

2024-2025 学年上海市闵行区文来中学七年级（下）

月考数学试卷（5 月份）

一、选择题：本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 不能与两根分别为 4cm、5cm 长的木棒钉成一个三角形的木棒长度是（ ）

- A. 4cm B. 5cm C. 8cm D. 9cm

【答案】D

【解析】

【分析】先根据构成三角形的条件求出未知木棒的长度取值范围，据此即可作答．

【详解】根据题意，未知木棒的长度 d 取值范围为： $5-4 < d < 5+4$ ，

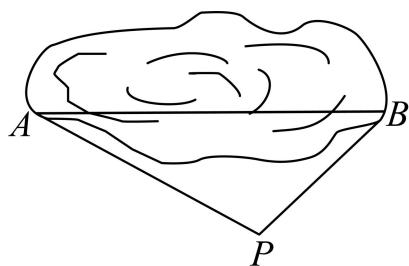
即： $1 < d < 9$ ，

即只有 D 项符合题意，

故选：D．

【点睛】本题主要考查了构成三角形的条件的知识．三角形中，任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边，掌握该知识点是解答本题的关键．

2. 如图，小华为了估计池塘两岸间的距离（即 AB 的长），在池塘的一侧选取一点 P ，测得 $PA=10\text{m}$ ， $PB=6\text{m}$ ，则池塘两岸间的距离可能是（ ）



- A. 18m B. 17m C. 16m D. 15m

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了三角形的三边关系定理，能根据三角形的三边关系定理得出不等式是解此题的关键．根据三角形的三边关系定理得出不等式，即可得出选项．

【详解】解：设 $AB = xm$ ，

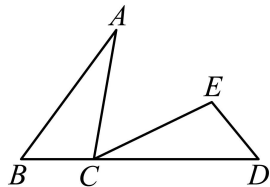
$\therefore PA = 10\text{m}$ ， $PB = 6\text{m}$ ，

∴ 由三角形三边关系定理得： $10 - 6 < x < 10 + 6$ ，

∴ $4 < x < 16$ ，所以 A 、 B 间的距离可能是 15m ，

故选：D.

3. 如图，点 B 、 C 、 D 在同一直线上，若 $\triangle ABC \cong \triangle CDE$ ， $DE = 3$ ， $BD = 10$ ，则 AB 等于 ()



A. 5

B. 6

C. 7

D. 8

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的性质和线段和差，根据全等三角形的性质得出 $AB = CD$ ， $BC = DE = 3$ ，再由线段和差即可求解，熟练掌握知识点的应用是解题的关键.

【详解】∵ $\triangle ABC \cong \triangle CDE$ ，

∴ $AB = CD$ ， $BC = DE = 3$ ，

∵ $BD = 10$ ，

∴ $CD = BD - BC = 10 - 3 = 7$ ，

∴ $AB = CD = 7$ ，

故选：C.

4. 下列说法：

① 同位角相等，两直线平行；

② 两直线相交形成的四个角中有两对角相等，则这两条直线互相垂直；

③ 过一点有且只有一条直线与已知直线平行；

④ 三角形的一个外角等于两个内角的和；

⑤ 已知同一平面内 $\angle AOB = 70^\circ$ ， $\angle BOC = 30^\circ$ ，则 $\angle AOC = 100^\circ$.

正确的个数为 ()

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】A

【解析】

【分析】 本题考查三角形的外角性质，平行线的判定，平行公理，垂线，角的计算，关键是掌握三角形的外角性质，平行公理，垂直的定义，平行线的判定方法；由三角形的外角性质，平行公理，垂直的定义，平行线的判定方法，即可判断.

【详解】 解：①同位角相等，两直线平行，正确，故①符合题意；

②两直线相交形成的四个角中，两对对顶角相等，但这两条直线不一定互相垂直，故②不符合题意；

③过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行，故③不符合题意；

④三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和，故④不符合题意；

⑤若射线 OC 在 $\angle AOB$ 外部，则 $\angle AOC = 70^\circ + 30^\circ = 100^\circ$ ，若射线 OC 在 $\angle AOB$ 内部，则 $\angle AOC = 70^\circ - 30^\circ = 40^\circ$ ，所以 $\angle AOC = 100^\circ$ 或 40° ，故⑤不符合题意.

$\therefore$ 正确的个数为 1 个.

故选：A.

5. 下列命题中的假命题是 ()

A. 三个角对应相等的两个三角形全等

B. 全等三角形的对应角相等

C. 若 $a \cdot b = 1$ ，则 a 与 b 互为倒数

D. 若 $|a| = |b|$ ，则 $a^2 = b^2$

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题主要考查了命题与定理，解决本题的关键是要熟练掌握相关定理.

根据全等三角形的性质和判定，倒数的定义以及绝对值的性质分别分析得出答案即可.

【详解】 解：A、三个角对应相等的两个三角形不一定全等，此选项是假命题，符合题意；

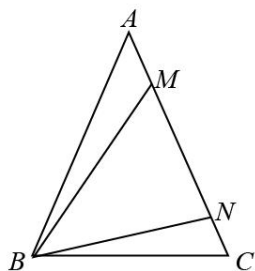
B、全等三角形的对应角相等，此选项是真命题，不符合题意；

C、根据倒数的定义，乘积为 1 的两个数互为倒数，此选项是真命题，不符合题意；

D、若 $|a| = |b|$ ，则 $a = \pm b$ ，则 $a^2 = b^2$ ，此选项是真命题，不符合题意；

故选：A.

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle ABM = \angle CBN$ ， $MN = BN$ ，则 $\angle MBC$ 的度数为 ().



