

2024 – 2025 年第二学期七年级数学第一次质量评估

一. 选择题 (每题 3 分, 共 18 分)

1. 已知 $-x > -1$, 则下列不等式一定成立的是 ()

- A. $x > 1$ B. $x < 1$ C. $x > -1$ D. $x < -1$

【答案】B

【解析】

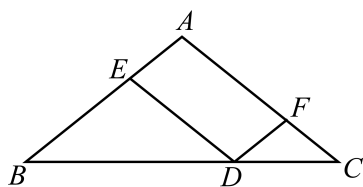
【分析】本题主要考查了不等式的性质, 解题的关键是掌握不等式两边同时乘以或除以同一个负数, 不等号方向改变. 根据不等式的性质, 求该不等式的解集即可.

【详解】解: $\because -x > -1$,

$\therefore x < 1$,

故选: B.

2. 如图, 在下列条件中, 能说明 $AC \parallel DE$ 的是 ()



- A. $\angle A = \angle CFD$ B. $\angle BED = \angle EDF$
C. $\angle BED = \angle A$ D. $\angle A + \angle AFD = 180^\circ$

【答案】C

【解析】

【分析】根据平行线的判定逐项进行分析即可;

【详解】解: A、当 $\angle A = \angle CFD$ 时, 则 $AB \parallel DF$, 不合题意;

B、当 $\angle BED = \angle EDF$ 时, 则 $AB \parallel DF$, 不合题意;

C、当 $\angle BED = \angle A$ 时, 则 $AC \parallel DE$, 符合题意;

D、当 $\angle A + \angle AFD = 180^\circ$ 时, 则 $AB \parallel DF$, 不合题意;

故选: C.

【点睛】本题主要考查了平行线的判定, 准确分析是解题的关键.

3. 下列命题: ①同旁内角互补, 两直线平行; ②偶数一定能被 2 整除; ③末位数是 5 的数, 能被 5 整除;

④对顶角相等. 逆命题是假命题的个数是 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了命题与逆命题，命题的真假，先写出命题的逆命题，再对逆命题的真假进行判断即可，正确写出命题的逆命题是解题的关键.

【详解】解：①同旁内角互补，两直线平行的逆命题是两直线平行，同旁内角互补，是真命题；

②偶数一定能被2整除的逆命题是能被2整除的是偶数，是真命题；

③末位数字是5的数，能被5整除的逆命题是能被5整除的数，末位数字是5，是假命题，因为末尾数也可以是0；

④对顶角相等的逆命题是相等的角是对顶角，是假命题；

$\therefore$ 逆命题是假命题的个数是2个，

故选：B.

4. 小颖家每月水费都不少于15元，自来水公司的收费标准如下：若每户每月用水不超过5立方米，则每立方米收费1.8元；若每户每月用水超过5立方米，则超过部分每立方米收费2元，小颖家每月用水量至少是（ ）

A. 6立方米

B. 7立方米

C. 8立方米

D. 9立方米

【答案】C

【解析】

【分析】设小颖每月用水量是x立方米，根据小颖家每月水费都不少于15元及超过5立方米与不超过5立方米的水费价格列出不等式，求解即可得答案.

【详解】设小颖每月用水量是x立方米，

根据题意得： $1.8 \times 5 + 2(x - 5) \geq 15$,

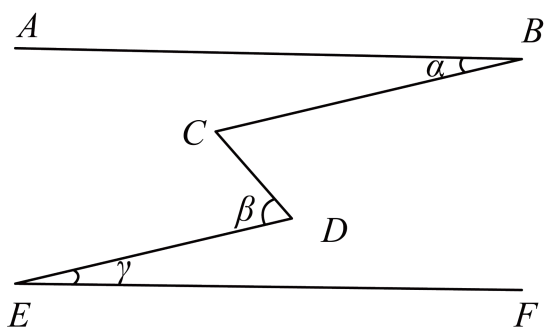
解得， $x \geq 8$,

$\therefore$ 小颖家每月用水量至少是8立方米.

故选：C.

【点睛】本题主要考查了一元一次不等式的应用，将现实生活中的事件与数学思想联系起来，读懂题意，列出不等关系式即可求解.

5. 如图， $AB \parallel EF$, $\angle C = 60^\circ$ ，则 α, β, γ 的关系为（ ）



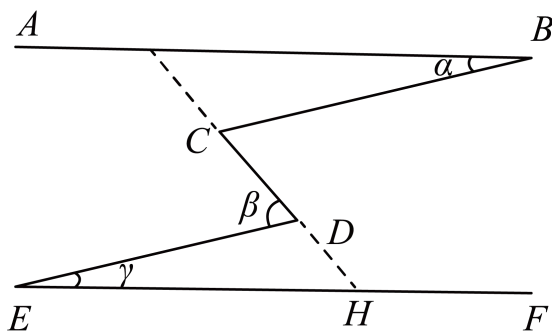
- A. $\beta = \alpha + \gamma$ B. $\alpha + \beta - \gamma = 60^\circ$ C. $\beta + \gamma - \alpha = 90^\circ$ D. $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题主要考查了三角形外角的性质，平行线的性质，解题的关键是熟练掌握基本性质. 延长 DC 交 AB 与 G ，延长 CD 交 EF 于 H ，利用三角形的外角的性质以及平行线的性质得到 $\beta = \gamma + 60^\circ - \alpha$ ，从而即可得到答案.

【详解】 解：延长 DC 交 AB 与 G ，延长 CD 交 EF 于 H ，如图所示：



在 $\triangle CBG$ 中 $\angle BCD = \angle BGC + \alpha$ ，

$$\therefore \angle BCD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BGC = 60^\circ - \alpha,$$

$$\therefore AB \parallel EF,$$

$$\therefore \angle EHD = \angle BGC = 60^\circ - \alpha,$$

在 $\triangle EHD$ 中， $\beta = \gamma + \angle EHD$ ，

$$\therefore \beta = \gamma + 60^\circ - \alpha,$$

$$\alpha + \beta - \gamma = 60^\circ,$$

故选： B.

