

2024-2025 学年上海市杨浦区存志学校七年级（下）第三次月考数学试卷

一、选择题：本题共 15 小题，共 48 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 下列条件中，能说明 $\triangle ABC$ 为等边三角形的是（ ）

A. $\angle A = 60^\circ$

B. $\angle B = 60^\circ$, $AB = AC$

C. $\angle B + \angle C = 120^\circ$

D. $AB = AC$

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了等边三角形的判定，三角形内角和定理，能熟记等边三角形的判定定理是解此题的关键。

根据等边三角形的判定定理可得出答案。

【详解】解：A、 $\because \angle A = 60^\circ$,

$\therefore \angle B + \angle C = 120^\circ$,

不能说明 $\triangle ABC$ 为等边三角形，

故 A 不符合题意；

B、 $\angle B = 60^\circ$, $AB = AC$,

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形，

故 B 符合题意；

C、 $\angle B + \angle C = 120^\circ$,

$\therefore \angle A = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 不一定是等边三角形，

故 C 不符合题意；

D、 $AB = AC$,

$\triangle ABC$ 不一定是等边三角形，

故 D 不符合题意；

故选：B。

2. 若一个三角形的底角比顶角大 15° ，则顶角为（ ）

A. 45°

B. 40°

C. 50°

D. 55°

【答案】C

【解析】

【分析】此题考查了三角形内角和定理和等腰三角形的性质.

设底角为 x° ，则顶角为 $(x-15)^\circ$ ，根据三角形内角和定理得到 $x-15+2x=180$ ，解方程即可得到答案.

【详解】解：设底角为 x° ，则顶角为 $(x-15)^\circ$ ，

则 $x-15+2x=180$ ，

解得 $x=65$ ，

$x-15=50$ ，

即顶角为 50° ，

故选：C

3. 下列说法错误的是（ ）

- A. 腰和顶角对应相等的两个等腰三角形全等
- B. 底边和顶角对应相等的两个等腰三角形全等
- C. 等边三角形的高、中线、角平分线长度都相同
- D. 有一边上的高也是这边上的中线的三角形是等边三角形

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查全等三角形的判定、等边三角形的性质与判定，等腰三角形的性质，根据等边对等角和三角形内角和定理可得当两个等腰三角形的顶角相等时，那么它们的底角也相等，再结合全等三角形的判定定理可判断 A、B；由三线合一定理可判断 C、D.

【详解】解：A：腰和顶角对应相等的两个等腰三角形全等. 等腰三角形腰相等，顶角对应相等，则底角也相等. 根据 ASA 可证明两三角形全等，原说法正确，不符合题意；

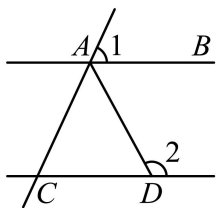
B：底边和顶角对应相等的两个等腰三角形全等. 底边相等，顶角相等，则底角也相等. 由 ASA 或 AAS 可证明两三角形全等，原说法正确，不符合题意；

C：等边三角形的高、中线、角平分线长度相同. 等边三角形的三线合一（高、中线、角平分线重合），长度必然相等，原说法正确，不符合题意；

D：若某边的高和中线重合，仅能判定该三角形为等腰三角形（底边对应的高和中线重合），但无法得出三边均相等的结论. 例如，等腰非等边三角形也满足此条件，原说法错误，符合题意；

故选：D.

4. 如图, $AB \parallel CD$, 若 $\angle 1 = 65^\circ$, $AC = AD$, 则 $\angle 2$ 的大小为 ()



A. 115°

B. 120°

C. 125°

D. 130°

【答案】 A

【解析】

【分析】 本题主要考查了平行线的性质, 等边对等角. 根据平行线的性质得 $\angle ACD = \angle 1 = 65^\circ$, 由等边对等角求得 $\angle ACD = \angle ADC = 65^\circ$, 由邻补角性质得 $\angle 2 + \angle ADC = 180^\circ$, 然后求解即可.

【详解】 解: $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle ACD = \angle 1 = 65^\circ,$$

$$\because AC = AD,$$

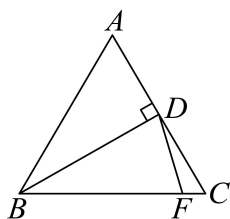
$$\therefore \angle ACD = \angle ADC = 65^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 + \angle ADC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = 115^\circ,$$

故选: A.

5. 如图, 在等边三角形 ABC 中, $BD \perp AC$, $BF = BD$, 则 $\angle CDF$ 的度数是 ()



A. 10°

B. 15°

C. 20°

D. 25°

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题主要考查了等边三角形的性质, 等边对等角, 三角形内角和定理, 先由三线合一定理和垂直的定义得到 $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ$, $\angle BDC = 90^\circ$, 再由等边对等角和三角形内角和定理求出 $\angle BDF = 75^\circ$, 则 $\angle CDF = \angle BDC - \angle BDF = 15^\circ$.

【详解】 解: $\because$ 在等边三角形 ABC 中, $BD \perp AC$,

$$\therefore \angle CBD = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ, \quad \angle BDC = 90^\circ,$$

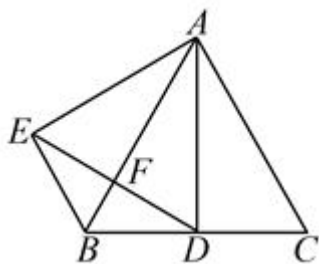
$$\therefore BF = BD,$$

$$\therefore \angle BDF = \angle BFD = \frac{180^\circ - \angle DBF}{2} = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle CDF = \angle BDC - \angle BDF = 15^\circ,$$

故选：B.

6. 如图， $\triangle ABC$ 是等边三角形， AD 是角平分线， $\triangle ADE$ 是等边三角形，下列结论不正确的是（ ）



- A. $AD \perp BC$ B. $EF = FD$ C. $BE = BD$ D. $AE = AC$

【答案】D

【解析】

【分析】根据等腰三角形三线合一的性质，即可一一判断.

【详解】 $\because \triangle ABC$ 是等边三角形， $\triangle AED$ 是等边三角形，

$$\therefore AB = AC = BC, \angle BAC = 60^\circ, AE = AD = ED, \angle EAD = 60^\circ,$$

$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 角平分线，

$$\therefore \angle DAB = \angle DAC = 30^\circ,$$

$\therefore AD \perp BC$ ，故 A 正确，

$$\therefore \angle EAB = \angle BAD = 30^\circ,$$

$\therefore AB \perp ED$ ， $EF = DF$ ，故 B 正确，

$\therefore BE = BD$ ，故 C 正确，

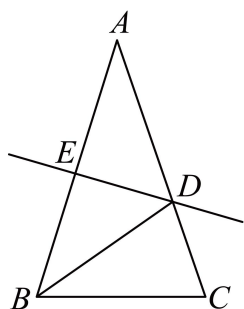
$\because AE = AD$ ，D 在 BC 上，

$\therefore AC > AD = AE$ ，故 D 错误；

故选：D.

【点睛】本题考查了等边三角形的性质，解题的关键是灵活应用等腰三角形的三线合一的性质解决问题，属于中考基础题.

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $BC = a$ ， $\angle A = 36^\circ$ ， AB 的垂直平分线交 AC 边于点 D ，交 AB 边于点 E ， $CD = b$ ，则 $\triangle ABC$ 的周长为（ ）



- A. $3a + 2b$ B. $3a + b$ C. $2a + 2b$ D. $a + b$

【答案】 A

【解析】

【分析】 此题考查了等腰三角形的判定和性质、垂直平分线的性质、三角形内角和定理、三角形外角的性质等知识，熟练掌握等腰三角形的判定和性质是关键. 根据垂直平分线的性质得到 $AD = BD$ ，则 $\angle ABD = \angle A = 36^\circ$ ，进一步证明 $BD = BC = AD = a$ ，得到 $AB = AC = AD + CD = a + b$ ，即可求出答案.

【详解】 解： $\because AB$ 的垂直平分线交 AC 边于点 D ，交 AB 边于点 E

$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle A = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle A + \angle ABD = 72^\circ,$$

$$\because AB = AC, \angle A = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle C = 72^\circ,$$

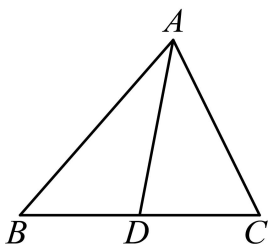
$$\therefore BD = BC = AD = a,$$

$$\therefore AB = AC = AD + CD = a + b,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的周长为 } 3a + 2b.$$

故选： A.