A. 45° B. 50° C. 55° D. 60°

【答案】 D

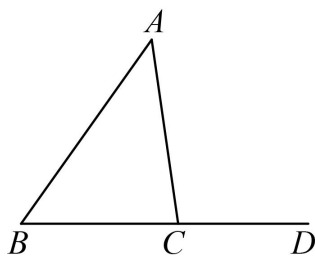
【解析】

【分析】 设 $\angle ABM = \angle CBN = \alpha$ ， $\angle NBM = \beta$ 根据等边对等角，可得 $\angle ABC = \angle ACB, \angle NBM = \angle NMB$ ，根据三角形外角性质可得 $\angle BMN = 180^\circ - 3\alpha - 2\beta = \beta$ ，进而求得 $\alpha + \beta$ ，即可求得 $\angle MBC$ 的度数.【详解】 解： 设 $\angle ABM = \angle CBN = \alpha$ ， $\angle NBM = \beta$ $\because AB = AC$ ， $\therefore \angle ABC = \angle ACB = \angle ABM + \angle MBN + \angle NBC = 2\alpha + \beta$ $\therefore \angle A = 180^\circ - 2(2\alpha + \beta) = 180^\circ - 4\alpha - 2\beta$ $\because MN = BN$ $\therefore \angle NBM = \angle NMB = \beta$ 又 $\angle BMN = \angle A + \angle ABM = 180^\circ - 4\alpha - 2\beta + \alpha = 180^\circ - 3\alpha - 2\beta$ $\therefore 180^\circ - 3\alpha - 2\beta = \beta$ $\therefore \alpha + \beta = 60^\circ$ $\therefore \angle MBC = \angle MBN + \angle NBC = \alpha + \beta = 60^\circ$

故选 D

【点睛】 本题考查了三角形内角和定理与三角形的外角性质，等边对等角，掌握角度计算，设出参数是解题的关键.

二、填空题： 本题共 12 小题， 每小题 3 分， 共 36 分.

7. 如图所示， 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 43^\circ$ ， $\angle B = 55^\circ$ ， 外角 $\angle ACD =$ _____.【答案】 98° 度

【解析】

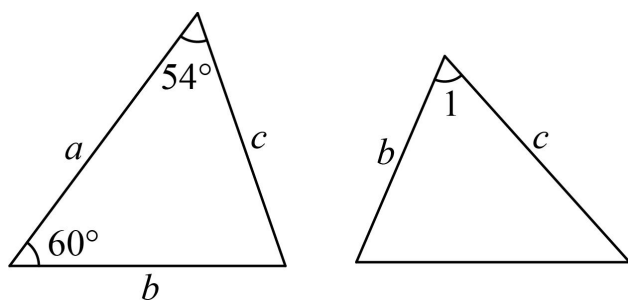
【分析】 本题主要考查三角形外角的性质. 根据三角形外角的定义和性质即可求解.

【详解】 解: $\because \angle ACD$ 是 $\triangle ABC$ 的外角, $\angle A = 43^\circ$, $\angle B = 55^\circ$,

$$\therefore \angle ACD = \angle A + \angle B = 43^\circ + 55^\circ = 98^\circ,$$

故答案为: 98° .

8. 如图是两个全等三角形, 图中的字母表示三角形的边长, 则 $\angle 1$ 的度数是 _____.



【答案】 66° ## 66 度

【解析】

【分析】 本题考查全等三角形的性质, 三角形的内角和定理. 根据三角形的内角和定理和全等三角形的对应角相等, 进行求解即可.

【详解】 解: $\because$ 两个全等三角形,

$$\therefore \angle 1 = 180^\circ - 60^\circ - 54^\circ = 66^\circ;$$

故答案为: 66° .

9. 已知一等腰三角形的两边长分别为 1cm 和 3cm, 则此三角形的周长为 _____ cm.

【答案】 7

【解析】

【分析】 题目给出等腰三角形有两条边长为 1cm 和 3cm, 而没有明确腰、底分别是多少, 所以要进行讨论, 还要应用三角形的三边关系验证能否组成三角形.

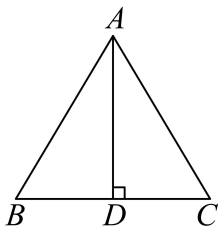
【详解】 解: 当腰长是 1cm 时, 因为 $1 + 1 < 3$, 不符合三角形的三边关系, 舍去;

当腰长是 3cm 时, 因为 $1 + 3 > 3$, 符合三角形三边关系, 此时周长是 $1 + 3 + 3 = 7$ (cm).

故答案为: 7.

【点睛】 本题考查了等腰三角形的性质和三角形的三边关系; 已知没有明确腰和底边的题目一定要想到两种情况, 分类进行讨论, 还应验证各种情况是否能构成三角形进行解答, 这点非常重要, 也是解题的关键.

10. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $BC = 10$, $AD \perp BC$ 于点 D , 则 BD 的长为 _____.



【答案】 5

【解析】

【分析】根据等腰三角形的性质—三线合一可得 $BD = \frac{1}{2}BC$ ，即可求解.

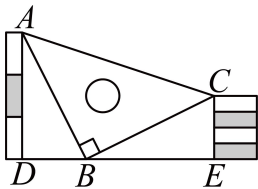
【详解】解：∵在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $BC = 10$ ， $AD \perp BC$ 于点 D ，

$$\therefore BD = \frac{1}{2}BC = 5$$

故答案为：5.

【点睛】本题考查了等腰三角形的性质，熟练掌握等腰三角形的性质是解题的关键.

11. 小李用 7 块长为 8cm，宽为 3cm 的相同长方体小木块，垒了两堵与地面垂直的木墙，木墙之间刚好可以放进一个等腰直角三角板 ($AB = BC, \angle ABC = 90^\circ$) 点 B 在 DE 上，点 A 和 C 分别与木墙的顶端重合，则两堵木墙之间的距离为 _____ cm.



【答案】 36

【解析】

【分析】根据题意可得 $AB = BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AD \perp DE$ ， $CE \perp DE$ ，进而得到 $\angle ADB = \angle BEC = 90^\circ$ ，再根据等角的余角相等可得 $\angle ABD = \angle BCE$ ，再证明 $\triangle ABD \cong \triangle BCE$ ，利用全等三角形的性质进行解答. 此题主要考查了全等三角形的应用，解题的关键是正确找出证明三角形全等的条件.

【详解】解：由题意得 $AB = BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AD \perp DE$ ， $CE \perp DE$ ， $AD = 24\text{cm}$ ， $CE = 12\text{cm}$ ，
 $\therefore \angle ADB = \angle BEC = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABD + \angle CBE = 90^\circ, \quad \angle BCE + \angle CBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle BCE,$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCE$ 中，

$$\begin{cases} \angle ABD = \angle BCE \\ \angle ADB = \angle BEC, \\ AB = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle BCE (AAS),$$

$$\therefore BE = AD = 24\text{cm}, \quad DB = CE = 12\text{cm},$$

$$\therefore DE = DB + BE = 36\text{cm},$$

则两堵木墙之间的距离为 36cm,

故答案为: 36.