6. 整数 a 使得关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} ax - y = 11 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$ 的解为正整数 (x, y 均为正整数)，且使得关于 x

的不等式组 $\begin{cases} \frac{1}{4}(2x+8) \geq 7 \\ x-a < 2 \end{cases}$ 无解，则所有满足条件的 a 的和为 ()

A. 9

B. 16

C. 17

D. 30

【答案】C

【解析】

【分析】表示出方程组的解，由 a 为整数且方程组的解为正整数确定出 a 的值，再由不等式组无解，确定出满足题意 a 的值，求出之和即可.

【详解】解：方程组 $\begin{cases} ax-y=11 \text{ ①} \\ 3x-y=1 \text{ ②} \end{cases}$,

①-②得： $(a-3)x=10$,

解得： $x=\frac{10}{a-3}$,

把 $x=\frac{10}{a-3}$ 代入②得： $\frac{30}{a-3}-y=1$,

解得： $y=\frac{33-a}{a-3}$,

$\because a$ 为整数， x, y 为正整数，

$\therefore a-3=1$ 或 2 或 5 或 10 ,

解得： $a=4$ 或 5 或 8 或 13 ,

不等式组整理得： $\begin{cases} x \geq 10 \\ x < a+2 \end{cases}$,

$\therefore$ 不等式组无解，

$\therefore a+2 \leq 10$,

解得： $a \leq 8$,

$\therefore$ 满足题意 a 的值为 4 或 5 或 8 ，之和为 $4+5+8=17$ ，故 C 正确.

故选：C.

【点睛】本题主要考查了解一元一次不等式组，以及二元一次方程组的解，熟练掌握各自的解法是解本题的关键.

二、填空题 (每空 2 分，共 26 分)

7. 用不等式表示“2 与 m 的 3 倍的和是正数”：_____.

【答案】 $2+3m > 0$

【解析】

【分析】 本题考查的是列不等式，读懂题意，抓住关键词语，弄清运算的先后顺序和不等关系，才能把文字语言的不等关系转化为用数学符号表示的不等式；根据和是正数，那么最后算的和应大于 0，列出不等式即可.

【详解】 解：根据题意，得： $2+3m>0$.

故答案为： $2+3m>0$.

8. 已知关于 x 的方程 $x - \frac{x+a}{3} = 1$ 的解是不等式 $2x+a<0$ 的一个解，则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a < -\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 本题考查了方程的解与不等式的解集，正确解关于 x 的不等式是关键.

首先解方程求得 a 的值，然后代入不等式即可求得 a 的范围.

【详解】 解：解方程 $x - \frac{x+a}{3} = 1$,

方程两边同时乘以 3 得 $3x - x - a = 3$,

解得： $x = \frac{a+3}{2}$,

把 $x = \frac{a+3}{2}$ 代入 $2x+a<0$ 得： $a+3+a<0$,

解得： $a < -\frac{3}{2}$.

故答案为： $a < -\frac{3}{2}$.

9. 用不等号填空，若 $a>b$ ，则 $-\frac{1}{3}a+1$ _____ $-\frac{1}{3}b+1$ (填 “>” 或 “<”).

【答案】 <

【解析】

【分析】 本题考查了不等式的性质，利用不等式的性质解答即可得到结果. 熟练掌握不等式的基本性质是解本题的关键. 不等式的基本性质：不等式两边加(或减)同一个数(或式子)，不等号的方向不变；不等式两边乘(或除以)同一个正数，不等号的方向不变. 不等式两边乘(或除以)同一个负数，不等号的方向改变.

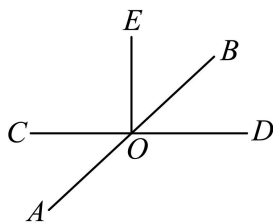
【详解】 解： $\because a>b$,

$\therefore -\frac{1}{3}a < -\frac{1}{3}b$,

$\therefore -\frac{1}{3}a+1 < -\frac{1}{3}b+1$.

故答案为： <.

10. 如图, 直线 AB , CD 相交于点 O , $EO \perp CD$ 于点 O . 若 $\angle BOD : \angle BOC = 2:7$, 则 $\angle AOE$ 的度数为_____.



【答案】 130° ## 130 度

【解析】

【分析】 先求得 $\angle BOD$ 的度数, 再根据对顶角相等得出 $\angle BOD = \angle AOC$, 根据垂直的定义即可求解.

【详解】 解: $\because \angle BOD : \angle BOC = 2:7$, $\angle BOD + \angle BOC = 180^\circ$,

$$\therefore \angle BOD = \frac{2}{9} \times 180^\circ = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle BOD = \angle AOC = 40^\circ$$

$$\because EO \perp CD,$$

$$\therefore \angle EOC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOE = \angle EOC + \angle AOC = 90^\circ + 40^\circ = 130^\circ,$$

故答案为: 130° .

【点睛】 本题考查了对顶角相等, 垂线的定义, 熟练掌握以上知识是解题的关键.

11. 下列语句: ①同旁内角相等; ②如果 $a = b$, 那么 $a + c = b + c$; ③对顶角相等吗? ④画线段 AB ; ⑤两点确定一条直线. 其中是命题的有_____; 是真命题的有_____. (只填序号)

【答案】 ①. ①②⑤ ②. ②⑤

【解析】

【分析】 判断一件事情的语句叫命题, 正确的命题叫真命题, 根据定义依次分析解答.

【详解】 解: ①同旁内角相等是命题, 是假命题;

②如果 $a = b$, 那么 $a + c = b + c$ 是命题, 是真命题;

③对顶角相等吗? 不是命题;

④画线段 AB 不是命题;

⑤两点确定一条直线是命题, 是真命题.

故答案为: ①②⑤, ②⑤.

【点睛】 此题考查命题的定义, 真命题的定义, 熟记相关性质是解题的关键.

12. 某校开展了“科技节”课外知识竞赛. 一共有 20 道题, 每答对一题加 5 分, 不答不扣分, 每答错一题

倒扣 2 分. 已知小明答错与不答的题数相同, 最后比赛得分超过 64 分. 设小明答错了 x 道题, 根据题意, 可列出关于 x 的不等式为_____

【答案】 $5(20-2x)-2x>64$

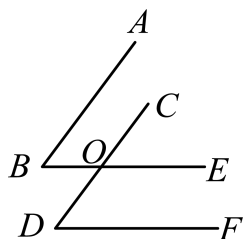
【解析】

【分析】 此题主要考查了由实际问题抽象出一元一次不等式; 设小明答错了 x 道题, 则答对的题数为 $(20-2x)$ 道, 根据最后比赛得分超过 64 分列出一元一次不等式即可.