8. 如图，等腰 $\triangle ABC$ 的周长为 30，且 $BA = BC$ ，中线 AD 将这个三角形的周长分为两部分，两部分的差为 6，则 AC 的长 ()



A. 6

B. 14

C. 14 或 6

D. 12 或 8

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了三角形中线的性质及三角形三边关系，设 $BA = BC = x$ ， $AC = y$ ，由 AD 是 BC 边上的中线，得到 $BD = CD = \frac{1}{2}x$ ，分两种情况：当 $\triangle ADB$ 的周长比 $\triangle ACD$ 的周长大 6 时，当 $\triangle ACD$ 的周长比 $\triangle ABD$ 的周长大 6 时，建立二元一次方程组求解，再利用三角形三边关系检验即可求解，掌握三角形三边关系，利用分类讨论的思想解决问题是解题的关键。

【详解】解：设 $BA = BC = x$ ， $AC = y$ ， AD 是 BC 边上的中线，

$$\therefore BD = CD = \frac{1}{2}x,$$

分两种情况：

当 $\triangle ADB$ 的周长比 $\triangle ACD$ 的周长大 6 时，

$$\begin{cases} x - y = 6 \\ 2x + y = 30 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} x = 12 \\ y = 6 \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABC$ 的三边长分别为 12, 12, 6,

$$\because 6 + 12 = 18 > 12,$$

$\therefore$ 能组成三角形；

当 $\triangle ACD$ 的周长比 $\triangle ABD$ 的周长大 6 时，

$$\text{即} \begin{cases} y - x = 6 \\ 2x + y = 30 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} x = 8 \\ y = 14 \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABC$ 的三边长分别为 8, 8, 14;

$$\because 8 + 8 = 16 > 14,$$

$\therefore$ 能组成三角形；

综上所述： AC 的长为 6 或 14.

故选：C.

9. 下列条件中，不能判定直线 MN 是线段 AB (M, N 不在 AB 上) 的垂直平分线的是 ()

A. $MA = MB$, $NA = NB$

B. $MA = MB$, $MN \perp AB$

C. $MA = NA$, $MB = NB$

D. $MA = MB$, MN 平分 AB

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了线段垂直平分线的判定与性质，根据线段垂直平分线的意义及性质进行分析、判断即可，掌握线段垂直平分线的判定与性质是解题的关键.

【详解】解：A、 $\because MA = MB, NA = NB$,

$\therefore$ 点 M 和点 N 都在线段 AB 的垂直平分线上,

$\therefore$ 直线 MN 是线段 AB 的垂直平分线，故选项不符合题意；

B、 $\because MA = MB, MN \perp AB$,

$\therefore$ 直线 MN 是线段 AB 的垂直平分线，故选项不符合题意；

C、当 $MA = NA, MB = NB$ 时， AB 是线段 MN 的垂直平分线，但直线 MN 不一定是线段 AB 的垂直平分线，故选项符合题意；

D、 $\because MA = MB, MN$ 平分 AB ,

$\therefore$ 直线 MN 是线段 AB 的垂直平分线，故选项不符合题意；

故选：C.

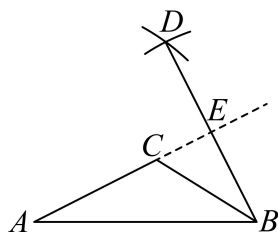
10. 如图，已知钝角三角形 ABC ，按以下步骤尺规作图，并保留作图痕迹.

步骤1：以 C 为圆心， CB 为半径画弧①；

步骤2：以 A 为圆心， AB 为半径画弧②，交弧①于点 D ；

步骤3：连结 BD ，交 AC 的延长线于点 E .

下列叙述正确的是（ ）



A. BC 平分 $\angle ABD$

B. $AB = BD$

C. $AE = BD$

D. $BE = DE$

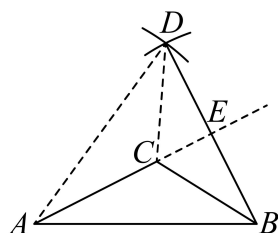
【答案】D

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的性质与判定，掌握全等三角形的性质以及判定定理；连接 AD, CD ，先

证明 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ ，再根据等腰三角形三线合一的性质即可得出 $BE = DE$

【详解】解：连接 AD, CD ，



由题意得， $CB = CD, AB = AD$

$\therefore \triangle ABD$ 是等腰三角形

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 中

$$\begin{cases} AB = AD \\ CB = CD \\ AC = AC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADC$ ，

$\therefore \angle DAC = \angle BAC$

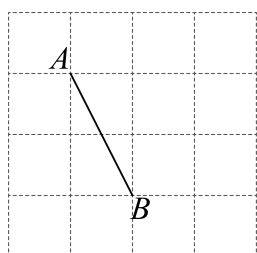
$\therefore AE$ 是 $\angle DAB$ 的角平分线，

又 $\because AB = AD$

$\therefore BE = DE$

故选：D.

11. 如图，点 A, B 为 4×4 方格纸中的两个格点，若以 AB 为边在方格中画点 C （点 C 为格点），使得 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，则点 C 的个数是（ ）



A. 6

B. 7

C. 8

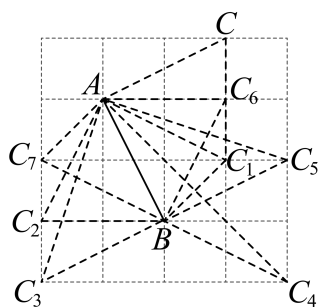
D. 9

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查格点作等腰三角形，根据等腰三角形的判断即可得到结论，掌握等腰三角形的判定是解题的关键.

【详解】解：①当 AB 为腰时，如图，

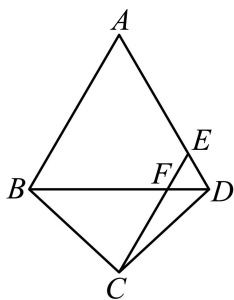


② 当 AB 为底边时，点 C 无格点，

综上所述： ABC 为等腰三角形，则点 C 的个数有 8 个，

故选： C.

12. 如图，在四边形 $ABCD$ 中 $AB=AD=12$ ， $BC=DC$ ， $\angle A=60^\circ$ ， 点 E 在 AD 上， 连接 BD ， CE 相交于点 F ， $CE \parallel AB$ ． 若 $CE=9$ ， 则 CF 的长为 ()



A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了等边三角形的性质和判定， 中垂线的判定和性质， 熟练运用等边三角形的判定是本题的关键． 连接 AC 交 BD 于点 O ， 由题意可证 AC 垂直平分 BD ， $\triangle ABD$ ， $\triangle DEF$ 是等边三角形， $\triangle AEC$ 是等腰三角形， 作差计算即可．

【详解】 解： 连接 AC 交 BD 于点 O ，

$\because AB=AD=12$ ， $BC=DC$ ， $\angle A=60^\circ$

$\therefore AC$ 垂直平分 BD ， $\triangle ABD$ 是等边三角形， $\angle CAB = \angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAD = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle ADB = 60^\circ$ ，

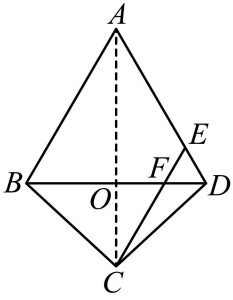
$\because CE \parallel AB$ ，

$\therefore \angle BAD = \angle DEF = 60^\circ$ ， $\angle CAB = \angle ACE = \angle CAD = 30^\circ$

$\therefore \triangle DEF$ 是等边三角形， $\triangle AEC$ 是等腰三角形，

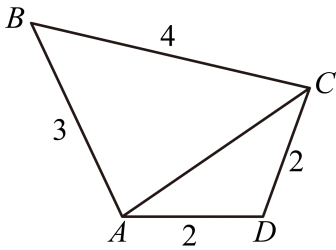
$\therefore DE = EF = AD - AE = 3$ ， $AE = CE = 9$ ，

$$\therefore CF = CE - EF = 6.$$



故选 C.

13. 四边形 $ABCD$ 的边长如图所示, 对角线 AC 的长度随四边形形状的改变而变化, 当 ABC 为等腰三角形时, AC 的长为 ()



A. 4

B. 3

C. 3 或 4

D. 无法确定

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查等腰三角形性质, 构成三角形三边关系. 根据题意分情况讨论即可.

