

上外附校东校 2024 – 2025 学年七年级下学期 5 月月考数学试卷

一. 填空题 (共 15 小题)

1. 等腰三角形一边长 $9cm$ ，另一边长 $4cm$ ，则该等腰三角形的周长是_____.

【答案】 $22cm$

【解析】

【分析】 本题考查了等腰三角形的定义，三角形三边数量关系，掌握三角形三边数量关系，等腰三角形的定义是关键.

根据等腰三角形的定义，分类讨论即可.

【详解】 解：当腰长为 $9cm$ ，底边长为 $4cm$ ，

$\because 9 - 4 < 9 < 9 + 4$ ，即 $5 < 9 < 13$ ，符合题意，

$\therefore$ 这个等腰三角形的周长为 $4 + 9 + 9 = 22(cm)$ ；

当腰长为 $4cm$ ，底边长为 $9cm$ ，

$\because 4 + 4 < 9$ ，不符合题意；

综上所述，该等腰三角形的周长是 $22cm$

故答案为： $22cm$.

2. 若三角形三个内角 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的关系满足 $\angle A > 3\angle B, \angle C < 2\angle B$ ，则该三角形按角分类为_____三角形.

【答案】 钝角

【解析】

【分析】 根据三角形的内角和定理可得 $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ，再由 $\angle C < 2\angle B$ ，可得 $\angle A + 3\angle B > 180^\circ$ 。然后根据 $\angle A > 3\angle B$ ，可得 $2\angle A > 180^\circ$ ，即可求解.

【详解】 解：因为 $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ，

又因为 $\angle C < 2\angle B$ ，

所以 $\angle A + \angle B + 2\angle B > 180^\circ$ ，即 $\angle A + 3\angle B > 180^\circ$ 。

又因为 $\angle A > 3\angle B$ ，

所以 $2\angle A > 180^\circ$ ，即 $\angle A > 90^\circ$ ，

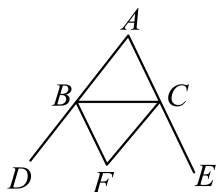
所以这个三角形是钝角三角形.

故答案为：钝角

【点睛】 本题主要考查了三角形的内角和定理，不等式的性质，三角形的分类，熟练掌握三角形的内角和

定理，不等式的性质，三角形的分类是解题的关键.

3. 如图， $\angle DBC$ 与 $\angle ECB$ 是 $\triangle ABC$ 的两个外角， BF 平分 $\angle DBC$ 交 $\angle ECB$ 的平分线于点 F . 若 $\angle F = 60^\circ$ ，则 $\angle A = \underline{\hspace{1cm}}$.



【答案】 60°

【解析】

【分析】由角平分线的定义及三角形的内角和定理可得 $\angle CBF + \angle BCF = 120^\circ$ ，进而利用平角定义和三角形的内角和定理求解.

【详解】解： $\because BF$ 平分 $\angle DBC$ ， CF 平分 $\angle ECB$ ，

$$\therefore \angle ECB = 2\angle BCF, \angle DBC = 2\angle CBF,$$

$$\therefore \angle F = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CBF + \angle BCF = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ECB + \angle DBC = 2 \times 120^\circ = 240^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle ACB = 360^\circ - (\angle ECB + \angle DBC) = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

故答案为： 60° .

【点睛】本题考查三角形外角的性质及三角形的内角和定理，解答的关键是熟练应用外角和内角的关系.

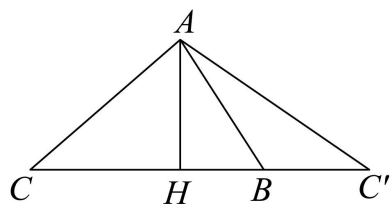
4. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 40^\circ$ ，把 $\triangle ABC$ 沿 BC 边上的高 AH 所在直线翻折，点 C 落在射线 CB 上的点 C' 处，如果 $\angle BAC' = 20^\circ$ ，那么 $\angle BAC = \underline{\hspace{1cm}}$ 度.