【详解】 解: 设小明答错了 x 道题, 则答对的题数为 $(20-2x)$ 道,
根据题意, $5(20-2x)-2x>64$.

故答案为: $5(20-2x)-2x>64$.

13. 如图, 已知 $\angle B = \angle D$, 要使 $BE \parallel DF$, 还需添加一个条件, 你想添加的条件是_____.



【答案】 $\angle B = \angle COE$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】 此题主要考查了平行线的判定, 关键是掌握同位角相等两直线平行. 添加: $\angle B = \angle COE$, 再加上条件 $\angle B = \angle D$ 可得 $\angle COE = \angle D$, 再根据同位角相等两直线平行可得 $BE \parallel DF$.

【详解】 解: 添加: $\angle B = \angle COE$,

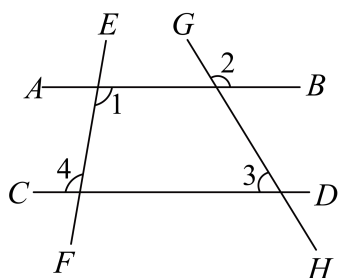
$\because \angle B = \angle D, \angle B = \angle COE,$

$\therefore \angle COE = \angle D,$

$\therefore BE \parallel DF,$

故答案为: $\angle B = \angle COE$ (答案不唯一).

14. 如图, 直线 AB 、 CD 分别与 EF 、 GH 相交, 已知 $\angle 1 = 100^\circ$, $\angle 2 = 115^\circ$, $\angle 3 = 65^\circ$, 那么 $\angle 4 =$ _____ $^\circ$.

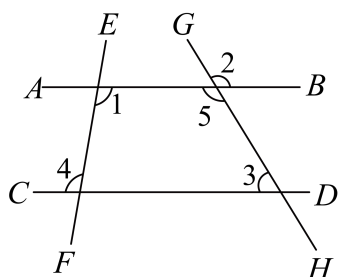


【答案】 100

【解析】

【分析】 本题考查平行线的判定和性质，由对顶角相等可得 $\angle 2 = \angle 5 = 115^\circ$ ，根据 $\angle 3 + \angle 5 = 180^\circ$ 可得 $AB \parallel CD$ ，由平行线的性质可得 $\angle 4 = \angle 1 = 100^\circ$ 。

【详解】 解：如图，



$\because \angle 2 = \angle 5 = 115^\circ, \angle 3 = 65^\circ,$

$\therefore \angle 3 + \angle 5 = 180^\circ,$

$\therefore AB \parallel CD,$

$\therefore \angle 4 = \angle 1 = 100^\circ,$

故答案为：100.

15. 如果两个角的两边两两互相平行，且一个角的 $\frac{1}{2}$ 等于另一个角的 $\frac{1}{3}$ ，则这两个角的度数分别是

_____.

【答案】 $72^\circ, 108^\circ$

【解析】

【分析】 如果两个角的两边互相平行，则这两个角相等或互补. 根据题意，得这两个角只能互补，然后列方程求解即可.

【详解】 解：设其中一个角是 x° ,

当两个角互补时，则另一个角是 $(180^\circ - x)^\circ$ ，根据题意得：

$$\frac{1}{2}x^{\circ} = \frac{1}{3}(180 - x)^{\circ},$$

解得 $x=72^{\circ}$,

$$\therefore 180^{\circ} - x = 108^{\circ};$$

当两个角相等时, 则另一个角是 x° , 依题意得:

$$\frac{1}{2}x^{\circ} = \frac{1}{3}x^{\circ},$$

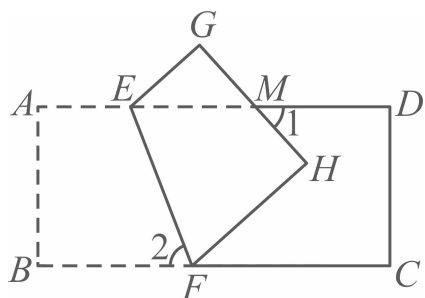
解得: $x=0$ (不符合题意),

综上所述, 这两个角的度数分别为 72° , 108° .

故答案为: $72^{\circ}, 108^{\circ}$.

【点睛】本题主要考查平行线的性质, 解答的关键是分类讨论这两个角可能存在的情况.

16. 如图, 四边形 $ABCD$ 为长方形, 点 E 、 F 分别为 AD 、 BC 边上一点, 将长方形 $ABCD$ 沿 EF 翻折, 点 A 、 B 分别落在 G 、 H 处, 若 $\angle 1 = \alpha$, 则 $\angle 2 = \underline{\hspace{2cm}}$. (用含 α 的代数式表示)



【答案】 $45^{\circ} + \frac{1}{2}\alpha$

【解析】

【分析】本题考查了平行线的性质、对顶角、折叠, 熟练掌握性质定理是解题的关键.

根据长方形的性质可得出 $\angle 2 = \angle MEF$, $\angle AEF + \angle 2 = 180^{\circ}$, 根据折叠的性质及对顶角相等可得出 $\angle GEM = 90^{\circ} - \alpha$, 利用 $\angle GEF = \angle GEM + \angle MEF$ 代入化简即可得出答案.

【详解】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为长方形,

$$\therefore \angle A = 90^{\circ}, \quad AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle MEF, \quad \angle AEF + \angle 2 = 180^{\circ}$$

$\because$ 将长方形 $ABCD$ 沿 EF 翻折,

$$\therefore \angle G = \angle A = 90^{\circ}, \quad \angle GEF = \angle AEF,$$

$$\because \angle 1 = \angle GME,$$

$$\therefore \angle GEM = 90^{\circ} - \angle 1 = 90^{\circ} - \alpha,$$

$$\because \angle GEF = \angle GEM + \angle MEF,$$

$$\therefore 180^\circ - \angle 2 = 90^\circ - a + \angle 2,$$

$$\therefore \angle 2 = 45^\circ + \frac{1}{2}a.$$

故答案为: $45^\circ + \frac{1}{2}a$.

