腰三角形的性质是解题的关键；分6是腰长与底边长两种情况讨论求解即可.

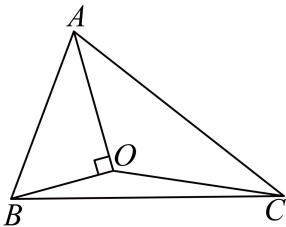
【详解】解：①当6是腰长时，三边分别为6、6、4时，能组成三角形，周长为 $6+6+4=16$ ；

②当6是底边时，三边分别为6、4、4，能组成三角形，周长为 $6+4+4=14$ ；

综上所述，等腰三角形的周长为14或16；

故答案为：14或16.

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AO 平分 $\angle BAC$ ，且 $AO \perp BO$ 于点 O ， $AB:AC=2:3$ ，若 $\triangle ABC$ 的面积为18，则 $\triangle BOC$ 的面积是_____.



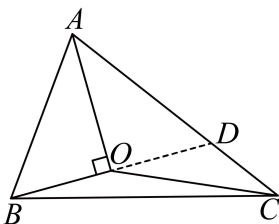
【答案】3

【解析】

【分析】此题考查了全等三角形的判定，角平分线的定义，三角形的中线性质的性质. 延长 BO 交 AC 于点 D ，利用 ASA 证明 $\triangle ABO \cong \triangle ADO$ ，根据全等三角形的性质得到 $BO = DO$ ， $AB = AD$ ，求得

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} = 6, \text{ 据此求解即可.}$$

【详解】解：如图，延长 BO 交 AC 于点 D ，



$\because AO$ 平分 $\angle BAC$,

$\therefore \angle BAO = \angle DAO$,

$\because AO \perp BO$,

$\therefore \angle AOB = \angle AOD = 90^\circ$,

在 $\triangle ABO$ 和 $\triangle ADO$ 中,

$$\begin{cases} \angle BAO = \angle DAO \\ AO = AO \\ \angle AOB = \angle DOA \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABO \cong \triangle ADO$ (ASA),

$\therefore BO = DO, AB = AD$,

$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOD}, S_{\triangle BOC} = S_{\triangle DOC}$,

$\because AB:AC = 2:3$,

$\therefore AD:AC = 2:3$,

$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 18,

$\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} = 6$,

$\therefore S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} S_{\triangle BCD} = 3$,

故答案为: 3.

18. 等腰三角形的顶角是 50° , 则它一腰上的高与底边的夹角为_____.

【答案】 25°

【解析】

【分析】 根据等腰三角形的性质和三角形内角和定理可求出等腰三角形的底角的度数, 然后在一腰上的高与底边所构成的直角三角形中, 可得出所求角的度数.

【详解】 解: 如图: $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, BD 是边 AC 上的高.

$\because \angle A = 70^\circ$, 且 $AB = AC$,

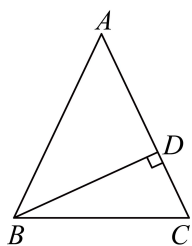
$\therefore \angle ABC = \angle C = (180^\circ - 50^\circ) \div 2 = 65^\circ$;

在 $\text{Rt}\triangle BDC$ 中,

$\angle BDC = 90^\circ$, $\angle C = 65^\circ$;

$\therefore \angle DBC = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$.

故答案为 25°



【点睛】 本题主要考查等腰三角形的性质及三角形内角和定理. 求一个角的大小, 常常通过三角形内角和来解决.

19. 等腰三角形一腰上的中线把这个三角形的周长分成了 9cm 和 7cm 两部分, 则这个等腰三角形的底边长为_____ cm .

【答案】 4cm 或 $\frac{20}{3}\text{cm}$

【解析】

【分析】 本题考查等腰三角形定义和三角形中线的特点, 理解三角形一边中线将三角形周长分得的两部分之差就是三角形剩余相邻两边之差, 并注意分类讨论和将求得的边长结合三角形三边关系判断能否构成三角形, 即可解题.

【详解】 解: $\because$ 等腰三角形一腰上的中线, 将这个等腰三角形的周长分成 9cm 和 7cm 两部分.