【详解】解: $\because$ 当 ABC 为等腰三角形时,

①当 $AB = AC = 3$, 在 $\triangle ACD$ 中, $2 - 2 < 3 < 2 + 2$,

在 ABC 中, $3 - 3 < 4 < 3 + 3$,

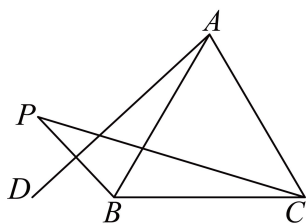
$\therefore$ 此时 $AC = 3$;

②当 $AB = BC = 4$, 在 $\triangle ACD$ 中, $2 - 2 < 4 = 2 + 2$, 不符合三边关系,

$\therefore$ 此种情况舍去;

故选: B.

14. 如图, 在等边 ABC 外作射线 AD , 使得 AD 和 AC 在直线 AB 的两侧, $\angle BAD = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$). 点 B 关于直线 AD 的对称点为 P , 连接 PB , PC . 则 $\angle BPC$ 的度数是 ()



- A. $60^\circ - \alpha$ B. $45^\circ - \frac{\alpha}{2}$ C. 30° D. $30^\circ + \alpha$

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查了轴对称的性质，等边三角形的性质，等腰三角形的性质，三角形内角和定理，先由点 B 与点 P 关于直线 AD 对称，得到 $AP = AB$ ， $\angle PAD = \angle BAD = \alpha$ ，再由等边三角形的性质和三角形内角和定理求得 $\angle APC = \angle ACP = 60^\circ - \alpha$ ，然后由 $\angle APB + \angle PAD = 90^\circ$ ，即 $60^\circ - \alpha + \angle BPC + \alpha = 90^\circ$ ，即可求解，熟练掌握轴对称的性质和等边三角形的性质是解题的关键.

【详解】解： $\because$ 点 B 关于直线 AD 的对称点 P ，

$\therefore AD$ 为 PB 的中垂线，

$\therefore AD \perp BP$ ， $AP = AB$ ，

$\therefore \angle PAD = \angle BAD = \alpha$ ，

$\because$ 等边 ABC ，

$\therefore \angle BAC = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle APC = \angle ACP = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\alpha - 60^\circ) = 60^\circ - \alpha$ ，

$\because \angle APB + \angle PAD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle APC + \angle BPC + \angle PAD = 90^\circ$ ，

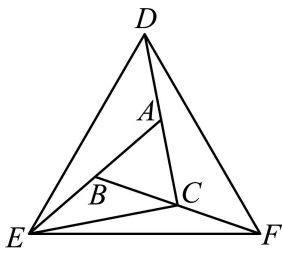
$\therefore 60^\circ - \alpha + \angle BPC + \alpha = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BPC = 30^\circ$ ，

故选：C.

15. 如图，等边三角形 ABC 边长为 1，点 D, E, F 分别在边 CA, AB, BC 的延长线上， $AD = BE = CF = 1$ ，连接 DE, EF, FD, EC . 给出下面四个结论中正确的是 ()

① $\triangle DEF$ 是等边三角形；② $DC \perp EC$ ；③ ABC 的面积为与 $\triangle DEF$ 面积之比为 1:6；④ $\triangle DEF$ 的外心与 ABC 的外心重合.



A. ①②

B. ③④

C. ①②④

D. ①②③④

【答案】C

【解析】

【分析】 本题考查了等边三角形的判定与性质，三角形中线的性质，三角形重心的概念，全等三角形的判定和性质. 利用SAS证明 $\triangle DAE \cong \triangle EBF \cong \triangle FCD$ ，推出 $DE = EF = FD$ ，证明 $\triangle DEF$ 是等边三角形；利用三角形中线的性质可判断 $\triangle ABC$ 的面积为与 $\triangle DEF$ 面积之比；利用等边三角形的外心和内心的性质据此即可得解.

【详解】 解： $\because \triangle ABC$ 是等边三角形且边长为 1，

$$\therefore AB = BC = CA = 1, \quad \angle ABC = \angle BCA = \angle CAB = 60^\circ,$$

$$\because AD = BE = CF = 1,$$

$$\therefore AE = BF = CD = 2, \quad \angle DAE = \angle EBF = \angle FCD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

$$\therefore \triangle DAE \cong \triangle EBF \cong \triangle FCD (\text{SAS}),$$

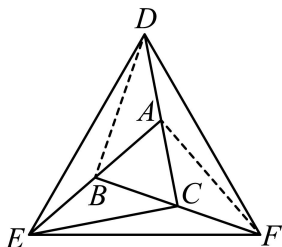
$$\therefore DE = EF = FD,$$

$\therefore \triangle DEF$ 是等边三角形，故①正确；

$$\because BE = BC = 1, \quad \angle ABC = 60^\circ, \quad \angle BEC = \angle BCE = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ, \quad \text{即 } DC \perp EC, \quad \text{故②正确；}$$

连接 BD, AF ，



$$\because AB = BC = AC = 1, \quad AE = BF = CD = 2,$$

$\therefore$ 点 A, B, C 分别是 CD, AE, BF 的中点，

$$\text{设 } S_{\triangle ABC} = x,$$

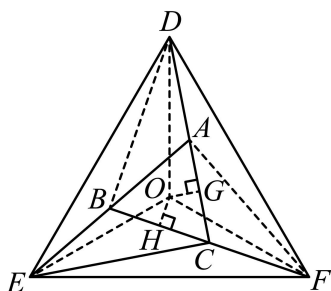
$$\therefore S_{\triangle ABD} = x, S_{\triangle ACF} = x, S_{\triangle BCE} = x,$$

$$\therefore S_{\triangle BDE} = x, S_{\triangle EFC} = x, S_{\triangle ADF} = x,$$

$$\therefore S_{\triangle DEF} = 7x,$$

$\therefore \triangle ABC$ 的面积为与 $\triangle DEF$ 面积之比为 1:7, 故③错误;

设 $\triangle ABC$ 的外心为 O ,



$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore$ 点 O 也是 $\triangle ABC$ 的内心, 作 $OG \perp AC$ 于点 G , $OH \perp BC$ 于点 H ,

$$\therefore OG = OH, AG = CH = \frac{1}{2},$$

$$\therefore DG = FH = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \triangle DGO \cong \triangle FHO (\text{SAS}),$$

$$\therefore OD = OF,$$

同理 $OD = OE$, 则 $OD = OE = OF$,

$\therefore \triangle DEF$ 的外心与 $\triangle ABC$ 的外心重合, 故④正确.

综上, 正确的有①②④,

故选: C.

二、填空题: 本题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分.

16. 一个等腰三角形的两边长分别为 5cm 和 12cm, 则它的周长为 _____ cm.

【答案】 29

【解析】

【分析】 本题考查了等腰三角形的性质和三角形的三边关系; 已知没有明确腰和底边的题目一定要想到两种情况, 分类进行讨论, 还应验证各种情况是否能构成三角形进行解答.

【详解】 解: ①当腰是 5cm, 底边是 12cm 时: 不满足三角形的三边关系, 因此舍去.

②当底边是 5cm, 腰长是 12cm 时, 能构成三角形, 则其周长 = 5 + 12 + 12 = 29cm.

故答案为 29.

17. 等腰三角形一腰上的高与另一腰的夹角为 60° ，那么这个等腰三角形的顶角的度数为_____.

【答案】 30° 或 150°

【解析】

【分析】 根据题意画出图形，分别从锐角三角形与钝角三角形分析求解即可求出答案.

【详解】 根据题意得： $AB = AC, BD \perp AC$ ，

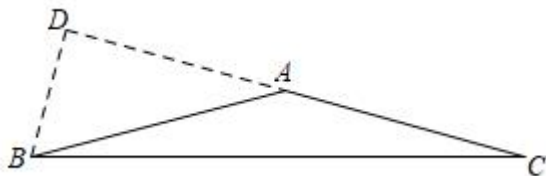
如图（1）所示， $\angle ABD = 60^\circ$ ，则 $\angle A = 30^\circ$ ，即顶角为 30° ；



如图（2）所示， $\angle ABD = 60^\circ$ ，则 $\angle DAB = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle BAC = 150^\circ$ ，

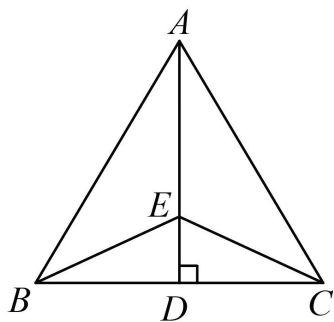
即顶角为 150° ；



故答案为： 30° 或 150° .