17. 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} 2x - a < 0 \\ \frac{x-1}{2} + 2 \leq x \end{cases}$ 的解集只有 3 个整数解, 则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $10 < a \leq 12$

【解析】

【分析】 本题考查根据不等式组的解集求参数的范围, 先求出不等式组的解集, 根据不等式组的解集只有 3 个整数解, 列出关于 a 的不等式组, 进行求解即可.

【详解】 解: 解 $\begin{cases} 2x - a < 0 \\ \frac{x-1}{2} + 2 \leq x \end{cases}$, 得: $\begin{cases} x < \frac{a}{2}, \\ x \geq 3 \end{cases}$,

$\therefore$ 不等式组的解集只有 3 个整数解,

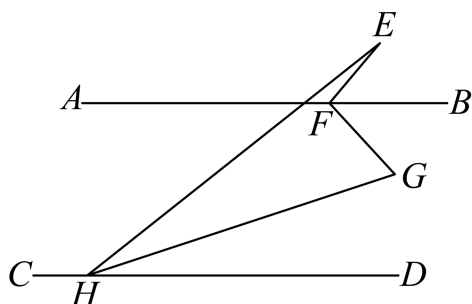
$$\therefore 3 \leq x < \frac{a}{2}, \text{ 3 个整数解为: } 3, 4, 5,$$

$$\therefore 5 < \frac{a}{2} \leq 6,$$

$$\therefore 10 < a \leq 12;$$

故答案为: $10 < a \leq 12$.

18. 如图, $AB \parallel CD$, 点 E 为 AB 上方一点, FB , HG 分别为 $\angle EFG$, $\angle EHD$ 的角平分线, 若 $\angle E + 2\angle G = 150^\circ$, 则 $\angle EFG$ 的度数为_____.



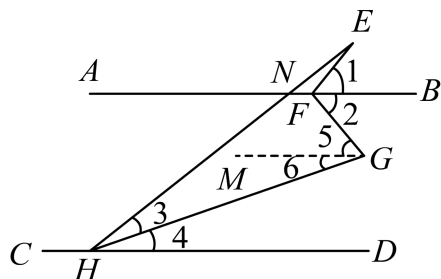
【答案】 100° 100 度

【解析】

【分析】 本题考查了平行线的性质、三角形的外角性质、角平分线的定义等知识点, 通过作辅助线, 构造平行线是解题关键.

过 G 作 $GM \parallel AB$ ，先根据平行线的性质、角的和差得出 $\angle FGH = \angle 2 + \angle 4$ ，再根据角平分线的定义得出 $\angle E + 2\angle 2 + \angle EHD = 150^\circ$ ，然后根据平行线的性质、三角形的外角性质得出 $\angle EHD = \angle 2 - \angle E$ ，联立求解可得 $\angle 2 = 50^\circ$ ，最后根据角平分线的定义可得 $\angle EFG = 2\angle 2 = 100^\circ$ 。

【详解】如图，过 G 作 $GM \parallel AB$ ，



$$\therefore \angle 2 = \angle 5,$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore MG \parallel CD,$$

$$\therefore \angle 6 = \angle 4,$$

$$\therefore \angle FGH = \angle 5 + \angle 6 = \angle 2 + \angle 4,$$

$$\because FB, HG \text{ 分别为 } \angle EFG, \angle EHD \text{ 的角平分线},$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2} \angle EFG, \quad \angle 3 = \angle 4 = \frac{1}{2} \angle EHD,$$

$$\therefore \angle E + 2\angle FGH = 150^\circ,$$

$$\therefore \angle E + 2(\angle 2 + \angle 4) = \angle E + 2\angle 2 + 2\angle 4 = \angle E + 2\angle 2 + \angle EHD = 150^\circ,$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle EHD = \angle ENB,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle ENB + \angle E,$$

$$\therefore \angle EHD = \angle 1 - \angle E = \angle 2 - \angle E,$$

$$\therefore \angle E + 2\angle 2 + (\angle 2 - \angle E) = 150^\circ,$$

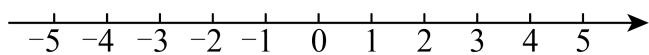
$$\text{解得 } \angle 2 = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle EFG = 2\angle 2 = 100^\circ,$$

故答案为： 100° 。

三. 解答题 (共 56 分) (19–22 题 6 分, 23 题 8 分, 24 题 7 分, 25 题 8 分, 26 题 9 分)

19. 解不等式组:
$$\begin{cases} 5x+9 > 3(x+1) \text{ ①} \\ \frac{1}{2}x-1 \leq 7-\frac{3}{2}x \text{ ②} \end{cases}, \text{ 并把不等式组的解集表示在数轴上.}$$



【答案】 $-3 < x \leq 4$ ，数轴见解析

【解析】

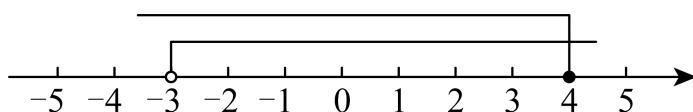
【分析】 本题考查不等式组的解法和在数轴上的表示法，如果是表示大于或小于号的点要用空心，如果是表示大于等于或小于等于号的点用实心.

分别求出不等式组中两不等式的解集，找出解集的公共部分即可.

【详解】 解：由不等式①得， $x > -3$ ，

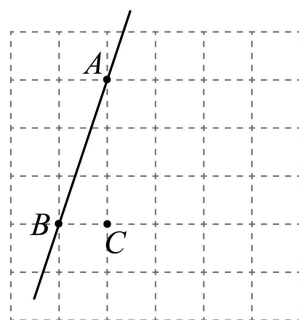
由不等式②得， $x \leq 4$ ，

在数轴上表示为：



$\therefore -3 < x \leq 4$.

20. 如图所示的正方形网格，所有小正方形的边长都为 1， A 、 B 、 C 都在格点上.



(1) 作图：①过点 C 画直线 AB 平行线 CD ；②过点 C 画直线 AB 垂线 CE ，垂足 E .

(2) 线段 CE 的长度是点_____到直线_____的距离；

(3) 比较大小： CE _____ CB (填 $>$ 、 $<$ 或 $=$)，理由：_____.