又 $\because 9 - 7 = 2$,

$\therefore$ 等腰三角形的腰与底边相差 2cm ,

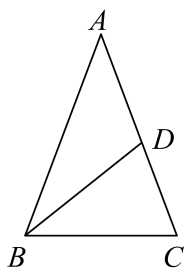
下面分两类讨论:

①腰比底边大,

设腰长为 $x\text{ cm}$, 则底边长为 $(x - 2)\text{ cm}$.

由题意得 $2x + x - 2 = 9 + 7$, 解得 $x = 6$,

当 $x = 6$ 时, 等腰三角形腰长 6cm , 底边长为 $6 - 2 = 4(\text{cm})$, 三角形三边分别为 6cm 、 6cm 、 4cm , 满足三角形三边关系, 可以构成三角形.



②底边比腰大,

若腰长为 x ，则底边长为 $(x+2)$ 。

由题意得 $2x+x+2=9+7$ ，解得 $x=\frac{14}{3}$ ，

当 $x=\frac{14}{3}$ 时，等腰三角形腰长 $\frac{14}{3}\text{cm}$ ，底边长为 $\frac{14}{3}+2=\frac{20}{3}(\text{cm})$ ，三角形三边分别为 $\frac{14}{3}\text{cm}$ 、 $\frac{14}{3}\text{cm}$ 、 $\frac{20}{3}\text{cm}$ ，满足三角形三边关系，能构成三角形。

综上所述，这个等腰三角形的底边长为 4cm 或 $\frac{20}{3}\text{cm}$ 。

故答案为： 4cm 或 $\frac{20}{3}\text{cm}$ 。

三、简答题（本大题 6 小题，每题 5 分，满分 30 分）

20. 解不等式组：
$$\begin{cases} 2x-1 > x \\ \frac{x+5}{2} - x \geq 1 \end{cases}$$

【答案】 $1 < x \leq 3$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解一元一次不等式组，先求出每个不等式的解集，再根据“同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小找不到（无解）”求出不等式组的解集即可。

【详解】 解：
$$\begin{cases} 2x-1 > x \text{ ①} \\ \frac{x+5}{2} - x \geq 1 \text{ ②} \end{cases},$$

解不等式①，得 $x > 1$ 。

解不等式②，得 $x \leq 3$ 。

$\therefore$ 原不等式组的解集为 $1 < x \leq 3$ 。

21. 解不等式组：
$$\begin{cases} 2(x-1) \leq -x+7 \\ \frac{x-1}{3} < \frac{x+2}{2} \end{cases}$$

【答案】 $-8 < x \leq 3$

【解析】

【分析】 本题主要考查了解不等式组，掌握解不等式的方法和步骤是解题的关键。
先分别求出各不等式的解集，然后确定不等式组的解集即可。

【详解】解：
$$\begin{cases} 2(x-1) \leq -x+7 \text{ ①} \\ \frac{x-1}{3} < \frac{x+2}{2} \text{ ②} \end{cases},$$

解不等式①可得： $x \leq 3$,

解不等式②可得： $x > -8$,

所以该不等式组的解集为： $-8 < x \leq 3$.

22. 下面是小明同学解不等式的过程，请认真阅读并完成相应的任务.

$$\frac{2x+1}{3} - 1 > \frac{x-1}{6}.$$

解： $2(2x+1) - 6 > x-1$ ，第一步

$4x+2-6 > x-1$ ，第二步

$4x-x > -1-2-6$ ，第三步

$3x > -9$ ，第四步

$x > -3$ ，第五步

任务一：填空

①以上解题过程中，第一步是依据_____进行变形的；

②第_____步开始出现错误，这一步错误的原因是_____.

任务二：请写出正确的解题过程.

【答案】任务一：①不等式的性质 2：不等式的两边都乘以同一个正数，不等号的方向不变；②三，移项没有改变符号；任务二：见解析

【解析】

【分析】任务一：①根据不等式的性质 2 可得答案；②由移项没有改变符号可得第三步开始出现错误；

任务二：先去分母，再去括号，移项，合并同类项，最后把未知数的系数化为 1 即可；

【详解】解：任务一：①以上解题过程中，第一步是依据不等式的性质 2：不等式的两边都乘以同一个正数，不等号的方向不变进行变形的；

②第三步开始出现错误，这一步错误的原因是移项没有改变符号；

任务二：

$$\frac{2x+1}{3} - 1 > \frac{x-1}{6}.$$

解： $2(2x+1) - 6 > x-1$,

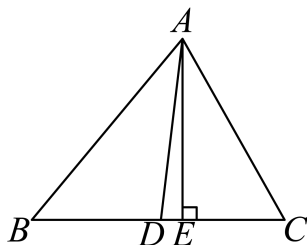
$4x+2-6 > x-1$,

$$4x - x > -1 - 2 + 6,$$

$$3x > 3,$$

$$x > 1.$$

23. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle B = 50^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, $AE \perp BC$ 于 E , AD 平分 $\angle BAC$; 求 $\angle DAE$ 的度数.