【点睛】 本题考查等腰三角形的性质，注意掌握分类讨论思想和数形结合思想的应用是解题的关键.

18. 如图，在等边三角形 ABC 中， $AD \perp BC$ ，垂足为点 D ，点 E 在线段 AD 上， $\angle ECD = 20^\circ$ ，则 $\angle ABE =$ _____ $^\circ$.



【答案】 40

【解析】

【分析】 本题考查等边三角形的性质，线段垂直平分线的性质，等腰三角形的性质，关键是由等边三角形的性质推出 AD 垂直平分 BC .

由等边三角形的性质推出 $\angle ABC = 60^\circ$, AD 垂直平分 BC , 得到 $BE = CE$, 推出 $\angle EBD = \angle ECD = 20^\circ$, 即可求出 $\angle ABE$ 的度数.

【详解】 解: $\because \triangle ABC$ 是等边三角形, $AD \perp BC$,

$$\therefore BD = CD, \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore AD \text{ 垂直平分 } BC,$$

$$\therefore EB = EC,$$

$$\therefore \angle EBD = \angle ECD = 20^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle ABC - \angle EBD = 40^\circ,$$

故答案为: 40 .

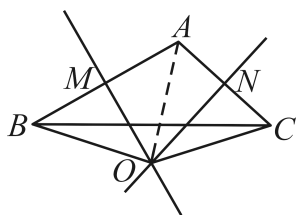
19. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 110^\circ$, 边 AB 与 AC 的中垂线交于点 O , 则 $\angle BOC =$ _____ $^\circ$.

【答案】 140

【解析】

【分析】 本题考查线段垂直平分线的性质，等腰三角形的性质，关键是由线段垂直平分线的性质推出 $OA = OB = OC$, 由线段垂直平分线的性质推出 $OA = OB = OC$, 得到 $\angle OBA = \angle OAB$, $\angle OCA = \angle OAC$, 因此 $\angle OBA + \angle OCA = \angle BAC = 110^\circ$, 即可求出 $\angle BOC = 360^\circ - 110^\circ - 110^\circ = 140^\circ$.

【详解】 解: 如图,



$\because OM$ 垂直平分 AB ,

$$\therefore OA = OB,$$

$$\therefore \angle OBA = \angle OAB,$$

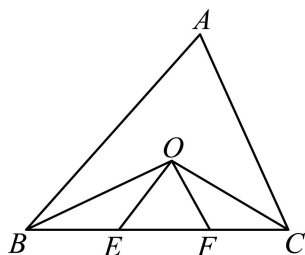
同理: $\angle OCA = \angle OAC$,

$$\therefore \angle OBA + \angle OCA = \angle OAB + \angle OAC = \angle BAC = 110^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = 360^\circ - \angle BAC - (\angle OBA + \angle OCA) = 360^\circ - 110^\circ - 110^\circ = 140^\circ.$$

故答案为：140.

20. 如图， $\triangle ABC$ 中， $BC=10$ ， $\angle B$ 与 $\angle C$ 的平分线交于点 O ，过 O 作 $OE \parallel AB$ ， $OF \parallel AC$ ，分别交 BC 于点 E 、 F ，则 $\triangle OEF$ 的周长为_____.



【答案】10

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的判定和性质，角平分线的定义，得到 $EB=EO$ ， $FO=FC$ 是解题的关键. 由 OB ， OC 分别是 $\triangle ABC$ 的 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线和 $OE \parallel AB$ ， $OF \parallel AC$ 可推出 $BE=OE$ ， $OF=FC$ ，根据 $\triangle OEF$ 的周长即为 BC 的长度，即可求解.

【详解】解： $\because OB$ ， OC 分别是 $\angle ABC$ ， $\angle ACB$ 的平分线，

$$\therefore \angle ABO = \angle EBO, \angle ACO = \angle FCO,$$

$$\because OE \parallel AB, OF \parallel AC,$$

$$\therefore \angle ABO = \angle BOE, \angle ACO = \angle COF,$$

$$\therefore \angle EBO = \angle BOE, \angle FCO = \angle COF,$$

$$\therefore BE = OE, OF = FC,$$

$$\therefore BC = BE + EF + FC = OF + OE + EF,$$

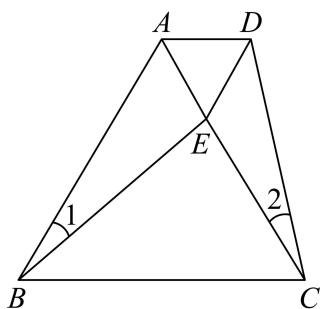
$$\because BC = 10,$$

$$\therefore OF + OE + EF = 10,$$

$$\therefore \triangle OEF \text{ 的周长} = OF + OE + EF = 10,$$

故答案为：10.

21. 如图， E 是等边 $\triangle ABC$ 中 AC 边上的点， $\angle 1 = \angle 2$ ， $BE = CD$ ，则 $\angle CED$ 的度数为_____.



【答案】 120° ## 120度

【解析】

【分析】 本题考查了等边三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质等知识，证明 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ 是解题的关键. 由等边三角形的性质得 $AB = AC$ ， $\angle BAE = 60^\circ$ ，而 $\angle 1 = \angle 2$ ， $BE = CD$ ，即可根据 SAS 证明 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ ，得 $AE = AD$ ， $\angle BAE = \angle CAD = 60^\circ$ ，所以 $\triangle AED$ 是等边三角形，则 $\angle AED = 60^\circ$ ，求得 $\angle CED = 120^\circ$ ，于是得到问题的答案.

【详解】 解： $\because \triangle ABC$ 是等边三角形，点 E 在 AC 上，

$\therefore AB = AC$ ， $\angle BAE = 60^\circ$ ，

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 中，

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle 1 = \angle 2, \\ BE = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD$ (SAS)，

$\therefore AE = AD$ ， $\angle BAE = \angle CAD = 60^\circ$ ，

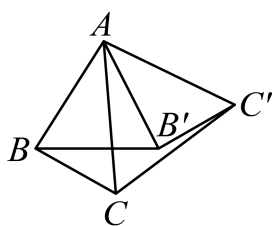
$\therefore \triangle AED$ 是等边三角形，

$\therefore \angle AED = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle CED = 180^\circ - \angle AED = 120^\circ$ ，

故答案为： 120° .

22. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 40^\circ$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle AB'C'$ ，则 $\angle B'C'C = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$.



【答案】 10

【解析】

【分析】 本题考查旋转的性质，等边三角形的性质与判定；根据题意，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 后得到的 $\triangle AB'C'$ ，又根据旋转的性质，得出 $\triangle ACC'$ 是等边三角形，可得 $\angle AC'C = 60^\circ$ ，进而根据 $\angle B'C'C = \angle AC'C - \angle AC'B'$ ，即可求解.

【详解】解： $\because$ 三角形 ABC 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $\angle BAC = 40^\circ$ ，
 $\therefore \angle ACB = 50^\circ$ ，

将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 后得到的 $\triangle AB'C'$ ，

$AC = AC'$ ， $\angle CAC' = 60^\circ$ ， $\angle AC'B' = 50^\circ$ ，

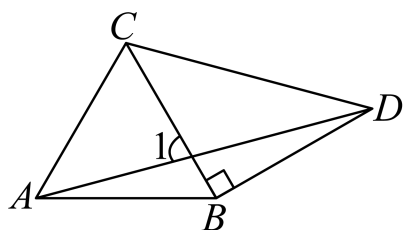
$\therefore \triangle ACC'$ 是等边三角形，

$\therefore \angle AC'C = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle B'C'C = \angle AC'C - \angle AC'B' = 60^\circ - 50^\circ = 10^\circ$ ，

故答案为：10.

23. 如图,已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形, $BC=BD$, $\angle CBD=90^\circ$,则 $\angle 1$ 的度数是_____.