【答案】 80 或 120

【解析】

【分析】利用翻折变换的性质求出 $\angle C' = 40^\circ$ ，分点 B 在线段 CC' 上和点 B 在 CC' 的延长线上两种情况，利用三角形内角和定理及外角性质求解.

【详解】解：如图，当点 B 在线段 CC' 上时.



由翻折的旋转可知, $\angle C' = \angle C = 40^\circ$,

$$\therefore \angle ABC' = 180^\circ - \angle C' - \angle BAC' = 180^\circ - 40^\circ - 20^\circ = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ,$$

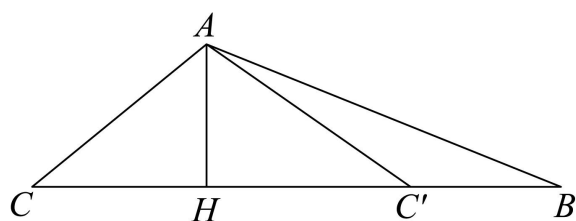
$$\therefore \angle CAB = 180^\circ - \angle C - \angle ABC = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ;$$

当点 B 在 CC' 的延长线上时,

由翻折的旋转可知, $\angle AC'C = \angle C = 40^\circ$,

$$\therefore \angle B = \angle AC'C - \angle BAC' = 40^\circ - 20^\circ = 20^\circ,$$

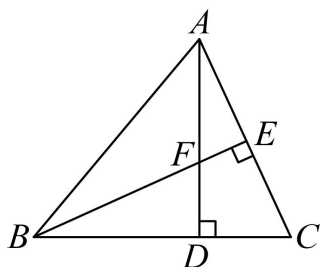
$$\therefore \angle CAB = 180^\circ - \angle C - \angle B = 180^\circ - 40^\circ - 20^\circ = 120^\circ.$$



故答案为: 80 或 120.

【点睛】 本题考查三角形内角和定理, 翻折变换等知识, 解题的关键是注意分类讨论, 属于中考常考题型.

5. 如图, $\triangle ABC$ 中, AD 和 BE 是两条高线, 相交于点 F , 若 $AC = BF$, $BD = 5$, $CD = 2$, 则 $AF = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 3

【解析】

【分析】 本题主要考查了全等三角形的判定与性质, 证明 $\triangle BFD \cong \triangle ACD$ 是解题的关键. 利用 AAS 证明 $\triangle BFD \cong \triangle ACD$, 根据全等三角形的性质得到 $BD = AD$, $CD = DF$, 即可解决问题.

【详解】 解: $\because AD \perp BC$, $BE \perp AC$,

$$\therefore \angle ADC = \angle BDF = 90^\circ, \quad \angle CAD + \angle C = 90^\circ, \quad \angle CBE + \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBE = \angle CAD,$$

在 $\triangle BFD$ 与 $\triangle ACD$ 中,

$$\begin{cases} \angle BDF = \angle ADC \\ \angle FBD = \angle DAC \\ BF = AC \end{cases},$$

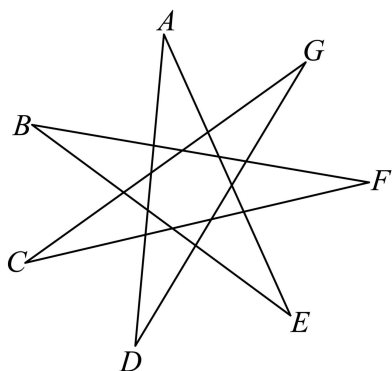
$$\therefore \triangle BFD \cong \triangle ACD (\text{AAS}),$$

$$\therefore BD = AD = 5, \quad DF = CD = 2,$$

$$\therefore AF = AD - DF = 5 - 2 = 3,$$

故答案为：3.

6. 如图， $\angle A + \angle B + \dots + \angle G = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$.



【答案】180

【解析】

【分析】根据三角形外角的性质以及三角形内角和定理进行求解，即可得到答案.