【答案】 (1) 见解析 (2) C ， AB

(3) $<$ ，垂线段最短

【解析】

【分析】 本题主要考查作图、平行线的判定和性质、垂线段最短、点到直线的距离等知识点，熟练掌握平行线的判定和性质是解题的关键.

(1) ①在 A 的右侧取格点 D ，满足 $AD = BC = 1$ ，再画直线 CD 即可，②如图，取格点 K ，再画直线 CK 交 AB 于 E 即可；

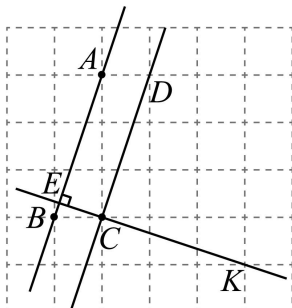
(2) 根据点到直线的距离的定义即可解答；

(3) 根据垂线段最短即可解答.

【小问 1 详解】

解: ①如图, 直线 CD 即为所求作;

②如图, 直线 CE 即为所求作.



【小问 2 详解】

解: 线段 CE 的长度是点 C 到直线 AB 的距离.

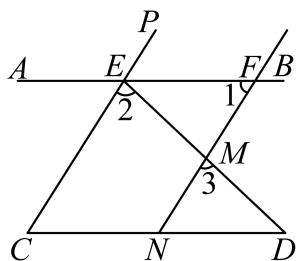
故答案为: C, AB .

【小问 3 详解】

解: $CE < CB$. 理由: 垂线段最短.

故答案为: $<$, 垂线段最短.

21. 如图, 已知点 E, F 在直线 AB 上, 点 N 在线段 CD 上, ED 与 FN 交于点 M , $\angle C = \angle 1, \angle 2 = \angle 3$.



(1) 求证: $AB \parallel CD$;

(2) 若 $\angle D = 47^\circ, \angle EMF = 80^\circ$, 求 $\angle AEP$ 的度数.

【答案】(1) 见解析 (2) $\angle AEP = 127^\circ$

【解析】

【分析】本题考查平行线的判定和性质, 熟练掌握平行线的判定方法和性质, 是解题的关键:

(1) 由 $\angle 2 = \angle 3$, 推出 $CE \parallel FN$, 进而推出 $\angle FND = \angle 1$, 即可得证;

(2) 根据平行线性质的和差关系, 以及对顶角相等, 即可得出结果.

【小问 1 详解】

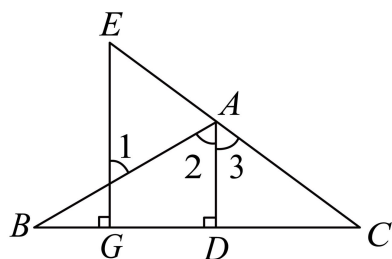
证明: $\because \angle 2 = \angle 3$,

$\therefore CE \parallel NF$,
 $\therefore \angle C = \angle FND$,
 又 $\because \angle C = \angle 1$,
 $\therefore \angle FND = \angle 1$,
 $\therefore AB \parallel CD$.

【小问 2 详解】

$\because \angle D = 47^\circ, \angle EMF = 80^\circ$, $AB \parallel CD$,
 $\therefore \angle BED = \angle D = 47^\circ$, $\angle 2 = \angle EMF = \angle 3 = 80^\circ$,
 $\therefore \angle BEC = \angle 2 + \angle BED = 80^\circ + 47^\circ = 127^\circ$,
 $\therefore \angle AEP = \angle BEC = 127^\circ$.

22. 如图, $AD \perp BC$ 于 D , $EG \perp BC$ 于 G , $\angle E = \angle 1$, 可得 AD 平分 $\angle BAC$,



解: 理由如下: $\because AD \perp BC$ 于 D , $EG \perp BC$ 于 G (已知),

$\therefore \angle ADC = \angle EGC = 90^\circ$ (_____)

$\therefore AD \parallel EG$ (_____)

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ (_____)

$\angle 3 = \angle E$, (_____)

又 $\because \angle E = \angle 1$ (已知),

$\therefore \angle 2 = \angle 3$ (_____)

$\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$ (_____)

【答案】垂直的定义; 同位角相等, 两直线平行; 两直线平行, 内错角相等; 两直线平行, 同位角相等; 等量代换; 角平分线定义

【解析】

【分析】本题主要考查了平行线的判定与性质, 垂直、角平分线的定义等知识. 解题的关键在于对知识的熟练掌握与灵活运用. 依据平行线的判定与性质, 垂直、角平分线的定义等知识进行解答即可.

【详解】解: $\because AD \perp BC$ 于 D , $EG \perp BC$ 于 G (已知),

$\therefore \angle ADC = \angle EGC = 90^\circ$ (垂直的定义),

$\therefore AD \parallel EG$ (同位角相等, 两直线平行),

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ (两直线平行, 内错角相等),

$\angle 3 = \angle E$ (两直线平行, 同位角相等),

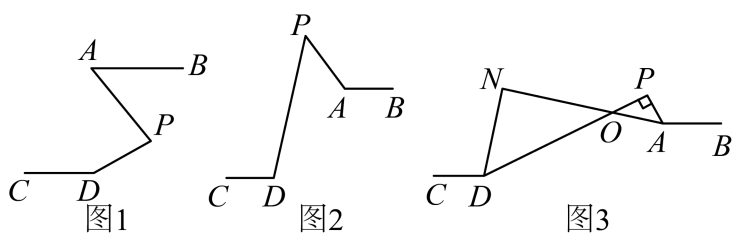
又 $\because \angle E = \angle 1$ (已知),

$\therefore \angle 2 = \angle 3$ (等量代换),

$\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$ (角平分线定义).

23. 【阅读理解】两条平行线间的拐点问题经常可以通过作一条直线的平行线进行转化.

已知直线 $AB \parallel CD$, P 为平面内一点, 连接 PA , PD .