【答案】 75°

【解析】

【分析】 利用等边三角形性质先得到 $\angle ABC = 60^\circ$ ， $BD = BC$ 可得到 $\triangle ABD$ 是等腰三角形，然后根据等腰三角形性质得到 $\angle ADB$ ，再通过三角形内角和计算出 $\angle 1$ 的对顶角度数即可

【详解】 因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形，

所以 $AB = BC$ ， $\angle ABC = 60^\circ$

因为 $BD = BC$ ，所以 $AB = BD$

所以 $\angle BAD = \angle BDA$

在 $\triangle ABD$ 中，因为 $\angle CBD = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 60^\circ$

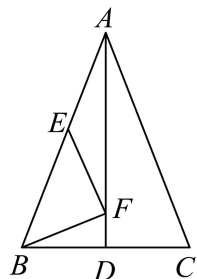
所以 $\angle ADB = (180^\circ - 90^\circ - 60^\circ) \div 2 = 15^\circ$

所以 $\angle 1 = 180^\circ - \angle CBD - \angle ADB = 180^\circ - 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$

故填 75°

【点睛】 本题结合了等边三角形性质、等腰三角形性质和三角形内角和定理，熟练运用内角和定理是解题关键

24. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 18$, AD 垂直平分 BC 交 BC 于点 D , 点 E 在线段 AB 上, 点 F 在线段 AD 上, 连接 BF 、 EF , 若 $\angle BAC = \angle BEF$, $BF = 6$, 则 $\triangle BEF$ 的周长为_____.



【答案】 24

【解析】

【分析】 本题考查等腰三角形的判定和性质，线段垂直平分线的性质，三角形的外角性质，关键是由线段垂直平分线的性质推出 $AB = AC$ ，由等腰三角形的性质和三角形的外角性质推出 $\angle EAF = \angle EFA$ ．由线段垂直平分线的性质推出 $AB = AC = 18$ ，由等腰三角形的性质推出 $\angle BAC = 2\angle EAF$ ，由三角形的外角性质推出 $\angle EAF = \angle EFA$ ，得到 $EA = EF$ ，因此 $\triangle BEF$ 的周长 $= BF + AB = 24$ ．

【详解】 解： $\because AD$ 垂直平分 BC ，

$$\therefore AB = AC = 18,$$

$$\because AD \perp BC,$$

$$\therefore \angle BAC = 2\angle EAF,$$

$$\therefore \angle BEF = \angle BAC = 2\angle EAF,$$

$$\because \angle BEF = \angle EAF + \angle EFA,$$

$$\therefore \angle EAF = \angle EFA,$$

$$\therefore EA = EF,$$

$$\therefore \triangle BEF \text{ 的周长} = BF + BE + EF = BF + BE + AE = BF + AB = 6 + 18 = 24.$$

故答案为： 24.

25. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, AB 边的垂直平分线与边 AB 交于点 D , 与 AC 、 BC 边所在直线分别交于 E 、 F , 若 $\angle AED = 10^\circ$, 则 $\angle BFE =$ _____°.

【答案】 50 或 140

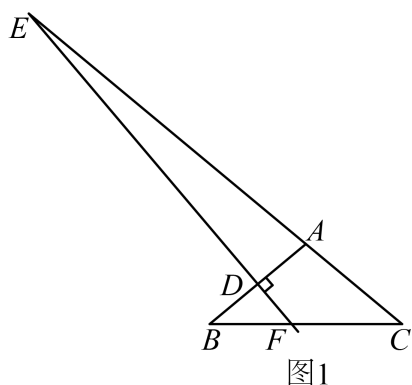
【解析】

【分析】 本题考查等腰三角形的性质和线段垂直平分线的性质，三角形内角和定理和外角的性质，分类思

想的运用是解题的关键.

分两种情况, 根据等腰三角形的性质和线段垂直平分线的性质即可求解.

【详解】解: 如图 1,



$\because \angle AED = 10^\circ$, EF 垂直平分 AB ,

$\therefore \angle ADE = 90^\circ$,

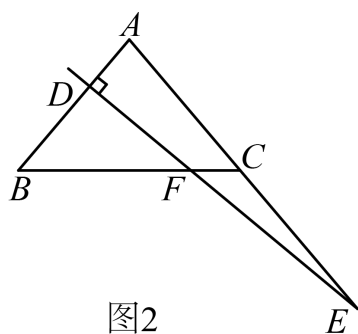
$\therefore \angle BAC = 90^\circ + 10^\circ = 100^\circ$,

$\because AB = AC$,

$\therefore \angle B = \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - 100^\circ) = 40^\circ$,

$\therefore \angle BFE = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$;

如图 2,



$\because \angle AED = 10^\circ$, EF 垂直平分 AB ,

$\therefore \angle ADE = \angle BDF = 90^\circ$,

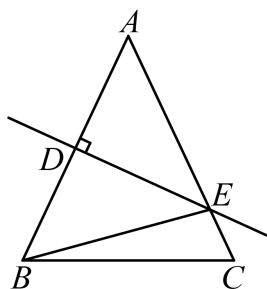
$\therefore \angle A = 90^\circ - 10^\circ = 80^\circ$,

$\because AB = AC$,

$\therefore \angle B = \angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - 80^\circ) = 50^\circ$,

$\therefore \angle BFE = \angle BDF + \angle B = 90^\circ + 50^\circ = 140^\circ$,

当垂直平分线与线段 AC 交于点 E ,



$\because \angle AED = 10^\circ$, EF 垂直平分 AB ,

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ - 10^\circ = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle BEA = 20^\circ$$

$$\therefore \angle BEC = 160^\circ$$

$\because AB = AC$,

$$\therefore \angle B = \angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - 80^\circ) = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle BEC + \angle BCA = 210^\circ$$

$\triangle BCE$ 中不符合三角形的内角和定理, 不符合题意,

$\therefore$ 当垂直平分线与线段 AC 交于点 E , 此种情况不存在,

综上, $\angle BFE = 50^\circ$ 或 140° .

故答案为: 50 或 140.

三、解答题: 本题共 7 小题, 共 72 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

26. 把以下过程补充完整.

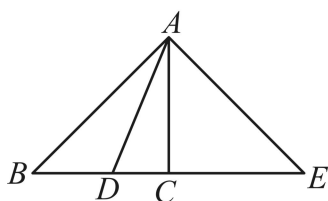


图1

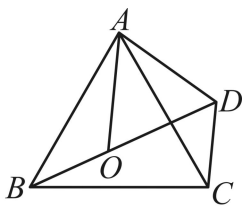


图2

(1) 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 $\angle BAC$ 的平分线, 以点 A 为顶点, AC 为一边在 $\triangle ABC$ 外部作 $\angle CAE = \angle B$, 边 AE 交边 BC 延长线于点 E , 求证: 点 E 在线段 AD 的垂直平分线上.

证明: $\because AD$ 为 $\angle BAC$ 的平分线,

$$\therefore \angle BAD = \angle DAC,$$

$$\because \angle DAE = \angle DAC + \angle CAE,$$

$$\angle ADE = \angle \text{———} + \angle \text{———},$$

$$\angle B = \angle CAE,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle DAE,$$

$$\therefore \text{————} (\text{————}),$$

$\therefore$ 点 E 在线段 AD 的垂直平分线上 (————).

(2) 如图 2, 已知 O 是等边三角形 ABC 内一点, D 是线段 BO 延长线上一点, 且 $OD = OA$, $\angle AOB = 120^\circ$, 求 $\angle BDC$ 的度数.

解: $\because \triangle ABC$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle BAC = 60^\circ (\text{————}),$$

$$AB = AC,$$

$$\because \angle AOB = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD = 60^\circ,$$

$$\because OD = OA,$$

$$\therefore \angle \text{————} = \angle \text{————} (\text{————}),$$

$$\because \angle AOD + \angle ADO + \angle OAD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD = \angle ADO = \angle OAD = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle AOD$ 为等边三角形 (————),

$$\therefore AO = AD, \angle OAD - \angle OAC = \angle BAC = \angle OAC,$$

$$\text{即 } \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore \triangle ABO \cong \triangle ACD,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle AOB = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = 60^\circ.$$

【答案】 (1) B , BAD ; $AE = DE$, 等角对等边; 线段垂直平分线的性质

(2) 等边三角形的性质, OAD , ODA , 等腰三角形的性质, 等边三角形的判定定理

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的判定和性质, 线段垂直平分线的性质, 等边三角形的判定和性质, 等腰三角形的性质, 熟练掌握全等三角形的判定和性质定理是解题的关键.