【详解】解：如图，

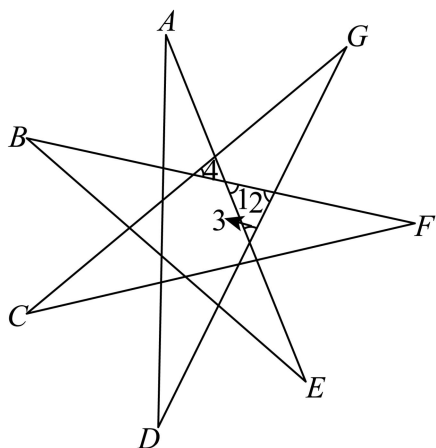
$$\because \angle 1 = \angle B + \angle E, \quad \angle 3 = \angle A + \angle D, \quad \angle 4 = \angle C + \angle F, \quad \angle 2 = \angle 4 + \angle G,$$

$$\text{又} \because \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle B + \angle E + \angle 4 + \angle G + \angle A + \angle D = \angle B + \angle E + \angle C + \angle F + \angle G + \angle A + \angle D = 180^\circ,$$

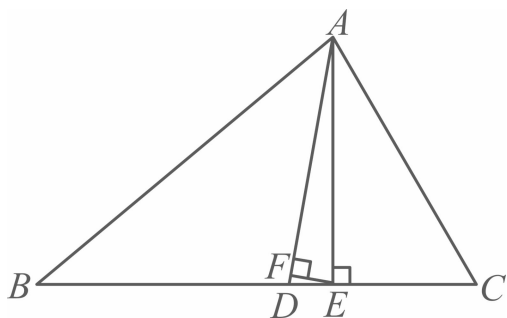
$$\text{即} \angle A + \angle B + \dots + \angle G = 180^\circ,$$

故答案为：180.



【点睛】 本题考查了三角形外角的性质，三角形内角和定理，灵活运用三角形的外角是解题关键.

7. 如图， $\triangle ABC$ ， $\angle C$ 比 $\angle B$ 大 20° ， AD 平分 $\angle BAC$ ， $AE \perp BC$ 于 E ， $EF \perp AD$ 于 F ， 则 $\angle AEF = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$.



【答案】 80

【解析】

【分析】 此题主要考查了三角形的内角和定理，直角三角形的性质，角平分线的定义等，先设 $\angle B = \alpha$ ， 则 $\angle C = \alpha + 20^\circ$ ， 根据三角形的内角和定理得 $\angle BAC = 160^\circ - 2\alpha$ ， 进而根据角平分线的定义得 $\angle CAD = 80^\circ - \alpha$ ， 然后根据 $AE \perp BC$ 得 $\angle CAE = 70^\circ - \alpha$ ， 据此可得 $\angle DAE = 10^\circ$ ， 最后再根据 $EF \perp AD$ 可得出 $\angle AEF$ 的度数.

【详解】 解： 设 $\angle B = \alpha$ ， 则 $\angle C = \alpha + 20^\circ$ ，

$$\therefore \angle B + \angle C = 2\alpha + 20^\circ,$$

$$\because \angle BAC + \angle B + \angle C = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - (\angle B + \angle C) = 160^\circ - 2\alpha,$$

$$\because AD \text{ 平分 } \angle BAC,$$

$$\therefore \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC = 80^\circ - \alpha,$$

$$\because AE \perp BC,$$

$$\therefore \angle CAE + \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAE = 90^\circ - \angle C = 70^\circ - \alpha,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle CAD - \angle CAE = 10^\circ,$$

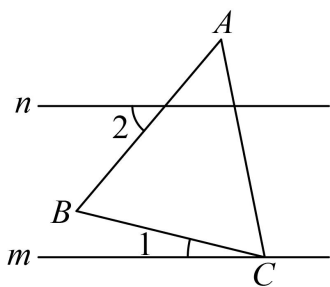
$$\because EF \perp AD,$$

$$\therefore \angle AEF + \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEF = 80^\circ.$$

故答案为： 80.