【答案】 5°

【解析】

【分析】 先根据三角形内角和定理求出 $\angle BAC$ 的度数, 再由角平分线的定义得出 $\angle CAD$ 的度数, 根据 $AE \perp BC$ 于 E 求出 $\angle CAE$ 的度数, 进而可得出结论.

【详解】 解: $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 50^\circ$, $\angle C = 60^\circ$,

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ.$$

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$$\therefore \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC = 35^\circ.$$

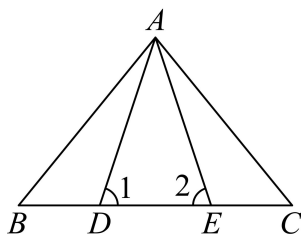
$\because AE \perp BC$ 于 E ,

$$\therefore \angle CAE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle CAD - \angle CAE = 35^\circ - 30^\circ = 5^\circ.$$

【点睛】 本题考查的是三角形内角和定理, 熟知三角形内角和是 180° 是解答此题的关键.

24. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = \angle C$, $\angle 1 = \angle 2$. 说明 $BE = CD$ 的理由.



【答案】 见解析

【解析】

【分析】 根据等腰三角形的判定和性质, 三角形全等的判定和性质解答即可.

本题考查了等腰三角形的判定和性质, 三角形全等的判定和性质, 熟练掌握判定和性质是解题的关键.

【详解】解：∵ $\angle B = \angle C$ ， $\angle 1 = \angle 2$ ，且 $\angle 1 = \angle B + \angle BAD$ ， $\angle 2 = \angle C + \angle CAE$ ，

∴ $AB = AC$ ， $AD = AE$ ， $\angle BAD = \angle CAE$ ，

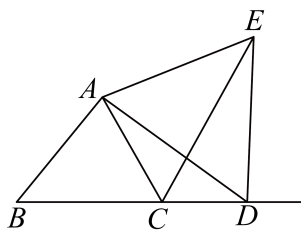
∴ $\triangle BAD \cong \triangle CAE$ (SAS)，

∴ $BD = CE$ ，

∴ $BD + DE = CE + DE$ ，

∴ $BE = CD$ 。

25. 已知等边 ABC 与等边 ADE ，且点 D 在 BC 边的延长线上，求 $\angle ACE$ 的度数。



【答案】 60°

【解析】

【分析】 本题考查的是等边三角形的性质，全等三角形的判定与性质，先根据等边三角形的性质得出 $AB = AC$ ， $AD = AE$ ， $\angle BAC = \angle EAD$ ，故可得出 $\angle BAD = \angle CAE$ ，由此可得出 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ ，故可得出 $\angle ACE = \angle B = 60^\circ$ 。

【详解】解：∵ ABC 和 ADE 为等边三角形，

∴ $AB = AC$ ， $AD = AE$ ， $\angle BAC = \angle EAD$ ，

∴ $\angle BAD = \angle CAE$ ，

∴ 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中，

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE, \\ AD = AE \end{cases}$$

∴ $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS)，

∴ $\angle ACE = \angle B = 60^\circ$ 。

四、解答题 (26 题 6 分，27 题 7 分，共 13 分)

26. 阅读与思考：数学活动课上，老师提出如下问题：如图 1，在 $\triangle PAB$ 中， PM 为边 AB 上的中线。求证：

$S_{\triangle PAM} = S_{\triangle PBM}$ 。小明给出如下证明过程。

证明：如图 2，过点 P 作 $PQ \perp AB$ 于点 Q 。

$\because PM$ 为边 AB 上的中线,

$\therefore$ ①_____.

$\because S_{\triangle PAM} = \frac{1}{2}AM \cdot PQ$, $S_{\triangle PBM} =$ ②_____.