12. 若一个三角形的三个内角度数之比为 1:3:4, 则这个三角形是_____.

【答案】 直角三角形

【解析】

【分析】 首先根据题意, 可得: 这个三角形的最大的角的度数占三角形的内角和的 $\frac{4}{1+3+4}$; 然后根据三角形的内角和是 180° , 用 180 乘这个三角形的最大的角的度数占三角形的内角和的分率, 求出最大的角的度数是多少, 判断出这个三角形是什么三角形即可. 此题主要考查了三角形的内角和定理, 解答此题的关键是求出这个三角形的最大的角的度数是多少.

【详解】 解: 依题意

$\therefore$ 一个三角形的三个内角度数之比为 1:3:4

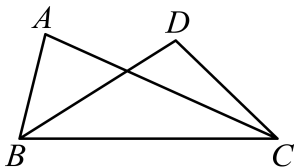
$$\begin{aligned} \therefore 180^\circ \times \frac{4}{1+3+4} \\ &= 180^\circ \times \frac{1}{2} \\ &= 90^\circ \end{aligned}$$

$\therefore$ 这个三角形的最大的角的度数是 90° ,

$\therefore$ 这个三角形是直角三角形.

故答案为: 直角三角形.

13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BDC$ 中, $\angle A = 75^\circ$, $\angle ABD = 55^\circ$, $\angle ACD = 20^\circ$, 则 $\angle D =$ _____.

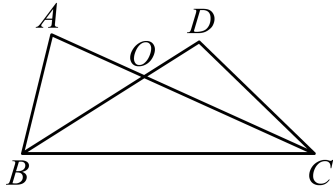


【答案】 110

【解析】

【分析】利用三角形的外角性质即可求解.

【详解】解: 设 AC 与 BD 相交于点 O ,



$$\therefore \angle BOC = \angle A + \angle ABD = \angle D + \angle ACD,$$

$$\because \angle A = 75^\circ, \angle ABD = 55^\circ, \angle ACD = 20^\circ,$$

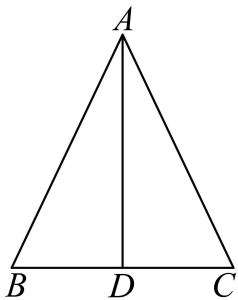
$$\therefore 75^\circ + 55^\circ = \angle D + 20^\circ,$$

$$\therefore \angle D = 110^\circ,$$

故答案为: 110.

【点睛】此题考查了三角形的外角性质, 解题的关键是熟练掌握三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角和的应用.

14. 如图, 在 ABC 中, $AB = AC$, D 为 BC 中点, $\angle BAD = 25^\circ$, 则 $\angle C$ 的度数为_____.



【答案】 65° ##65 度

【解析】

【分析】 本题考查了等腰三角形的性质、三角形内角和定理, 由等腰三角形的性质得出 $\angle BAC = 2\angle BAD = 50^\circ$, 再由三角形内角和定理计算即可得出答案.

【详解】解: $\because$ 在 ABC 中, $AB = AC$, D 为 BC 中点,

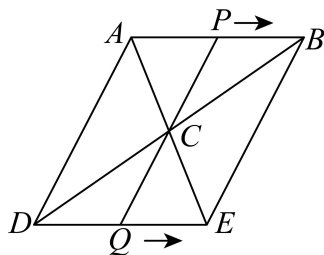
$$\therefore \angle BAC = 2\angle BAD = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle C = \frac{180^\circ - \angle BAC}{2} = 65^\circ,$$

故答案为: 65° .

15. 如图, AE 与 BD 相交于点 C , $AC = EC$, $AB \parallel DE$, $AB = 8\text{cm}$, 点 P 从点 A 出发, 沿 $A \rightarrow B \rightarrow A$ 方向以 2cm/s 的速度运动, 点 Q 同时从点 D 出发, 沿 $D \rightarrow E$ 方向以 1cm/s 的速度运动, 当点 P 到达点 A

时, P 、 Q 两点同时停止运动, 设点 P 的运动时间为 ts . 当 P , Q , C 三点共线时, t 的值为_____.



【答案】8 或 $\frac{8}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查代数式和全等三角形的判定和性质, 一元一次方程的应用, 解题的关键是分类讨论思想.

根据题意即可利用 AAS 证明 $\triangle ABC \cong \triangle EDC$, 得 $\angle ABC = \angle EDC$, $\angle BAD = \angle DEC$, 由三点共线得 $\angle ACP = \angle ECQ$, 即可证明 $\triangle ACP \cong \triangle ECQ$, 有 $AP = EQ$, 利用分类讨论当 $0 \leq t \leq 4$ 时, 当 $4 < t \leq 8$ 时, 列方程求解即可.

【详解】 解: $\because AB \parallel DE$

$\therefore \angle ABC = \angle EDC$, $\angle BAD = \angle DEC$,

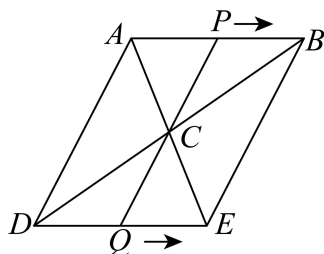
在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EDC$ 中,

$$\begin{cases} AC = EC \\ \angle ACB = \angle ECD, \\ \angle ABC = \angle EDC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle EDC$ (AAS),

$\therefore AB = ED = 8\text{cm}$;

如图,



$\because P$, Q , C 三点共线,

$\therefore \angle ACP = \angle ECQ$,

在 $\triangle ACP$ 和 $\triangle ECQ$ 中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle E \\ AC = EC \\ \angle ACP = \angle ECQ \end{cases},$$

$\therefore \triangle ACP \cong \triangle ECQ$ (ASA),

$\therefore AP = EQ$,

$\therefore$ 点 P 从点 A 出发, 沿 $A \rightarrow B \rightarrow A$ 方向以 2cm/s 的速度运动, 点 Q 同时从点 D 出发, 沿 $D \rightarrow E$ 方向以 1cm/s 的速度运动,