8. 如图， $m \parallel n$ ， $\triangle ABC$ 的顶点 C 在直线 m 上， 若 $AB = AC$ ， $\angle A = 40^\circ$ ， $\angle 1 = 20^\circ$ ， 则 $\angle 2 = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$.

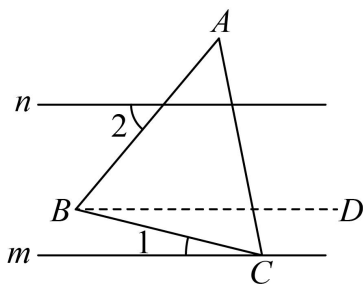


【答案】 50

【解析】

【分析】本题考查了平行线的性质、等腰三角形的性质，作 $BD \parallel m$ ，由平行线的性质得出 $\angle DBC = \angle 1 = 20^\circ$ ，由等腰三角形的性质得出 $\angle ABC = 70^\circ$ ，求出 $\angle ABD = 50^\circ$ ，由平行线的性质得出 $\angle 2 = \angle ABD = 50^\circ$ 即可。

【详解】解：作 $BD \parallel m$ ，如图，



$$\therefore \angle DBC = \angle 1 = 20^\circ,$$

$$\because m \parallel n,$$

$$\therefore BD \parallel n,$$

$$\because \triangle CAB \text{ 为等腰三角形, } \angle A = 40^\circ,$$

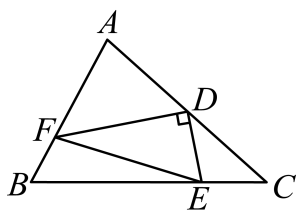
$$\therefore \angle ABC = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ABC - \angle DBC = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle ABD = 50^\circ.$$

故答案为：50.

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 是边 AC 的中点， $\angle EDF = 90^\circ$ ， $AF = 5$ ， $CE = 2$ ，则 EF 的取值范围是

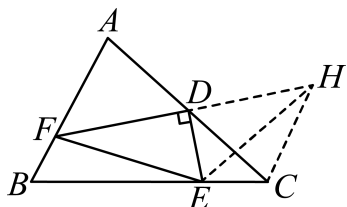


【答案】 $3 < EF < 7$ ## $3 < FE < 7$

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的判定和性质及三角形的三边关系，证明 $\triangle ADF \cong \triangle CDH$ 是本题的关键. 延长 FD 到 H ，使得 $DH = DF$ ，连接 CH ， EH ．由“SAS”可证 $\triangle ADF \cong \triangle CDH$ ，推出 $AF = CH$ ，利用三角形的三边关系即可解决问题.

【详解】解：如图，延长 FD 到 H ，使得 $DH = DF$ ，连接 CH ， EH ．



$\because D$ 是边 AC 的中点，

$\therefore AD = CD$ ，

在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle CDH$ 中，

$$\begin{cases} AD = CD \\ \angle ADF = \angle CDH, \\ DF = DH \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle CDH$ (SAS)，

$\therefore AF = CH = 5$ ，

$\because \angle EDF = 90^\circ$ ，

$\therefore ED \perp FH$ ，

$\because DF = DH$ ，

$\therefore EF = EH$ ，

在 $\triangle ECH$ 中， $CH - CE < EH < CH + CE$ ， $CH = 5$ ， $CE = 2$

$\therefore 5 - 2 < EH < 5 + 2$ ，

$\therefore 3 < EH < 7$ ，

$\therefore 3 < EF < 7$ ，

故答案为： $3 < EF < 7$.

10. 已知 BD 是等腰 ABC 一腰上的高，且 $\angle ABD = 40^\circ$ ，则 ABC 三内角度数为_____.

【答案】 50° 、 65° 、 65° 或 80° 、 50° 、 50° 或 130° 、 25° 、 25°

【解析】

【分析】主要考查了等腰三角形的性质及三角形内角和定理，根据直角三角形两锐角互余求出 $\angle A$ ，再分点 A 是顶角顶点，点 A 是底角或顶角顶点 3 种情况求解.