(1) 先由 AD 为 $\angle BAC$ 的平分线, 可得 $\angle BAD = \angle DAC$, 再根据三角形外角的性质得到 $\angle ADE = \angle BAD + \angle B$, 而 $\angle DAE = \angle DAC + \angle CAE$, $\angle B = \angle CAE$, 由等式的性质可知 $\angle ADE = \angle DAE$, 根据等角对等边得到 $AE = DE$, 由线段垂直平分线的判定可得点 E 在线段 AD 的垂直平分线上;

(2) 由 $\triangle ABC$ 为等边三角形可得出 $AB = AC$, $\angle BAC = 60^\circ$, 由 $\angle AOB$ 的度数利用邻补角互补可得出

$\angle AOD = 60^\circ$ ，结合 $OD = OA$ 可得出 $\triangle AOD$ 为等边三角形，根据等边三角形的性质可得出 $AO = AD$ 、 $\angle OAD = 60^\circ$ ，根据 $\angle BAO + \angle OAC = \angle OAC + \angle CAD = 60^\circ$ 可得出 $\angle BAO = \angle CAD$ ，利用全等三角形的判定定理 SAS 可证出 $\triangle BAO \cong \triangle CAD$ ，根据全等三角形的性质可得出 $\angle ADC$ 的度数，再根据 $\angle BDC = \angle ADC - \angle ADO$ 即可求出 $\angle BDC$ 的度数.

【小问 1 详解】

证明： $\because AD$ 为 $\angle BAC$ 的平分线，

$$\therefore \angle BAD = \angle DAC,$$

$$\because \angle DAE = \angle DAC + \angle CAE,$$

$$\angle ADE = \angle B + \angle BAD,$$

$$\angle B = \angle CAE,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle DAE,$$

$$\therefore AE = DE \text{ (等角对等边)},$$

$$\therefore \text{点 } E \text{ 在线段 } AD \text{ 的垂直平分线上 (线段垂直平分线的性质)},$$

故答案为：B，BAD； $AE = DE$ ，等角对等边；线段垂直平分线的性质；

【小问 2 详解】

解： $\because \triangle ABC$ 为等边三角形，

$$\therefore \angle BAC = 60^\circ \text{ (等边三角形的性质)}, \quad AB = AC,$$

$$\because \angle AOB = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD = 60^\circ,$$

$$\because OD = OA,$$

$$\therefore \angle OAD = \angle ODA \text{ (等腰三角形的性质)},$$

$$\because \angle AOD + \angle ADO + \angle OAD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD = \angle ADO = \angle OAD = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle AOD \text{ 为等边三角形 (等边三角形的判定定理)},$$

$$\therefore AO = AD, \quad \angle OAD - \angle OAC = \angle BAC - \angle OAC,$$

$$\text{即 } \angle 1 = \angle 2,$$

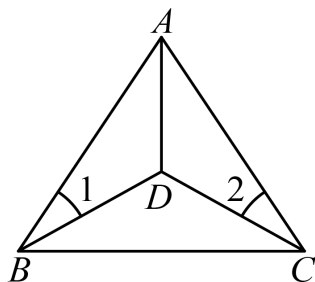
$$\therefore \triangle ABO \cong \triangle ACD,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle AOB = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = 60^\circ,$$

故答案为：等边三角形的性质，OAD，ODA，等腰三角形的性质，等边三角形的判定定理.

27. 已知：如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $BD = CD$ ， $\angle 1 = \angle 2$ ．求证： $AD \perp BC$ ．



【答案】见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了等腰三角形的判定和性质，线段垂直平分线的判定，解题的关键是熟练掌握线段垂直平分线的判定定理．先根据等腰三角形的性质得出 $\angle DBC = \angle DCB$ ，根据 $\angle 1 = \angle 2$ ，证明 $\angle ABC = \angle ACB$ ，根据等腰三角形的判定得出 $AB = AC$ ，根据线段垂直平分线的判定得出 AD 垂直平分 BC ，即可得出答案．

【详解】证明： $\because BD = CD$ ，

$$\therefore \angle DBC = \angle DCB,$$

$$\because \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore \angle DBC + \angle 1 = \angle DCB + \angle 2,$$

$$\text{即 } \angle ABC = \angle ACB,$$

$$\therefore AB = AC,$$

$\therefore$ 点 A 在线段 BC 的垂直平分线上，

$$\because BD = CD,$$

$\therefore$ 点 D 在线段 BC 的垂直平分线上，

$\therefore AD$ 垂直平分 BC ，

$$\therefore AD \perp BC.$$

28. 如图，已知 OE 平分 $\angle POQ$ ，点 A 、 B 分别是射线 OP 、 OE 上的点，且 $BA \perp OP$ 于点 A ，点 C 是射线 OQ 上的任意一点（点 A 、 B 、 C 都不与点 O 重合），连接 AC 交射线 OE 于点 D ．

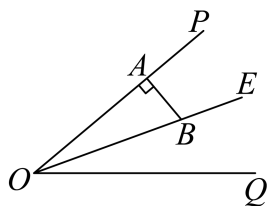
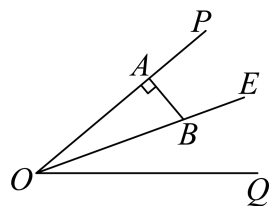
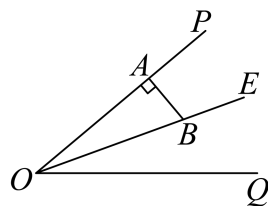


图1



备用图1



备用图2

(1) 当 $AC \perp OQ$ 时，在图 1 中，求作点 C （不写作法，保留作图痕迹）；

(2) 在 (1) 的条件下, 求证: $AD = AB$;

(3) 当 $\angle POQ = 40^\circ$, 且 $\triangle ABD$ 是等腰三角形时, 请直接写出 $\angle OAC$ 的度数.

【答案】(1) 作图见解析

(2) 证明见解析 (3) $\angle OAC = 50^\circ$ 或 35° 或 20°

【解析】

【分析】本题主要考查了垂线的作法、等腰三角形的性质与判定、等腰三角形的存在性问题、掌握等腰三角形的性质与判定是解题的关键.

(1) 如图, 过点 A 作 OQ 的垂线, 交点即 C 点;

(2) 根据等角的余角相等证明出 $\angle ABD = \angle ADB$, 再根据等角对等边即可得到 $AD = AB$;

(3) 根据 $\triangle ABD$ 是等腰三角形, 分类讨论, 分别计算出 $\angle OAC$ 的度数即可.

【小问 1 详解】

解: 图形如图所示;

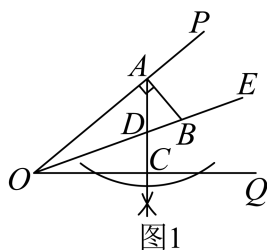


图1

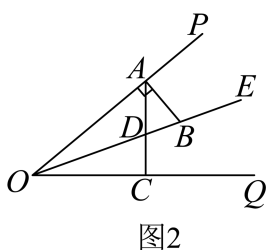


图2

【小问 2 详解】

证明: $\because AB \perp AC$,

$$\therefore \angle AOB + \angle ABO = 90^\circ,$$

$\because AC \perp OQ$,

$$\therefore \angle DOC + \angle CDO = 90^\circ,$$

$\because OE$ 平分 $\angle POQ$,

$$\therefore \angle AOB = \angle DOC,$$

$\therefore \angle ADB = \angle CDO$,

$$\therefore \angle ABD = \angle ADB,$$

$$\therefore AD = AB;$$

【小问 3 详解】

解: 当 $AC \perp OQ$ 时, $AD = AB$, 此时 $\angle OAC = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$;

如图 2 中当 $AB = BD$ 时, $\angle ADB = \angle BAD = \frac{1}{2}(180^\circ - 70^\circ) = 55^\circ$,

$$\therefore \angle OAC = 90^\circ - \angle BAD = 35^\circ;$$

当 $AD = DB$ 时, $\angle DAB = \angle ABD = 70^\circ$,

$$\therefore \angle OAC = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ;$$

综上所述, $\angle OAC = 50^\circ$ 或 35° 或 20° .

29. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, 点 F 是边 AB 上一点, 且 $AF = AC$. 点 D 是边 AB 上一点, 连接 CD , 以 CD 为边作等边三角形 CDE , 使点 E 在 CD 上侧, 连接 EF , EB .

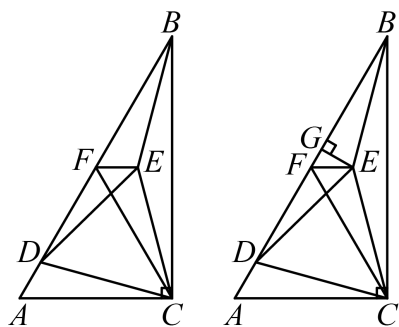


图1

图2

- (1) 直接写出 CF 与 BF 的数量关系_____.
- (2) 求 $\angle DFE$ 的度数.
- (3) 过点 E 作 $EG \perp AB$, 交 AB 于点 G . 求证: $2DG + EF = AB$.