$\therefore$ 当 $0 \leq t \leq 4$ 时, $DQ = t\text{cm}$, $AP = 2t\text{cm}$ 则 $EQ = (8 - t)\text{cm}$,

$2t = 8 - t$,

$\therefore t = \frac{8}{3}$,

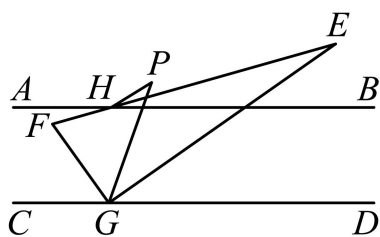
当 $4 < t \leq 8$ 时, $DQ = t\text{cm}$, $AP = (16 - 2t)\text{cm}$,

$\therefore 16 - 2t = 8 - t$,

解得: $t = 8$,

$\therefore$ 综上所述, 当 P 、 C 、 Q 三点共线时, t 的值为 8 或 $\frac{8}{3}$.

16. 如图, $AB \parallel CD$, P 为 AB 上方一点, H 、 G 分别为 AB 、 CD 上的点, $\angle PHB$ 、 $\angle PGD$ 的角平分线交于点 E , $\angle PGC$ 的角平分线与 EH 的延长线交于点 F , 下列结论: ① $EG \perp FG$; ② $\angle P + \angle PHB = \angle PGD$; ③ $\angle P = \angle E$; ④ 若 $\angle AHP - \angle PGC = \angle F$, 则 $\angle F = 60^\circ$. 其中正确的结论有_____ (填的序号)



【答案】①②④

【解析】

【分析】 本题考查了平行线的性质、角平分线的性质、三角形外角的性质以及直角三角形中两个锐角互余等知识, 灵活运用平行线的性质和三角形的外角的性质是解答本题的关键. 由角平分线的性质以及平行线的性质可求出 $\angle EGF = 90^\circ$, 即可判断①; 设 PG 交 AB 于点 M , GE 交 AB 于点 N , 根据平行的性质即有 $\angle PGD = \angle PMB$, 再结合三角形外角的性质即可判断②; 根据角平分线的性质有 $\angle PHB = 2\angle EHB$, $\angle PGD = 2\angle EGD$, 再证 $\angle P + \angle PHB = \angle PGD$, $\angle E + \angle EHB = \angle EGD$, 即可得

$\angle PGD = 2\angle EGD$ ，即可判断③；先证 $\angle P = \angle F$ ，根据 $\angle E + \angle F = 90^\circ$ ，即有 $\angle P + \angle E = 90^\circ$ ，再结合 $\angle P = 2\angle E$ ，即可判断④正确；

【详解】 $\because GF$ 平分 $\angle PGC$ ， EG 平分 $\angle PGD$ ，

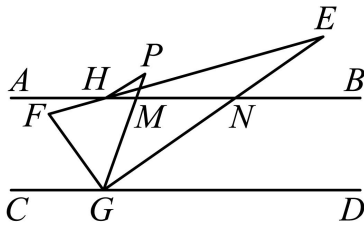
$$\therefore \angle PGF = \frac{1}{2} \angle PGC, \quad \angle PGE = \frac{1}{2} \angle PGD,$$

$$\because \angle PGC + \angle PGD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle PGF + \angle PGE = 90^\circ,$$

$$\therefore EG \perp FG, \text{ 故①正确；}$$

设 PG 交 AB 于点 M ， GE 交 AB 于点 N ，如图，



$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle PGD = \angle PMB,$$

$$\because \angle P + \angle PHB = \angle PMB,$$

$$\therefore \angle P + \angle PHB = \angle PGD, \text{ 故②正确；}$$

$$\because HE \text{ 平分 } \angle PHB, \quad EG \text{ 平分 } \angle PGD,$$

$$\therefore \angle PHB = 2\angle EHB, \quad \angle PGD = 2\angle EGD,$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle ENB = \angle EGD, \quad \angle PMB = \angle PGD,$$

$$\because \angle P + \angle PHB = \angle PMB, \quad \angle E + \angle EHB = \angle ENB,$$

$$\therefore \angle P + \angle PHB = \angle PGD, \quad \angle E + \angle EHB = \angle EGD,$$

$$\because \angle PHB = 2\angle EHB, \quad \angle PGD = 2\angle EGD,$$

$$\therefore \angle P = 2\angle E, \text{ 故③错误；}$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle PMA = \angle PGC,$$

$$\therefore \angle AHP - \angle PGC = \angle AHP - \angle PMH = \angle P,$$

$$\because \angle AHP - \angle PGC = \angle F,$$

$$\therefore \angle P = \angle F,$$

$$\therefore \angle FGE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle E + \angle F = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle P + \angle E = 90^\circ,$$

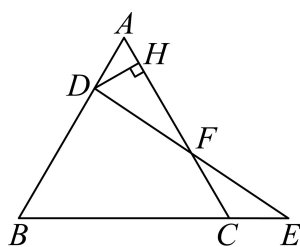
$$\therefore \angle P = 2\angle E,$$

$$\therefore \angle E = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle P = \angle F = 2\angle E = 60^\circ, \text{ 故④正确;}$$

故答案为: ①②④.

17. 如图, 点 D 是等边 ABC 中边 AB 上一点, 延长 BC 至点 E , 使 $CE = AD$, 连接 DE , 与 AC 相交于点 F , 过点 D 作 $DH \perp AC$, 垂足为点 H , 若 $AB = 12$, 则 HF 的长度为_____.