(1) 如图 1, 已知 $\angle A = 50^\circ$, $\angle D = 150^\circ$, 则 $\angle APD$ 的度数为_____;

(2) 如图 2, 设 $\angle A = \alpha$, $\angle D = \beta$, 猜想 α , β , $\angle P$ 之间的数量关系, 并证明;

(3) 如图 3, $AP \perp PD$, $\angle ODN = \frac{1}{3} \angle PDC$, AN 交 DP 于点 O , $\angle PAN + \frac{1}{3} \angle PAB = \angle P$, 求 $\angle N$ 的度数.

【答案】(1) 80° ; (2) $\alpha + \beta - \angle DPA = 180^\circ$, 证明见解析; (3) 90°

【解析】

【分析】本题考查了平行线的性质, 垂线定义理解. 注意掌握辅助线的作法, 数形结合思想的应用.

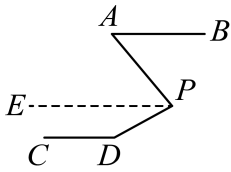
(1) 过点 P 作 $PE \parallel AB$, 根据平行线的公理得出 $PE \parallel AB \parallel CD$, 根据平行线的性质得出 $\angle APE = \angle A = 50^\circ$, $\angle EPD + \angle CDP = 180^\circ$, 最后求出 $\angle APD = \angle APE + \angle EPD = 50^\circ + 30^\circ = 80^\circ$;

(2) 过点 P 作 $PE \parallel AB$, 则 $AB \parallel PE \parallel CD$, 根据平行线的性质得出 $\angle DPE = \angle D = \angle \beta$, $\angle APE + \angle A = 180^\circ$, 求出 $\angle APE = 180^\circ - \alpha$, 得出 $\angle DPE = \angle DPA + \angle APE = \angle DPA + 180^\circ - \alpha$, 得出 $\beta = \angle DPA + 180^\circ - \alpha$, 即可得出答案;

(3) 根据 $\angle PAN + \frac{1}{3} \angle PAB = \angle P$, 得出 $\angle PAN + \frac{1}{3} \angle PAB = 90^\circ$, 求出 $\angle POA = \frac{1}{3} \angle PAB$, 得出 $\angle NOD = \frac{1}{3} \angle PAB$, 根据 $\angle ODN = \frac{1}{3} \angle PDC$, 得出 $\angle NOD + \angle OND = \frac{1}{3} \angle PAB + \frac{1}{3} \angle PDC = 90^\circ$, 即

可得出答案.

【详解】解: (1) 过点 P 作 $PE \parallel AB$, 如图所示:



$$\because AB \parallel CD,$$

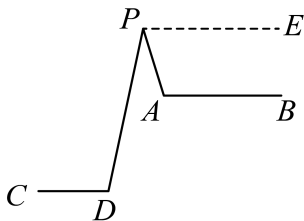
$$\therefore PE \parallel AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle APE = \angle A = 50^\circ, \quad \angle EPD + \angle CDP = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle EPD = 180^\circ - \angle CDP = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle APD = \angle APE + \angle EPD = 50^\circ + 30^\circ = 80^\circ;$$

(2) 过点 P 作 $PE \parallel AB$,



$$\because AB \parallel CD, PE \parallel AB,$$

$$\therefore AB \parallel PE \parallel CD,$$

$$\therefore \angle DPE = \angle D = \beta, \quad \angle APE + \angle A = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle APE = 180^\circ - \alpha, \quad \angle DPE = \angle DPA + \angle APE = \angle DPA + 180^\circ - \alpha,$$

$$\therefore \beta = \angle DPA + 180^\circ - \alpha,$$

$$\therefore \alpha + \beta - \angle DPA = 180^\circ.$$

(3) $\because AP \perp PD$,

$$\therefore \angle P = 90^\circ,$$

$$\because \angle PAN + \frac{1}{3} \angle PAB = \angle P,$$

$$\therefore \angle PAN + \frac{1}{3} \angle PAB = 90^\circ,$$

$$\because \angle PAN + \angle POA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle POA = \frac{1}{3} \angle PAB,$$

$$\begin{aligned}
&\because \angle POA = \angle NOD, \\
&\therefore \angle NOD = \frac{1}{3} \angle PAB, \\
&\because \angle ODN = \frac{1}{3} \angle PDC, \\
&\therefore \angle NOD + \angle OND = \frac{1}{3} \angle PAB + \frac{1}{3} \angle PDC \\
&= \frac{1}{3} (\angle PAB + \angle PDC) \\
&= \frac{1}{3} (180^\circ + \angle P) \\
&= \frac{1}{3} (180^\circ + 90^\circ) \\
&= 90^\circ, \\
&\therefore \angle N = 180^\circ - (\angle NOD + \angle OND) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.
\end{aligned}$$

24. 若关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} 2x + y = 5k \\ x - y = 4k + 3 \end{cases}$ 的解满足 $x + y \leq 6$ ，求 k 的取值范围.

【答案】 $k \leq \frac{7}{2}$

【解析】

【分析】 先把 k 当作已知表示出 x 、 y 的值，再根据 $x + y \leq 6$ 列出不等式，求出 k 的取值范围即可.

【详解】 解：解方程组 $\begin{cases} 2x + y = 5k \\ x - y = 4k + 3 \end{cases}$ 得， $\begin{cases} x = 3k + 1 \\ y = -k - 2 \end{cases}$,

$$\because x + y \leq 6,$$

$$\therefore 3k + 1 - k - 2 \leq 6,$$

$$\text{解得 } k \leq \frac{7}{2}.$$

$$\therefore k \text{ 的取值范围为 } k \leq \frac{7}{2}.$$

【点睛】 本题考查了解二元一次方程组，解题的关键是用 k 表示出 x 、 y 的值，再根据题意列出不等式.

25. 某公司计划购买 A 、 B 两种型号的打印机共 20 台，通过市场调研发现，购买 3 台 A 型打印机和 4 台 B 型打印机需 6180 元；购买 4 台 A 型打印机和 6 台 B 型打印机需 8840 元.

(1) 求购买 A 、 B 两种型号打印机每台的价格分别是多少元？

(2) 根据公司实际情况，要求购买 A 型打印机的数量不低于 B 型打印机数量的 $\frac{1}{4}$ ，不超过 B 型打印机数量的一半，且购买这两种型号打印机的总费用不能超过 17800 元，求该公司按计划购买 A 、 B 两种型号

打印机共有几种购买方案，哪种方案费用最低？并求出最低费用.