【答案】(1) $CF = BF$

(2) 120°

(3) 证明见解析

【解析】

【分析】此题考查了全等三角形的性质和判定, 等边三角形的性质和判定, 解题的关键是掌握以上知识点.

(1) 首先求出 $\angle B = 30^\circ$, 证明出 $\triangle ACF$ 是等边三角形, 得到 $\angle AFC = 60^\circ$, 然后得到 $\angle B = \angle BCF$, 即可得到 $CF = BF$;

(2) 首先得到 $\triangle ACF$ 是等边三角形, 得到 $CD = CE$, $\angle DCE = 60^\circ$, 证明出 $\triangle ACD \cong \triangle FCE$ (SAS), 得到 $\angle CFE = \angle A = 60^\circ$, 进而求解即可;

(3) 由全等得到 $AD = EF$, 然后证明出 $\triangle BFE \cong \triangle CFE$ (SAS), 得到 $CE = BE$, 进而求解即可.

【小问 1 详解】

解: $CF = BF$,

理由: $\because \angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$,

$$\therefore \angle B = 30^\circ,$$

$$\because AF = AC,$$

$\therefore \triangle ACF$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle AFC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle FCB = \angle AFC - \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle BCF,$$

$$\therefore CF = BF,$$

故答案为: $CF = BF$;

【小问 2 详解】

解: $\because AF = AC$, $\angle A = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ACF$ 是等边三角形,

$$\therefore AC = CF, \angle AFC = \angle ACF = 60^\circ,$$

$\because \triangle CDE$ 是等边三角形,

$$\therefore CD = CE, \angle DCE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle FCE,$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle FCE (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle CFE = \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DFE = \angle AFC + \angle CFE = 120^\circ;$$

【小问 3 详解】

证明: $\because \triangle ACD \cong \triangle FCE$,

$$\therefore AD = EF,$$

$$\because \angle BFE = 180^\circ - \angle DFE = 60^\circ = \angle CFE,$$

$$\because CF = BF = AF = \frac{1}{2}AB, EF = EF,$$

$$\therefore \triangle BFE \cong \triangle CFE (\text{SAS}),$$

$$\therefore CE = BE,$$

$$\therefore BE = ED,$$

$$\because GE \perp DB,$$

$$\therefore BD = 2DG,$$

$$\therefore 2DG + EF = 2DG + AD = AB,$$

$$\text{即 } 2DG + EF = AB.$$

30. 如图，直线 a 、 b 交于点 O ， A 为直线 a 上一定点， B 为直线 b 上一动点， $\angle 1 = \alpha$ 。若以点 O 、 A 、 B 为顶点的三角形为等腰三角形，回答下列问题：

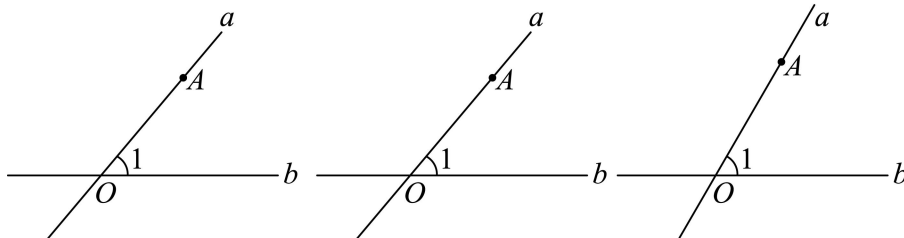


图1

图2

(1) 如图 1，当 $\alpha = 50^\circ$ 时，满足条件的等腰三角形有_____个；

(2) 如图 2，当 $\alpha = 60^\circ$ 时，满足条件的等腰三角形有_____个。

【答案】(1) 4

(2) 2

【解析】

【分析】 本题考查等腰三角形的判定与性质，解决本题的关键是掌握等腰三角形的判定。

(1) 分 4 种情况画图讨论，根据等腰三角形的判定作答即可；

(2) 分 2 种情况画图讨论，根据等腰三角形的判定作答即可。

【小问 1 详解】

如图 1，当 $\alpha = 50^\circ$ 时，满足条件的等腰三角形有 4 个，理由如下：

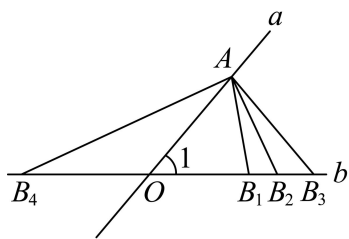


图1

当 $OB_1 = AB_1$ 时， $\angle B_1AO = \angle 1 = 50^\circ$ ；

当 $OA = OB_2$ 时， $\angle OAB_2 = \angle OB_2A = 65^\circ$ ；

当 $OA = AB_3$ 时， $\angle OAB_2 = \angle OB_3A = 65^\circ$ ；

当 $OA = OB_4$ 时， $\angle OAB_4 = \angle OB_4A = 65^\circ$ ；

故答案为：4；

【小问2详解】

如图2，当 $\alpha = 60^\circ$ 时，满足条件的等腰三角形有2个，理由如下：

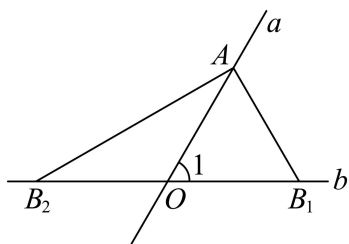


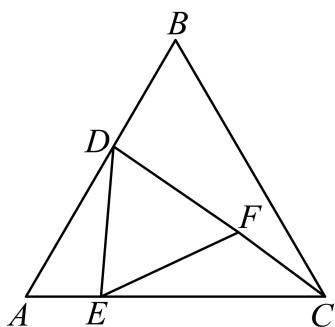
图2

当 $OA = OB_1$ 时， $\triangle AOB_1$ 是等边三角形，

当 $OA = OB_2$ 时， $\angle OAB_2 = \angle OB_2A = 30^\circ$ ；

故答案为：2.

31. 如图，在等边 ABC 中， D 、 E 分别为 AB 、 AC 边上的动点， $BD = 2AE$ ，连接 DE ，以 DE 为边在 ABC 内作等边 $\triangle DEF$ ，连接 CF ，当 D 从点 A 向 B 运动（不运动到点 B ）时， $\angle ECF$ 大小的变化情况是_____（横线上填“变大”、“变小”、“不变”或先变大后变小），请说明理由.



【答案】不变，理由见解析

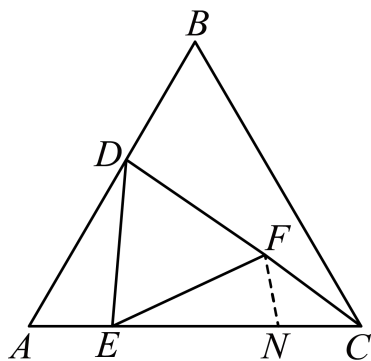
【解析】

【分析】此题主要考查了等边三角形的性质，理解等边三角形的性质，熟练掌握全等三角形的判定和性质是解决问题的关键. 设 $AE = a$ ，则 $BD = 2AE = 2a$ ，在 CA 上截取 $CN = AE = a$ ，连接 FN ，根据等边三角形性质得 $AB = AC$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，则 $AD = NE = AB - 2a$ ，根据 $\triangle DEF$ 是等边三角形得 $DE = EF$ ， $\angle DEF = 60^\circ$ ，进而得 $\angle ADE = \angle NEF$ ，由此可依据 SAS 判定 $\triangle ADE$ 和 $\triangle NEF$ 全等得 $\angle A = \angle ENF = 60^\circ$ ， $AE = NF = a$ ，则 $CN = NF = a$ ，继而根据三角形外角性质得 $\angle ECF = 30^\circ$ ，据此即可得出答案.