$\therefore S_{\triangle PAM} = S_{\triangle PBM}$.

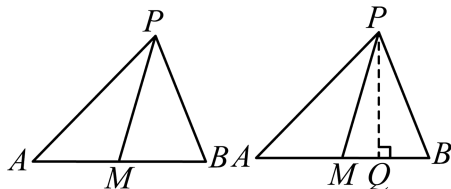


图1

图2

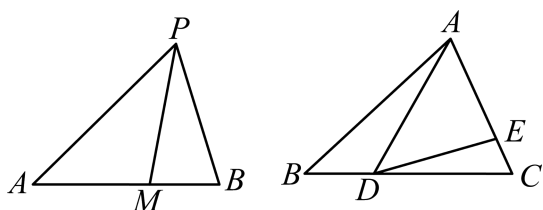


图3

图4

(1) 请将小明横线处的证明过程补充完整.

(2) 经过探究, 小明还发现: 如图 3, 若 M 为 $\triangle PAB$ 边 AB 上的任意一点, 则 $\frac{S_{\triangle PAM}}{S_{\triangle PBM}} = \frac{AM}{BM}$, 请写出证

明过程.

(3) 如图 4, $\triangle ABC$ 的面积为 24, D 是边 BC 上靠近点 B 的三等分点, E 是边 AC 上靠近点 C 的四等分点, 则 $\triangle ADE$ 的面积为_____.

【答案】 (1) $AM = BM$, $\frac{1}{2}BM \cdot PQ$

(2) 见解析 (3) 12

【解析】

【分析】 本题考查三角形中线性质、三角形的面积, 熟知等高三角形的面积关系是解答的关键.

(1) 根据题干证明过程, 结合三角形的面积公式求解即可;

(2) 根据三角形的面积公式求解即可;

(3) 由 (2) 可得 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{BD}{CD}$, $\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{CE}{AE}$, 再结合已知求解即可.

【小问 1 详解】

证明: 如图 2, 过点 P 作 $PQ \perp AB$ 于点 Q .

$\because PM$ 为边 AB 上的中线,

$$\therefore AM = BM.$$

$$\therefore S_{\triangle PAM} = \frac{1}{2}AM \cdot PQ, \quad S_{\triangle PBM} = \frac{1}{2}BM \cdot PQ,$$

$$\therefore S_{\triangle PAM} = S_{\triangle PBM}.$$

故答案为: $AM = BM, \quad \frac{1}{2}BM \cdot PQ$;

【小问 2 详解】

证明: 如图 3, 过点 P 作 $PQ \perp AB$ 于点 Q .

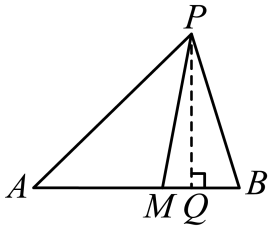


图3

$$\therefore S_{\triangle PAM} = \frac{1}{2}AM \cdot PQ, \quad S_{\triangle PBM} = \frac{1}{2}BM \cdot PQ,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle PAM}}{S_{\triangle PBM}} = \frac{\frac{1}{2}AM \cdot PQ}{\frac{1}{2}BM \cdot PQ} = \frac{AM}{BM};$$

【小问 3 详解】

$$\text{解: 同理 (2) 得 } \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{BD}{CD}, \quad \frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{CE}{AE},$$

$\because \triangle ABC$ 的面积为 24, D 是边 BC 上靠近点 B 的三等分点,

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{CD}{BC} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ADC} = \frac{2}{3}S_{\triangle ABC} = \frac{2}{3} \times 24 = 16,$$

$\because E$ 是边 AC 上靠近点 C 的四等分点,

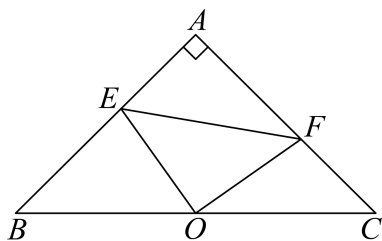
$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{AE}{AC} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle ADE} = \frac{3}{4}S_{\triangle ADC} = \frac{3}{4} \times 16 = 12,$$

故答案为: 12.

27. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AB = AC$, O 是 BC 的中点, 将一把三角尺的直角顶点与 O 重合,

并绕 O 点旋转，使该三角尺的两直角边与边 AB 、 AC 相交于点 E 、 F (E 、 F 不与 A 、 B 、 C 重合)，连接 EF 。



- (1) 在旋转过程中，试观察 $\triangle OEF$ 的形状，并证明你的结论；
- (2) 试猜想：线段 BE 、 EF 、 FC 能否组成一个直角三角形？若能，请给出证明；若不能，请说明理由。

【答案】 (1) $\triangle OEF$ 是等腰直角三角形，证明见解析；

(2) 线段 BE 、 EF 、 FC 能组成一个直角三角形，证明见解析。

【解析】

【分析】 本题主要考查了等腰三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、余角的性质等知识点，灵活运用相关运算法则成为解题的关键。

- (1) 如图：连接 AO ，根据题意以及等腰三角形的性质可得 $\angle B = \angle C = 45^\circ$ ，进而证明 $\triangle BOE \cong \triangle AOF$ (ASA)，根据全等三角形的性质可得： $OE = OF$ ，即可得到 $\triangle OEF$ 是等腰直角三角形；
- (2) 根据 ASA 可证 $\triangle AOE \cong \triangle COF$ ，根据全等三角形的性质可证 $AE = CF$ ，由 (1) 可知 $\triangle BOE \cong \triangle AOF$ ，根据全等三角形的性质可证 $BE = AF$ ，因为 $\angle A = 90^\circ$ ，所以 $AE^2 + AF^2 = EF^2$ ，等量代换可得 $BE^2 + CF^2 = EF^2$ ，根据勾股定理的逆定理可知线段 BE 、 EF 、 FC 能组成一个直角三角形。

【小问 1 详解】

解： $\triangle OEF$ 是等腰直角三角形，

证明如下：

如图：连接 AO ，

在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，

$\therefore \angle B = \angle C = 45^\circ$ ，

$\because$ 点 O 是 BC 的中点，

$\therefore AO \perp BC$ ， $\angle BAO = \angle CAO = 45^\circ$ ，

$\therefore AO = BO$ ，

$\therefore \angle EOF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AOE + \angle AOF = 90^\circ$ ，

$$\because AO \perp BC,$$

$$\therefore \angle AOE + \angle BOE = 90^\circ,$$

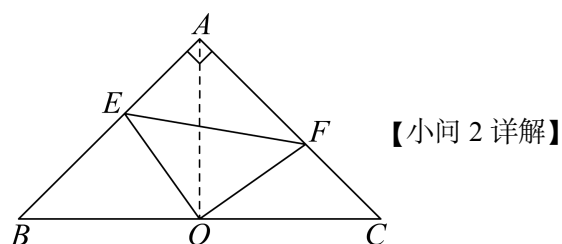
$$\therefore \angle BOE = \angle AOF,$$

$$\text{在 } \triangle BOE \text{ 和 } \triangle AOF \text{ 中, } \begin{cases} \angle CAO = \angle B \\ AO = BO \\ \angle AOF = \angle BOE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BOE \cong \triangle AOF,$$

$$\therefore OE = OF,$$

$\therefore \triangle EOF$ 是等腰直角三角形;



解: 能,

证明如下:

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AB = AC$,

$$\therefore \angle B = \angle C = 45^\circ,$$

$\because$ 点 O 是 BC 的中点,

$$\therefore AO \perp BC, \angle BAO = \angle CAO = 45^\circ,$$

$$\therefore AO = CO,$$

$$\because \angle EOF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOE + \angle AOF = 90^\circ,$$

$$\because AO \perp BC,$$

$$\therefore \angle AOF + \angle COF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOE = \angle COF,$$

$$\text{在 } \triangle AOE \text{ 与 } \triangle COF \text{ 中, } \begin{cases} \angle AOE = \angle COF \\ AO = CO \\ \angle BAO = \angle C \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF,$$

$$\therefore AE = CF,$$

由(1)可知 $\triangle BOE \cong \triangle AOF$,

$$\therefore BE = AF ,$$

$$\because \angle A = 90^\circ ,$$

$$\therefore AE^2 + AF^2 = EF^2 ,$$

$$\therefore BE^2 + CF^2 = EF^2 ,$$

$\therefore$ 线段 BE 、 EF 、 FC 能组成一个直角三角形.