【详解】解： $\because \angle ABD = 40^\circ$ ， BD 是等腰 ABC 腰上的高，

$$\therefore \angle A = 90^\circ - \angle ABD = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ,$$

①如图 1，点 A 是顶角顶点时，顶角为 $\angle A$ ，是 50° ，两底角为 65° ；

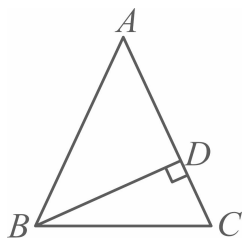


图1

②如图 2，点 A 是底角顶点时，两底角是 50° ，顶角 $\angle BCA = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ = 80^\circ$ ；

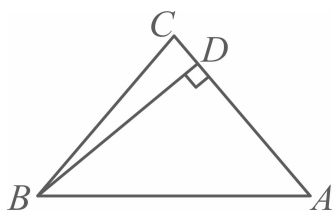


图2

③如图 3，点 A 是顶角顶点时，顶角 $\angle BAC = 90^\circ + 40^\circ = 130^\circ$ ，两底角是 $\frac{1}{2} \times (180^\circ - 130^\circ) = 25^\circ$ ；

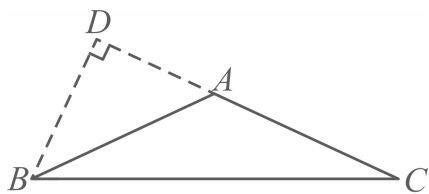
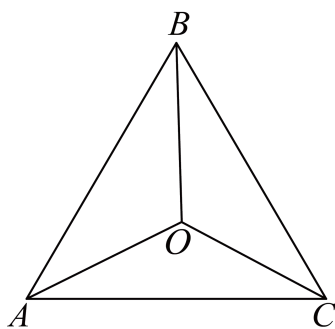


图3

综上所述，等腰 ABC 三内角度数为 50° 、 65° 、 65° 或 80° 、 50° 、 50° 或 130° 、 25° 、 25° .

故答案为： 50° 、 65° 、 65° 或 80° 、 50° 、 50° 或 130° 、 25° 、 25° .

11. 设 O 是等边三角形 ABC 内一点，已知 $\angle AOB = 115^\circ$ ， $\angle BOC = 120^\circ$ ，求以线段 OA 、 OB 、 OC 为边构成的三角形的各角的度数分布为_____.

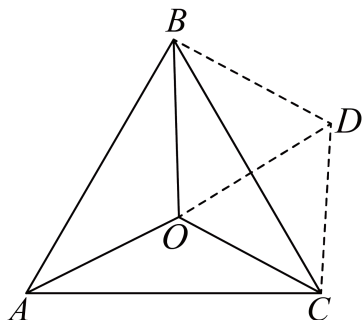


【答案】 55° ， 60° ， 65°

【解析】

【分析】 本题主要考查了等边三角形的性质，旋转的性质， 可通过旋转将 $\triangle AOB$ 旋转至 $\triangle BDC$ ， 则可得 $\triangle BOD$ 是等边三角形， 再根据旋转的性质得出线段 OA, OB, OC 三边构成的三角形为 $\triangle OCD$ ， 进而求出各个角的大小即可.

【详解】 解： 将 $\triangle AOB$ 逆时针旋转 60° ， 得到 $\triangle CDB$ ，



$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle CDB, \quad OB = DB, \quad \angle OBD = 60^\circ$$

$\therefore \triangle BOD$ 是等边三角形.

$$\therefore OB = DB = OD$$

又 $\because \triangle AOB \cong \triangle CDB$

$$\therefore \angle AOB = \angle CDB = 115^\circ, \quad OA = DC$$

故以线段 OA, OB, OC 三边构成的三角形为 $\triangle OCD$

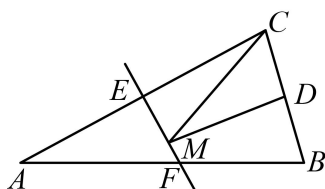
$$\therefore \angle ODC = \angle CDB - \angle ODB = 115^\circ - 60^\circ = 55^\circ$$

$$\angle COD = \angle BOC - \angle BOD = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

$$\angle OCD = 180^\circ - \angle ODC - \angle COD = 180^\circ - 60^\circ - 55^\circ = 65^\circ$$