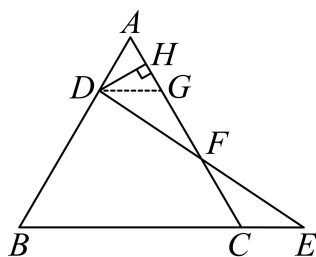
【答案】 6

【解析】

【分析】 本题考查全等三角形的判定和性质, 平行线的判定和性质, 等边三角形的判定和性质, 熟练掌握全等三角形的性质和判定是解题的关键;

过 D 作 $DG \parallel BC$ 交 AC 于点 G , 判定 $\triangle ADG$ 为等边三角形, 进而判定 $\triangle DFG \cong \triangle EFC$, 根据三线合一得到 $AH = HG = \frac{1}{2}AG$, 进而求解即可;

【详解】 解: 过 D 作 $DG \parallel BC$ 交 AC 于点 G ,



$$\therefore DG \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADG = \angle B, \angle AGD = \angle ACB, \angle FDG = \angle E,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形,

$$\therefore AB = AC = 12, \angle B = \angle ACB = \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle ADG = \angle AGD = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ADG$ 为等边三角形,

$$\therefore AD = DG,$$

$$\because AD = CE,$$

$$\therefore DG = CE,$$

在 $\triangle DFG$ 和 $\triangle EFC$ 中,

$$\begin{cases} \angle DFG = \angle EFC \\ \angle FDG = \angle E \\ DG = CE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle DFG \cong \triangle EFC (\text{AAS}),$$

$$\therefore GF = FC = \frac{1}{2}GC,$$

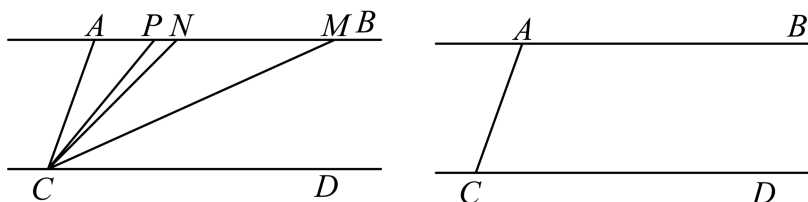
$$\because DH \perp AC,$$

$$\therefore AH = HG = \frac{1}{2}AG,$$

$$\therefore HF = HG + GF = \frac{1}{2}AG + \frac{1}{2}GC = \frac{1}{2}AC = 6;$$

故答案为: 6

18. 如图, 已知 $AB \parallel CD$, $\angle BAC = 100^\circ$, 点 M 为射线 AB 上一动点, 连接 MC , 作 CP 平分 $\angle ACM$ 交直线 AB 于点 P 在直线 AB 上取点 N , 连接 NC , 使 $\angle ANC = 2\angle AMC$, 当 $\angle PCN = \frac{1}{4}\angle PNC$ 时, $\angle PCM =$ _____.



【答案】 30° 或 $\frac{50^\circ}{3}$

【解析】

【分析】 本题主要考查了平行线的性质, 角平分线的定义, 三角形的外角定理, 解决本题的关键是准确识图, 熟练掌握平行线的性质.

根据点 N 与点 A , 点 P 的位置分三种情况讨论, 分别画出图形根据平行线的性质推导即可.

【详解】 解: ①当点 N 在点 P 的右侧时,

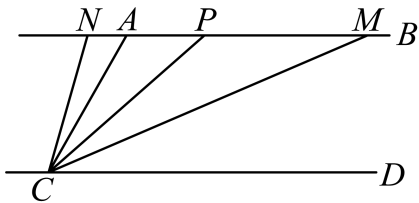
设 $\angle PCN = \alpha$,

$$\because \angle PCN = \frac{1}{4}\angle PNC,$$

$$\therefore \angle PNC = 4\alpha,$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle ANC = 4a = 2\angle AMC, \\
&\therefore \angle AMC = 2a, \\
&\because AB \parallel CD, \\
&\therefore \angle AMC = \angle MCD = 2a, \\
&\because \angle ANC = \angle AMC + \angle NCM, \\
&\therefore \angle AMC = \angle NCM = 2a, \\
&\therefore \angle PCM = \angle PCN + \angle NCM = 3a, \\
&\because CP \text{ 平分 } \angle ACM, \\
&\therefore \angle PCM = \angle ACP = 3a, \\
&\therefore \angle ACD = 2\angle ACP + \angle MCD = 6a + 2a = 8a, \\
&\because AB \parallel CD, \angle BAC = 100^\circ, \\
&\therefore \angle ACD = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ, \\
&\therefore 8a = 80^\circ, \\
&\therefore a = 10^\circ, \\
&\therefore \angle PCM = 3a = 30^\circ;
\end{aligned}$$

②当点 N 在点 A 的左侧时, $\angle PNC$ 和 $\angle ANC$ 是同一个角,



$$\begin{aligned}
&\text{设 } \angle PCN = a, \angle ACP = \beta, \\
&\because CP \text{ 平分 } \angle ACM, \\
&\therefore \angle PCM = \angle ACP = \beta, \quad \angle ACM = 2\beta, \\
&\therefore \angle ACN = \angle PCN - \angle ACP = a - \beta, \\
&\therefore \angle PNC = 4\angle PCN = 4a, \\
&\therefore \angle ANC = 4a, \quad \angle NMC = 2a, \\
&\because AB \parallel CD, \angle BAC = 100^\circ, \\
&\therefore \angle NMC = \angle MCD = 2a, \quad \angle ACD = 180^\circ - \angle BAC = 80^\circ, \\
&\therefore \angle MCD = \angle ACD - \angle ACM = 80^\circ - 2\beta,
\end{aligned}$$

$$\therefore 2\alpha = 80^\circ - 2\beta, \text{ 即: } \alpha = 40^\circ - \beta,$$

$$\because \angle BAC = \angle PNC + \angle ACN,$$

$$\therefore 100^\circ = 4\alpha + \alpha - \beta,$$

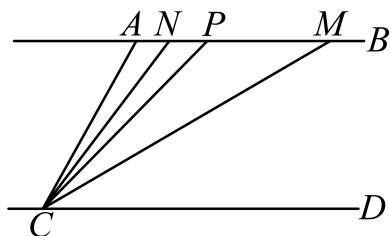
$$\therefore 5\alpha - \beta = 100^\circ,$$

将 $\alpha = 40^\circ - \beta$ 代入上式解得: $5(40 - \beta) - \beta = 100^\circ$

$$\beta = \frac{50^\circ}{3},$$

$$\therefore \angle PCM = \beta = \frac{50^\circ}{3},$$

③当点 N 在 A, P 之间时,



设 $\angle PCN = \alpha, \angle ACN = \beta$, 则 $\angle ACP = \alpha + \beta$,

$\therefore CP$ 平分 $\angle ACM$,

$$\therefore \angle ACP = \angle PCM = \alpha + \beta, \angle ACM = 2(\alpha + \beta),$$

$$\therefore \angle MCD = \angle ACD - \angle ACM = 80^\circ - 2(\alpha + \beta),$$

由已知得: $\angle PNC = 4\angle PCN = 4\alpha$,

$$\therefore \angle ANC = 180^\circ - \angle PNC = 180^\circ - 4\alpha,$$

$$\therefore \angle ANC = 2\angle AMC,$$

$$\therefore \angle AMC = 90^\circ - 2\alpha,$$

$$\therefore \angle AMC = \angle MCD,$$

$$\therefore 90^\circ - 2\alpha = 80^\circ - 2(\alpha + \beta),$$

$\therefore \beta = -5^\circ$, 不合题意, 此种情况不存在.