【答案】 (1) A 型打印机每台 860 元，B 型打印机每台 900 元. (2) 共有两种购进方案，方案一. 5 台 A 型打印机， 15 台 B 型打印机，方案二. 6 台 A 型打印机， 14 台 B 型打印机，方案二费用最低，最低费用为 17760 元.

【解析】

【分析】 (1) 设 A 型打印机每台 x 元，B 型打印机每台 y 元，根据题意，即可得出关于 x, y 的二元一次方程组，解之即可得出结论；

(2) 设购进 m 台 A 型打印机，则购进 $(20-m)$ 台 B 型打印机，根据购进打印机不超过 17800 元及 AB 两种型号打印机数量关系，即可得出关于 m 的一元一次不等式组，解之即可得出 m 的取值范围，再结合 m 为整数即可得出各进货方案.

【详解】 解：(1) 设 A 型打印机每台 x 元，B 型打印机每台 y 元，依题意得：

$$\begin{cases} 3x + 4y = 6180 \\ 4x + 6y = 8840 \end{cases},$$

解得： $\begin{cases} x = 860 \\ y = 900 \end{cases},$

答：A 型打印机每台 860 元，B 型打印机每台 900 元.

(2) 设购进 m 台 A 型打印机，则购进 $(20-m)$ 台 B 型打印机，依题意得：

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(20-m) \leq m \leq \frac{1}{2}(20-m) \\ 860m + 900(20-m) \leq 17800 \end{cases},$$

解得： $5 \leq m \leq \frac{20}{3},$

$\therefore m$ 为正整数，

$\therefore m$ 等于 5 或 6，

$\therefore$ 共有两种方案：

方案一. 购进 5 台 A 型打印机，购进 15 台 B 型打印机，总费用 $= 860 \times 5 + 900 \times 15 = 17800$ (元)，

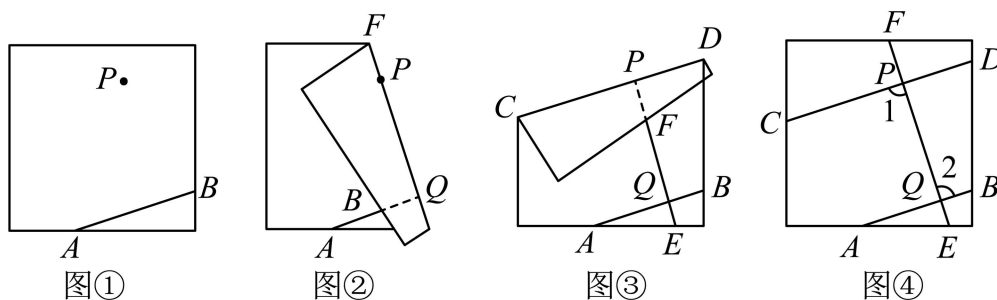
方案二. 购进 6 台 A 型打印机，购进 14 台 B 型打印机，总费用 $= 860 \times 6 + 900 \times 14 = 17760$ (元)，

故：方案二费用最低，最低费用为 17760 元.

【点睛】 本题考查了二元一次方程组的应用以及一元一次不等式组的应用，解题的关键是：(1) 找准等量关系，正确列出二元一次方程组；(2) 根据各数量之间的关系，正确列出一元一次不等式组.

26. 在数学活动课上，陈老师引导同学们探究画平行线的方法，张华通过折纸想出了过点 P 画直线 AB 的平

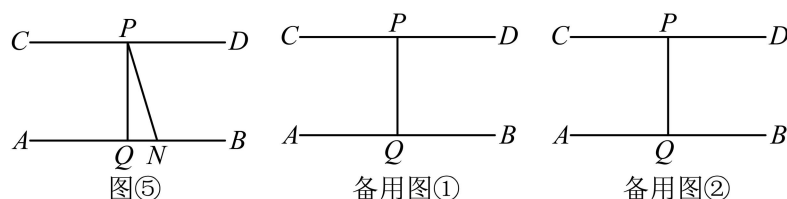
行线的方法，折纸过程如下：①－②－③－④．



(1) 通过上述的折纸过程，图②的折痕 PQ 与直线 AB 的位置关系是_____；如图④， $\angle 1 = \angle 2 =$ _____，则 AB 与 CD 的位置关系为_____．

(2) 张华在 (1) 的条件下继续探究，他在 P 、 Q 两点处安装了绚丽的小射灯，灯 P 射线从 PD 开始绕点 P 顺时针旋转至 PC 后立即回转，灯 Q 射线从 QA 开始绕点 Q 顺时针旋转至 QB 后立即回转两灯不停旋转交叉照射，且灯 P 、灯 Q 转动的速度分别是 $1^\circ/\text{秒}$ ， $3^\circ/\text{秒}$ ，若灯 P 射线转动 20 秒后，灯 Q 射线开始转动，在灯 P 射线第一次到达 PC 之前，当灯 Q 转动 t 秒时，灯 P 射线 PN 转动到如图⑤的位置．

①用含 t 的式子表示 $\angle DPN =$ _____；②当 $t = 45\text{s}$ 时，两条射线的夹角为_____．



(3) 在 (2) 的条件下，在灯 P 射线第一次到达 PC 之前．

Q 灯转动_____秒，两灯的光束互相平行；

Q 灯转动_____秒，两灯的光束互相垂直．

【答案】 (1) 垂直； 90° ；平行

(2) ① $(20 + t)^\circ$ ；② 70°

(3) 10 或 85 或 130；55 或 107.5 或 145

【解析】

【分析】 (1) 根据折叠性质及平行线判定即可得到本题答案；

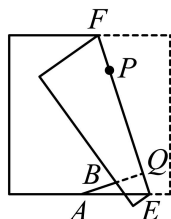
(2) ①先求出灯 P 转动 20 秒后度数为 $20 \times 1 = 20^\circ$ ，继而得出本题答案；

②算出当 $t = 45\text{s}$ 时， $\angle DPN = 20 + t = 65^\circ$ ， $\angle AQH = 45 \times 3 = 135^\circ$ ，再根据 $AB \parallel CD$ ，得出 $\angle PHQ = \angle HQB = 45^\circ$ ，即可求出两条射线的夹角．