故答案为： 55° ， 60° ， 65°

12. 如图， 等腰三角形 ABC 的底边 BC 长为 6， 面积是 24， 腰 AC 的垂直平分线 EF 分别交 AC ， AB 边于 E ， F 点； 若点 D 为 BC 边的中点， 点 M 为线段 EF 上一动点， 则 CDM 周长的最小值为_____.



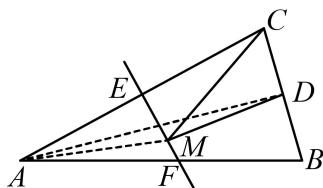
【答案】 11

【解析】

【分析】 本题考查的是轴对称 - 最短路线问题， 连接 AD ， MA ， 由于 ABC 是等腰三角形， 点 D 是 BC 边的中点， 故 $AD \perp BC$ ， 再根据三角形的面积公式求出 AD 的长， 再根据 EF 是线段 AC 的垂直平分线可

知，点 A 关于直线 EF 的对称点为点 C ， $MA = MC$ ，推出 $MC + DM = MA + DM \geq AD$ ，故 AD 的长为 $CM + MD$ 的最小值，由此即可得出结论。

【详解】解：连接 AD ， MA ，



$\because \triangle ABC$ 是等腰三角形，点 D 是 BC 边的中点，

$\therefore AD \perp BC$ ，

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} \times 6 \times AD = 24,$$

解得 $AD = 8$ ，

$\because EF$ 是线段 AC 的垂直平分线，

$\therefore$ 点 A 关于直线 EF 的对称点为点 C ， $MA = MC$ ，

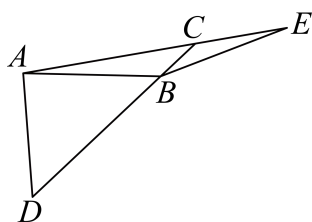
$\therefore MC + DM = MA + DM \geq AD$ ，

$\therefore AD$ 的长为 $CM + MD$ 的最小值，

$$\therefore \triangle CDM \text{ 的周长最短} = (CM + MD) + CD = AD + \frac{1}{2} BC = 8 + \frac{1}{2} \times 6 = 8 + 3 = 11.$$

故答案为：11.

13. 如图所示，已知在 $\triangle ABC$ 中， AD 、 BE 分别平分它的外角，并分别与两条边 CB 、 AC 的延长线交于点 D 、 E ，若 $AD = AB = BE$ ，则 $\angle CAB =$ _____



【答案】 12° ## 12 度

【解析】

【分析】本题主要考查了三角形外角的定义和性质，三角形内角和定理，由三角形外角的定义和性质得出 $2\angle DAB + \angle CAB = 180^\circ$ ， $\angle CBE = \frac{1}{2}(\angle ACB + \angle CAB)$ ，由等边对等角可得出 $\angle D = \angle ABD$ ， $\angle CAB = \angle E$ ，等量代换可得出 $\angle CBE = \frac{1}{2}(\angle ACB + \angle E)$ ，再由三角形外角的定义和性质得出 $\angle ACB = \angle E + \angle CBE$ ，即可得出 $\angle ACB = 3\angle E = 3\angle CAB$ ，由三角形外角的定义和性质得出

$\angle ABD = \angle D = \angle CAB + \angle ACB = 4\angle CAB$ ，由三角形内角和定理可得出
 $\angle DAB = 180^\circ - \angle D - \angle ABD = 180^\circ - 8\angle CAB$ ，代入到 $2\angle DAB + \angle CAB = 180^\circ$ 计算即可得出 $\angle CAB$ 。