综上所述: $\angle PCM$ 的度数为 30° 或 $\frac{50^\circ}{3}$.

故答案为: 30° 或 $\frac{50^\circ}{3}$.

三、解答题: 本题共 8 小题, 共 64 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

19. 阅读并填空：如图，我们已经学过用直尺、圆规作线段的中点的方法：

以点 A 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长 a 为半径作弧；以点 B 为圆心，

以 a 为半径作弧，两弧分别相交于点 E 、 F ；

作直线 EF ，交线段 AB 于点 C ，点 C 就是所求线段 AB 的中点。

请说明这种作法正确的理由。

解：连接 AE 、 BE 、 AF 、 BF ，

$$\begin{cases} EF = EF \\ () = () \text{ (画弧时所取的半径相等)} \\ () = () \text{ (画弧时所取的半径相等)} \end{cases}$$

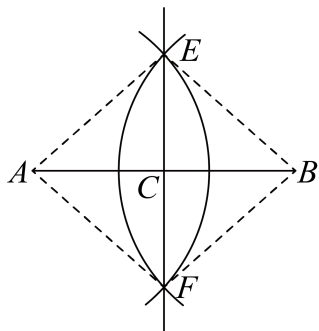
$$\therefore \triangle EAF \cong \triangle EBF$$

$$\therefore \angle AEF = \angle BEF \quad (\quad),$$

$$\text{又} \because AE = BE,$$

$$\therefore AC = BC \quad (\quad),$$

即点 C 是线段 AB 的中点。



【答案】 AE, BE ， AF, BF ，全等三角形的对应角相等，三线合一

【解析】

【分析】 本题考查作图—复杂作图，全等三角形的判定和性质，角平分线的性质，线段的垂直平分线的性质，解题的关键是正确寻找全等三角形解决问题；证明 $\triangle EAF \cong \triangle EBF$ (SSS)，推出 $\angle AEF = \angle BEF$ ，再利用等腰三角形的三线合一的性质证明即可。

【详解】 解：连接 AE 、 BE 、 AF 、 BF ，

$$\begin{cases} EF = EF \\ AE = BE, \\ AF = BF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EAF \cong \triangle EBF \text{ (SSS)},$$

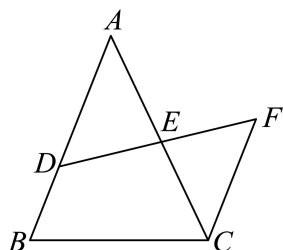
$$\therefore \angle AEF = \angle BEF \text{ (全等三角形的对应角相等)},$$

$$\text{又} \because AE = BE,$$

$$\therefore AC = BC \text{ (三线合一)},$$

即点 C 是线段 AB 的中点.

20. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是边 AB 上一点, 点 E 是边 AC 的中点, 过 C 作 $CF \parallel AB$, 交 DE 的延长线于点 F .



(1) 求证: $\triangle ADE \cong \triangle CFE$;

(2) 若 $AB = 5$, $CF = 3$, 求 BD 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) 2

【解析】

【分析】 本题考查的是全等三角形的判定与性质, 掌握“利用 AAS 证明三角形全等及利用全等三角形的性质求解线段的长度”是解本题的关键.

(1) 先证明 $AE = CE$, 再证明 $\triangle ADE \cong \triangle CFE$, $AD = CF$, 从而可得结论;

(2) 利用全等三角形的性质证明 $\therefore AD = CF = 3$, 从而可得答案.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 点 E 是边 AC 的中点,

$$\therefore AE = CE,$$

$$\because CF \parallel AB$$

$$\therefore \angle ADE = \angle CFE,$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CFE \text{ (AAS)};$$

【小问 2 详解】

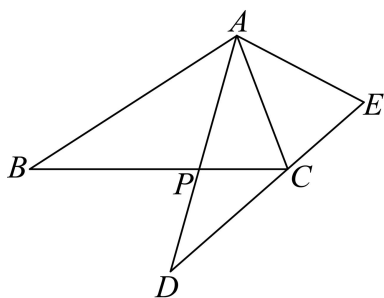
$$\because \triangle ADE \cong \triangle CFE, \quad CF = 3,$$

$$\therefore AD = CF = 3,$$

$$\because AB = 5,$$

$$\therefore BD = AB - AD = 5 - 3 = 2$$

21. 如图, 已知 ABC 和 ADE , $AB = AD$, $\angle BAD = \angle CAE$, $\angle B = \angle D$, AD 与 BC 交于点 P , 点 C 在 DE 上.



(1) 求证 $\triangle ACE$ 是等腰三角形;

(2) 若 $\angle B = 25^\circ$, $\angle APC = 65^\circ$, 求 $\angle E$ 的度数.

【答案】(1) 详见解析

(2) 70°

【解析】

【分析】(1) 先证明 $\angle BAC = \angle DAE$, 进而可依据“SAS”判定 ABC 和 ADE 全等得 $AC = AE$, 由此即可得出结论;

(2) 先根据三角形外角性质求出 $\angle BAD = \angle CAE = 40^\circ$, 然后根据等腰三角形的性质及三角形内角和定理即可得出 $\angle E$ 的度数.