(3) 分三种情况：当 $0 \leq t \leq 60$ 时，当 $60 < t \leq 120$ 时，当 $120 < t \leq 160$ 时，分别画出图形，根据平行线的性质和垂直的定义，列出方程，解题方程即可。

【小问 1 详解】

解：如图，



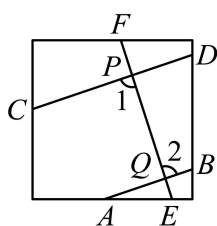
$\therefore$ 折叠，

$\therefore$ 直线 AB 折叠重合为两个角，平角为 180° ，

$\therefore \angle AQP = 90^\circ$ ，即 $AQ \perp PQ$ ，

$\therefore PQ$ 与直线 AB 的位置关系是：垂直，

如图：



$\therefore AB \perp PQ$ ，

$\therefore \angle 2 = 90^\circ$ ，

由折叠可知： $\angle 1 = \angle CPF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$ ，

$\therefore AB \parallel CD$ （内错角相等，两直线平行）；

故答案为：垂直； 90° ； 平行；

【小问 2 详解】

解：① $\therefore$ 灯 P ，灯 Q 转动的速度分别是 $1^\circ/\text{秒}$ ， $3^\circ/\text{秒}$ ，灯 P 射线转动 20 秒后，灯 Q 射线开始转动，

$\therefore$ 灯 P 转动 20 秒后度数为 $20 \times 1 = 20^\circ$ ，

又 $\therefore$ 当灯 Q 转动 t 秒时，灯 P 射线 PN 转动到如图（5）的位置，

$\therefore$ 此时灯 P 再次转动了 $t \cdot 1^\circ = t^\circ$ ，

$\therefore \angle DPN = (20 + t)^\circ$ ，

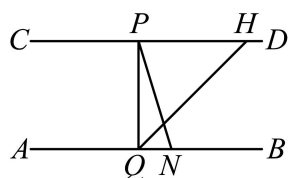
故答案为: $(20+t)^\circ$;

②当 $t = 45\text{s}$ 时, $\angle DPN = 20+t = 65^\circ$, $\angle AQH = 45 \times 3 = 135^\circ$,

$\because AB \parallel CD$,

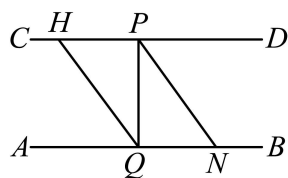
$\therefore \angle PHQ = \angle HQB = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$,

$\therefore$ 两条射线的夹角为 $= 180^\circ - 45^\circ - 65^\circ = 70^\circ$.



【小问 3 详解】

解: ①当 $0 \leq t \leq 60$ 时, 如图,



$\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle DPN = \angle PNA$,

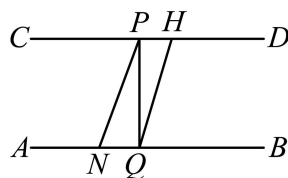
$\because QH \parallel PN$,

$\therefore \angle HQA = \angle PNA$,

$\therefore 3t = 1 \times (20+t)$,

解得: $t = 10$;

当 $60 < t \leq 120$ 时, 如图,



$\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle DPN = \angle PNA$,

$\because QH \parallel PN$,

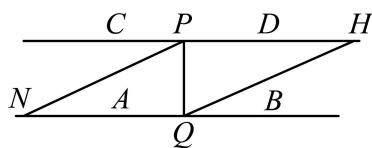
$\therefore \angle PNA = \angle AQH$,

$\therefore \angle DPN = \angle AQH$,

$$\therefore 360^\circ - 3t = 1 \times (20 + t),$$

解得: $t = 85$;

当 $120 < t \leq 160$ 时, 如图,



$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle CPN = \angle PNB,$$

$$\because QH \parallel PN,$$

$$\therefore \angle HQB = \angle PNB,$$

$$\therefore \angle CPN = \angle HQP,$$

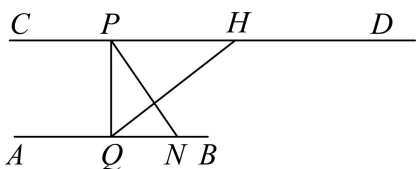
$$\therefore \angle NPH = \angle NQH$$

$$\therefore 3t - 360^\circ = 180^\circ - 1 \times (20 + t),$$

解得: $t = 130$,

综上所述: 当 t 为 10 或 85 或 130 时, 两灯的光束互相平行.

②当 $0 \leq t \leq 60$ 时, 如图,



$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle DPN = \angle ANP = (20 + t)^\circ,$$

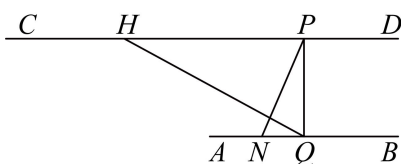
$$\therefore PN \perp QH,$$

$$\therefore \angle ANP + \angle BQH = 90^\circ,$$

$$\therefore 180^\circ - 3t + 20 + t = 90,$$

解得: $t = 55$;

当 $60 < t \leq 120$ 时, 如图,



$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle PNQ = 180^\circ - \angle NPD = 160^\circ - t^\circ,$$

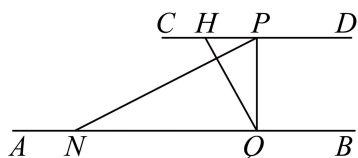
$$\therefore PN \perp QH,$$

$$\therefore \angle PNB + \angle AQH = 90^\circ,$$

$$\therefore 160 - t + 360 - 3t = 90,$$

$$\text{解得: } t = 107.5,$$

当 $120 < t \leq 160$ 时, 如图,



$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle PNQ = 180^\circ - \angle NPD = 160^\circ - t^\circ,$$

$$\therefore PN \perp QH,$$

$$\therefore \angle PNB + \angle AQH = 90^\circ,$$

$$\therefore 160 - t + 3t - 360 = 90,$$

$$\text{解得: } t = 145;$$

综上所述: 当 t 为 55 或 107.5 或 145 时, 两灯的光束互相垂直.

【点睛】 本题考查垂直判定, 平行线判定及性质, 折叠性质等知识点, 解题的关键是掌握相关知识点.