【详解】解：∵ AD 、 BE 分别平分 $\triangle ABC$ 的两个外角

$$\therefore 2\angle DAB + \angle CAB = 180^\circ, \quad \angle CBE = \frac{1}{2}(\angle ACB + \angle CAB),$$

$$\therefore AD = AB = BE,$$

$$\therefore \angle D = \angle ABD, \quad \angle CAB = \angle E,$$

$$\therefore \angle CBE = \frac{1}{2}(\angle ACB + \angle E),$$

$$\therefore \angle ACB = \angle E + \angle CBE,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle E + \frac{1}{2}(\angle ACB + \angle CAB),$$

$$\therefore \angle ACB = 3\angle E = 3\angle CAB,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle D = \angle CAB + \angle ACB = 4\angle CAB,$$

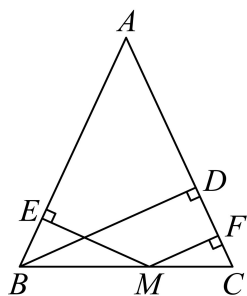
$$\therefore \angle DAB = 180^\circ - \angle D - \angle ABD = 180^\circ - 8\angle CAB,$$

$$\therefore 2\angle DAB + \angle CAB = 360^\circ - 15\angle CAB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle CAB = 12^\circ,$$

故答案为： 12°

14. 如图，在等腰 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，其一腰上的高为 h ， M 是底边 BC 上的任意一点， M 到腰 AB 、 AC 的距离分别为 h_1 、 h_2 ，则 $BD =$ _____



【答案】 $h_1 + h_2$

【解析】

【分析】 本题考查了三角形的面积。根据 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABM} + S_{\triangle AMC}$ ，结合三角形的面积公式求解即可。

【详解】解：∵ $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABM} + S_{\triangle AMC}$ ，

$$S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} \times AB \times ME = \frac{1}{2} \times AB \times h_1, \quad S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} \times AC \times MF = \frac{1}{2} \times AC \times h_2,$$

$$\begin{aligned}
&\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AC \times BD = \frac{1}{2} \times AC \times h, \\
&\therefore \frac{1}{2} \times AC \times h = \frac{1}{2} \times AB \times h_1 + \frac{1}{2} \times AC \times h_2, \\
&\because AB = AC, \\
&\therefore \frac{1}{2} \times AC \times h = \frac{1}{2} \times AC \times (h_1 + h_2), \\
&\therefore BD = h_1 + h_2.
\end{aligned}$$

故答案为: $h_1 + h_2$.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, AB 的垂直平分线交 AB 于点 D , 交直线 AC 于点 E , $\angle AEB = 60^\circ$, 那么 $\angle EBC$ 等于_____.

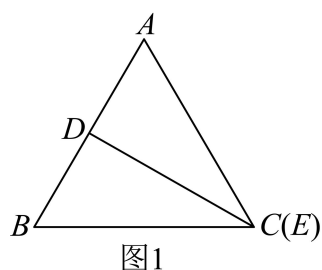
【答案】 0° 或 90°

【解析】

【分析】此题主要考查线段的垂直平分线及等腰三角形的判定和性质; 线段的垂直平分线上的点到线段的两个端点的距离相等. 分两种情况: $\angle BAC$ 为锐角, $\angle BAC$ 为钝角, 根据线段垂直平分线的性质可求出 $AE = BE$, 然后根据三角形内角和定理即可解答.