【小问 1 详解】

证明: $\because \angle BAD = \angle CAE$,

$$\therefore \angle BAD + \angle CAD = \angle CAE + \angle CAD,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle DAE,$$

在 ABC 和 ADE 中,

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle BAC = \angle DAE, \\ \angle B = \angle D \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADE (\text{SAS}),$$

$$\therefore AC = AE,$$

$\therefore \triangle ACE$ 是等腰三角形;

【小问 2 详解】

解: $\because \angle APC$ 是 $\triangle PAB$ 的外角,

$$\therefore \angle APC = \angle B + \angle BAD,$$

$$\therefore \angle B = 25^\circ, \quad \angle APC = 65^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle APC - \angle B = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE = 40^\circ,$$

在 $\triangle ACE$ 中, $\angle E + \angle ACE + \angle CAE = 180^\circ$,

由 (1) 可知: $AC = AE$,

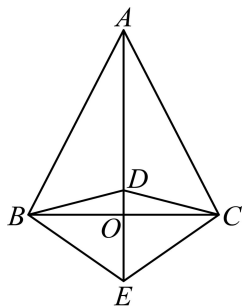
$$\therefore \angle E = \angle ACE,$$

$$\therefore 2\angle E + 40^\circ = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle E = 70^\circ.$$

【点睛】此题主要考查了全等三角形的判定和性质, 等腰三角形的判定和性质, 熟练掌握全等三角形的判定和性质, 等腰三角形的判定和性质是解决问题的关键.

22. 如图, 已知: $AB = AC$, $DB = DC$, 点 E 在 AD 的延长线上.



(1) 求证: AE 垂直平分 BC ;

(2) 求证: $\triangle BDE \cong \triangle CDE$

【答案】(1) 详见解析

(2) 详见解析

【解析】

【分析】本题考查全等三角形的判定, 线段垂直平分线的性质性质.

(1) 由线段垂直平分线性质的逆定理, 即可证明问题;

(2) 由线段垂直平分线的性质定理推出 $BE = CE$ ，即可证明 $\triangle BDE \cong \triangle CDE$ (SSS)。

【小问 1 详解】

证明： $\because AB = AC, DB = DC,$

$\therefore$ 点 A 和 D 都在线段 BC 的垂直平分线上，

$\therefore AE$ 垂直平分 BC ；

【小问 2 详解】

证明：由 (1) 知 AE 垂直平分 BC ，

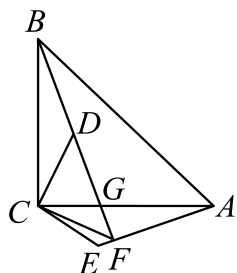
$\therefore BE = CE$ ，

在 $\triangle BDE$ 和 $\triangle CDE$ 中，

$$\begin{cases} BE = CE \\ DE = DE, \\ BD = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle BDE \cong \triangle CDE$ (SSS)。

23. 如图， $BC \perp CA$ ， $BC = CA$ ， $DC \perp CE$ ， $DC = CE$ ，连接 AE ，线段 BD 的延长线与 AE 交于点 F ，交 AC 于点 G ，连接 CF 。



(1) 求证： $\triangle ACE \cong \triangle BCD$ ；

(2) 求证： $BF \perp AE$ 。

【答案】(1) 见解析；

(2) 见解析。

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的判定与性质。

(1) 根据垂直的定义得到 $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ ，由角的和差得到 $\angle BCD = \angle ACE$ ，即可得到结论。

(2) 证明 $\angle CBD = \angle CAE$ ，结合 $\angle BGC = \angle AGF$ ，再利用三角形的内角和定理可得结论。

【小问 1 详解】

证明： $\because BC \perp CA, DC \perp CE,$

$$\therefore \angle ACB = \angle DCE = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle BCD = \angle ACE,$$

在 $\triangle BCD$ 与 $\triangle ACE$ 中,

$$\therefore \begin{cases} BC = AC \\ \angle BCD = \angle ACE, \\ CD = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BCD (\text{SAS}).$$

【小问 2 详解】

证明: 由 (1) 知 $\triangle BCD \cong \triangle ACE$,

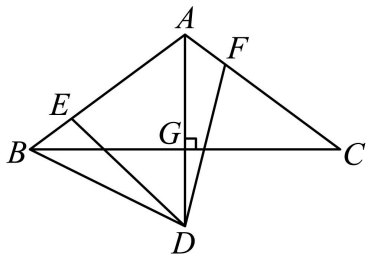
$$\therefore \angle CBD = \angle CAE,$$

$$\therefore \angle BGC = \angle AGF,$$

$$\therefore \angle AFB = \angle ACB = 90^\circ.$$

$$\therefore BF \perp AE.$$

24. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 120^\circ$, $AD \perp BC$, 垂足为 G , 且 $AD = AB$, $\angle EDF = 60^\circ$, 其两边分别交边 AB, AC 于点 E, F .



(1) 求证: $\triangle ABD$ 是等边三角形;

(2) 求证: $BE = AF$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的性质, 等边三角形的判定与性质, 全等三角形的判定与性质. 熟练掌握全等三角形的判定与性质是解决问题的关键.

(1) 由等腰三角形的性质和已知条件得出 $\angle BAD = \angle DAC = \frac{1}{2} \angle BAC$, 再由 $AD = AB$, 即可得出 $\triangle ABD$ 是等边三角形;

(2) 由 $\triangle ABD$ 是等边三角形, 得出 $\angle ABD = \angle ADB = 60^\circ$, $BD = AD$, 证出 $\angle BDE = \angle ADF$, 由 ASA 证明 $\triangle BDE \cong \triangle ADF$ 可得 $BE = AF$.

【小问 1 详解】

$$\because AB = AC, AD \perp BC,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle DAC = \frac{1}{2} \angle BAC,$$

$$\because \angle BAC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle DAC = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ,$$

$$\because AD = AB,$$

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形;

【小问 2 详解】

$\because \triangle ABD$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle ABD = \angle ADB = 60^\circ, BD = AD$$

$$\because \angle EDF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle EDF,$$

$$\therefore \angle ADB - \angle ADE = \angle EDF - \angle ADE,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle ADF,$$

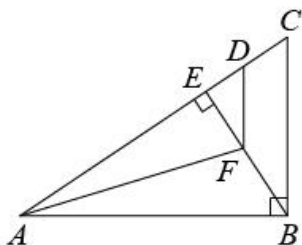
在 $\triangle BDE$ 与 $\triangle ADF$ 中,

$$\begin{cases} \angle DBE = \angle DAF = 60^\circ \\ BD = AD \\ \angle BDE = \angle ADF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BDE \cong \triangle ADF (\text{ASA}),$$

$$\therefore BE = AF.$$

25. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB \perp BC$, $BE \perp AC$ 于 E , AF 平分 $\angle BAC$ 交 BE 于点 F , $DF \parallel BC$.