【详解】解： $\angle ECF$ 大小不发生变化，始终等于 30° ，理由如下：

设 $AE = a$ ，则 $BD = 2AE = 2a$ ，

在 CA 上截取 $CN = AE = a$ ，连接 FN ，如图所示：



$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore AB = AC, \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore AD = AB - BD = AB - 2a, \quad NE = AC - (CN + AE) = AB - 2a,$$

$$\therefore AD = NE,$$

$$\text{在 } \triangle ADE \text{ 中, } \angle ADE + \angle AED = 180^\circ - \angle A = 120^\circ,$$

$\because \triangle DEF$ 是等边三角形，

$$\therefore DE = EF, \quad \angle DEF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AED + \angle NEF = 180^\circ - \angle DEF = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle NEF,$$

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle NEF$ 中，

$$\begin{cases} AD = NE \\ \angle ADE = \angle NEF, \\ DE = EF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle NEF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle A = \angle ENF = 60^\circ, \quad AE = NF = a,$$

$$\therefore CN = NF = a,$$

$$\therefore \angle NFC = \angle ECF,$$

$\because \angle ENF$ 是 $\triangle NFC$ 的外角，

$$\therefore \angle ENF = \angle NFC + \angle ECF,$$

$$\therefore 2\angle ECF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ECF = 30^\circ.$$

故答案为：不变.

32. 【问题背景】如图 1，在探究手拉手全等模型时，小明发现了 MA 平分 $\angle EMD$ ，他探究此问题的方法

是“作 $\angle MCI = 60^\circ$ ”构造等边三角形解决问题.

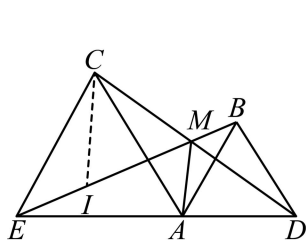


图1

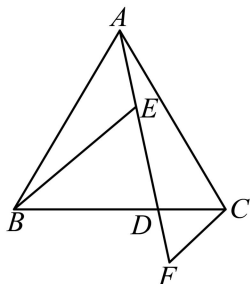


图2

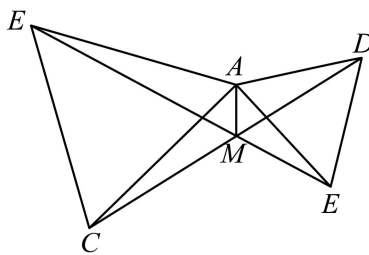


图3

【学以致用】

(1) 如图2, 等边三角形 ABC 中, D 为边 BC 上一点, $\angle ABE = \angle CAD$, $CF \parallel BE$ 交 AD 延长线于点 F .

①直接写出 $\angle AEB$ 的度数———;

②若 $BE = 10$, $AF = 15$, 求 AE 的长.

(2) 课后小明对手拉手模型进行了进一步的探究;

① $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 都是等边三角形, 位置如图所示, 此时 MA 平分 $\angle EMD$ 的结论是否成立? ——— (填“成立”, “不成立”或“不能确定”);

②求 $\frac{MB + MC + 2AM}{DM + EM}$ 的值.

【答案】(1) ① 120° ; ② 5

(2) ①成立; ② 1

【解析】

【分析】本题是三角形综合题, 考查了全等三角形的判定和性质, 等边三角形的判定和性质, 添加恰当辅助线构造全等三角形是解题的关键.

(1) ①由等边三角形的性质和外角的性质可求解;

②由 AAS 可证 $\triangle ABE \cong \triangle CAH$, 可得 $BE = AH = 10$, $AE = CH$, 即可求解;

(2) ①由 SAS 可证 $\triangle ABE \cong \triangle ADC$, 可得 $BE = CD$, $S_{\triangle ACD} = S_{\triangle AEB}$, 由面积公式可求 $AF = AG$, 即可求解;

②通过证明 $\triangle AKM$ 和 $\triangle AMH$ 是等边三角形, 可得 $AM = AK = KM = AH = MH$, $\angle MAK = \angle EAC = 60^\circ$, $\angle MAH = \angle BAD = 60^\circ$, 由 SAS 可证 $\triangle AEK \cong \triangle CAM$, $\triangle DAH \cong \triangle BAM$, 可得 $EK = CM$, $DH = BM$, 即可求解.

【小问1详解】

① $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore AB = AC = BC, \quad \angle BAC = \angle ACB = 60^\circ,$$

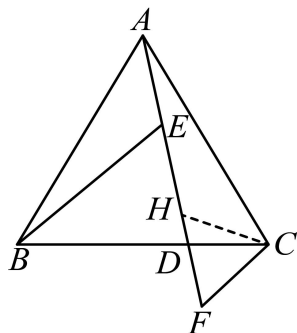
$$\because \angle ABE = \angle CAD,$$

$$\therefore \angle CAD + \angle BAE = \angle ABE + \angle BAE = \angle BAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB = 120^\circ,$$

故答案为: 120° ;

②如图, 在 AF 上截取 $FH = FC$, 连接 CH ,



$$\because \angle AEB = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BED = 60^\circ,$$

$$\because BE \parallel CF,$$

$$\therefore \angle BED = \angle F = 60^\circ,$$

$$\text{又} \because FH = FC,$$

$$\therefore \triangle FCH \text{ 是等边三角形},$$

$$\therefore CF = CH = FH, \quad \angle FCH = \angle FHC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AHC = 120^\circ = \angle AEB,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CAH$ 中,

$$\begin{cases} \angle ABE = \angle CAD \\ \angle AEB = \angle AHC, \\ AB = AC \end{cases}$$

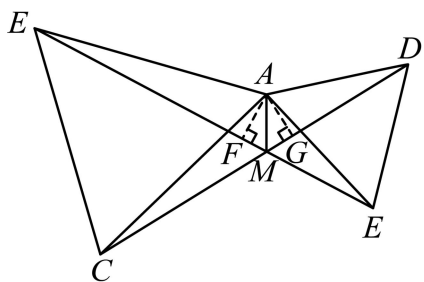
$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CAH \text{ (AAS)},$$

$$\therefore BE = AH = 10, \quad AE = CH,$$

$$\therefore FH = CH = AE = 5;$$

【小问 2 详解】

①如图, 过点 A 作 $AF \perp BE$ 于 F , $AG \perp CD$ 于 G ,



$\because \triangle ABD, \triangle ACE$ 都是等边三角形,

$\therefore AB = AD, AE = AC, \angle DAB = \angle EAC = 60^\circ,$

$\therefore \angle DAC = \angle BAE,$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADC$ 中,

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle BAE = \angle DAC, \\ AE = AC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADC (\text{SAS}),$

$\therefore BE = CD, S_{\triangle ACD} = S_{\triangle AEB},$

$\therefore \frac{1}{2} CD \cdot AF = \frac{1}{2} BE \cdot AG,$

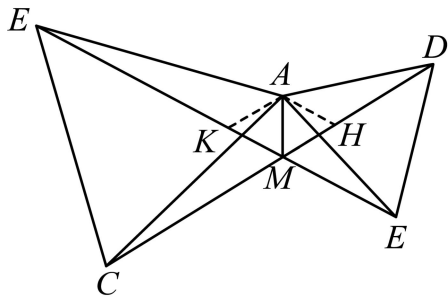
$\therefore AF = AG,$

又 $\because AF \perp BE, AG \perp CD,$

$\therefore MA$ 平分 $\angle EMD,$

故答案为: 成立;

②如图, 在 EM 上截取 $AM = KM$, 在 DM 上截取 $MH = AM$, 连接 $AK, AH,$



$\because \triangle ABE \cong \triangle ADC,$

$\therefore \angle ADC = \angle ABE,$

$\because \angle ADC + \angle BDC + \angle ABD + \angle DAB = 180^\circ, \angle BDC + \angle ABE + \angle ABD + \angle BMD = 180^\circ,$

$\therefore \angle DMB = \angle BAD = 60^\circ,$

$$\therefore \angle DME = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle AMD = \angle AME = 60^\circ,$$

$$\because AM = KM, \quad MH = AM,$$

$\therefore \triangle AKM$ 和 $\triangle AMH$ 是等边三角形,

$$\therefore AM = AK = KM = AH = MH, \quad \angle MAK = \angle EAC = 60^\circ, \quad \angle MAH = \angle BAD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EAK = \angle CAM, \quad \angle DAH = \angle BAM,$$

$$\therefore \triangle AEK \cong \triangle CAM \text{ (SAS)}, \quad \triangle DAH \cong \triangle BAM \text{ (SAS)},$$

$$\therefore EK = CM, \quad DH = BM,$$

$$\therefore \frac{MB + MC + 2AM}{DM + EM} = \frac{MH + HM + EK + KM}{DM + EM} = \frac{DM + EM}{DM + EM} = 1.$$