(1) 试说明: $BF = DF$;

(2) 延长 AF 交 BC 于点 G , 试说明: $BG = DF$.

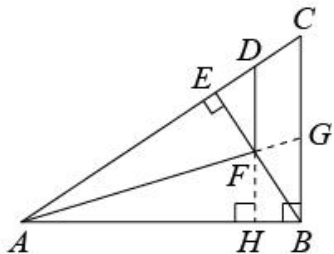
【答案】(1) 说明见解析; (2) 说明见解析.

【解析】

【分析】(1) 由角平分线的性质可得 $FE=FH$ ，由“ASA”可证 $\triangle DEF \cong \triangle BHF$ ，可得 $BF=DF$ ；

(2) 由等角的余角相等可得 $\angle AFE = \angle AGB = \angle BFG$ ，可得 $BF=BG=DF$ 。

【详解】解：(1) 如图，延长 DF 交 AB 于 H ，延长 AF 交 BC 于 G ，



$\because AB \perp BC, DF \parallel BC,$

$\therefore DH \perp AB,$

$\because AF$ 平分 $\angle BAC, BE \perp AC, DH \perp AB,$

$\therefore FE = FH,$

又 $\because \angle DFE = \angle BFH, \angle DEF = \angle BHF = 90^\circ,$

$\therefore \triangle DEF \cong \triangle BHF$ (ASA),

$\therefore BF = DF;$

(2) $\because AF$ 平分 $\angle BAC,$

$\therefore \angle EAF = \angle BAG,$

$\because \angle EAF + \angle AFE = 90^\circ, \angle BAG + \angle AGB = 90^\circ,$

$\therefore \angle AFE = \angle AGB,$

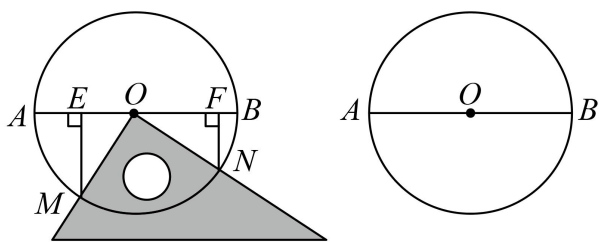
$\therefore \angle BFG = \angle AGB,$

$\therefore BF = BG,$

$\therefore BG = DF.$

【点睛】本题考查了全等三角形的判定和性质，角平分线的性质，直角三角形的性质，灵活运用全等三角形的性质是本题的关键。

26. 已知， AB 是圆 O 的直径，取一把直角三角尺，按如图位置摆放，其中直角顶点放在圆心 O 上，两条直角边与圆 O 相交于点 M 和点 N ，作 $ME \perp AB$ ，垂足为点 E ， $NF \perp AB$ ，垂足为点 F 。



(1) 试说明 $EF = ME + NF$ 的理由.

(2) 如果将这把直角三角尺绕圆心 O 旋转 (点 M, N 与点 A, B 都不重合), 那么 EF 与 ME, NF 之间的数量关系是否会发生变化? 如果发生变化, 请写出它们的数量关系; 如果不发生变化, 请说明理由.

【答案】(1) 详见解析

(2) EF 与 ME, NF 的数量关系发生变化, 当 $OF > OE$ 时, $EF = OF - OE = ME - NF$, 当 $OE > OF$ 时, $EF = OE - OF = NF - ME$

【解析】

【分析】本题主要考查了全等三角形的性质与判定, 熟知全等三角形的性质与判定定理是解题的关键.

(1) 根据题意可得 $OM = ON$, $\angle MON = 90^\circ$, 再证明 $\angle 1 = \angle 3$, 则可证明 $\triangle MOE \cong \triangle ONE$ (AAS), 得到 $ME = OF$, $NF = OE$, 再由线段的和差关系即可证明结论;

(2) 分图 1, 图 2, 图 3 三种情况讨论求解即可.

【小问 1 详解】

证明: 如图 1 所示,

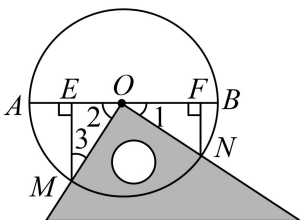


图1

$\because$ 三角尺的两条直角边分别与 $\odot O$ 交于 M, N 两点; 直角顶点在圆心 O 上,

$$\therefore OM = ON, \angle MON = 90^\circ,$$

$$\because ME \perp AB, NF \perp AB,$$

$$\therefore \angle OEM = \angle OFN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3,$$

$$\therefore \triangle MOE \cong \triangle ONE \text{ (AAS)},$$

$$\therefore ME = OF, \quad NF = OE,$$

$$\therefore EF = OE + OF = NF + ME;$$

【小问 2 详解】

EF 与 ME 、 NF 的数量关系发生变化

当 E 、 F 在点 O 两侧时，如图 1 所示，则 $EF = ME + NF$ ；

当 E 、 F 在点 O 同侧时，同 (1) 可证 $\triangle MOE \cong \triangle NOF$ ，

$$\therefore ME = OF, \quad NF = OE,$$

如图 2 所示，当 $OF > OE$ 时， $EF = OF - OE = ME - NF$ ，

如图 3 所示，当 $OE > OF$ 时， $EF = OE - OF = NF - ME$.

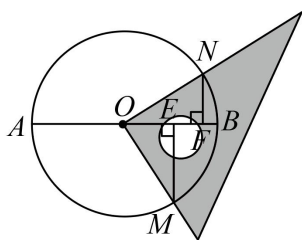


图2

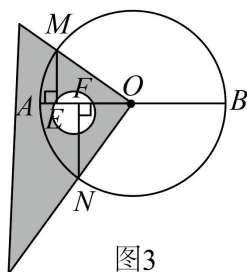


图3