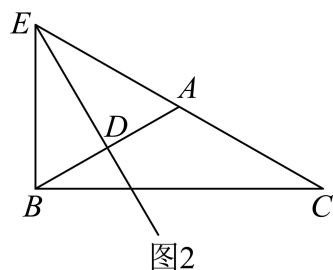
【详解】解: 分以下两种情况:

如图 1, $\angle BAC$ 为锐角,



$$\begin{aligned}
&\because DE \text{ 垂直平分 } AB, \\
&\therefore AE = BE, \\
&\therefore \angle BAC = \angle ABE, \\
&\because \angle AEB = 60^\circ, \\
&\therefore \angle BAC = \angle ABE = 60^\circ, \\
&\because AB = AC, \\
&\therefore \angle ABC = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ, \\
&\therefore \angle EBC = \angle ABC - \angle ABE = 0^\circ \text{ (此时点 } E \text{ 和点 } C \text{ 重合);}
\end{aligned}$$

如图 2, $\angle BAC$ 为钝角,



$\because DE$ 垂直平分 AB ,

$\therefore AE = BE$,

$\therefore \angle BAE = \angle ABE$,

$\because \angle AEB = 60^\circ$,

$\therefore \angle BAE = \angle EBA = 60^\circ$,

$\therefore \angle BAC = 120^\circ$,

$\because AB = AC$,

$\therefore \angle ABC = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$,

$\therefore \angle EBC = \angle EBA + \angle ABC = 90^\circ$.

故答案为: 0° 或 90° .

16. 已知 BD 是等腰三角形 ABC 一腰上的高, 且 $\angle ABD = 40^\circ$, 求 ABC 的顶角度数为_____.

【答案】 50° 或 80° 或 130°

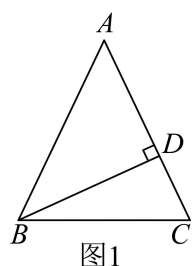
【解析】

【分析】 本题主要考查了等腰三角形的性质及三角形内角和定理, 根据直角三角形两锐角互余求出 $\angle A$, 再分点 A 是顶角顶点 ($\triangle ABC$ 为锐角三角形、 $\triangle ABC$ 为钝角三角形), 点 A 是底角顶点, 分情况求解即可.

【详解】 解: $\because \angle ABD = 40^\circ$, BD 是等腰 ABC 腰上的高,

$\therefore \angle A = 90^\circ - \angle ABD = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$;

①如图 1, 点 A 是顶角顶点, $\triangle ABC$ 为锐角三角形时, 顶角为 $\angle A$, 是 50° ;



②如图 2, 点 A 是底角顶点时, 两底角是 50° , 顶角 $\angle BCA = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ = 80^\circ$;

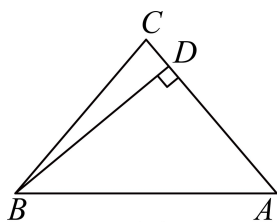


图2

③如图 3，点 A 是顶角顶点， $\triangle ABC$ 是钝角三角形时，顶角 $\angle BAC = 90^\circ + 40^\circ = 130^\circ$ ；

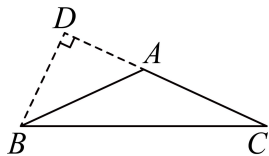


图3

综上所述，等腰 ABC 顶角度数为 50° 或 80° 或 130° 。

故答案为： 50° 或 80° 或 130° 。

二. 选择题 (共 4 小题)

17. 若一个三角形是轴对称图形，且有一个内角为 60° ，则这个三角形的形状是 ()

- A. 直角三角形
- B. 等腰直角三角形
- C. 等边三角形
- D. 上述三种情形都有可能

【答案】 C

【解析】

【分析】 三角形是轴对称图形，则该三角形是等腰三角形，根据有一个内角是 60° 的等腰三角形是等边三角形，即可作出判断。

【详解】 解： 因为三角形是轴对称图形，
则该三角形是等腰三角形，根据有一个内角是 60° 的等腰三角形是等边三角形。

故选： C。

【点睛】 本题主要考查了等边三角形的判定方法，解题的关键是熟练掌握判定方法，此题比较简单，易于掌握。

18. 已知两个三角形有一个角及这个角的一条邻边对应相等，若再增加以下某个条件，则不能判断这两个三角形全等的是 ()

- A. 这条边上的高对应相等
- B. 这条边上的中线对应相等
- C. 这个角的角平分线对应相等
- D. 这个角的另一条邻边对应相等

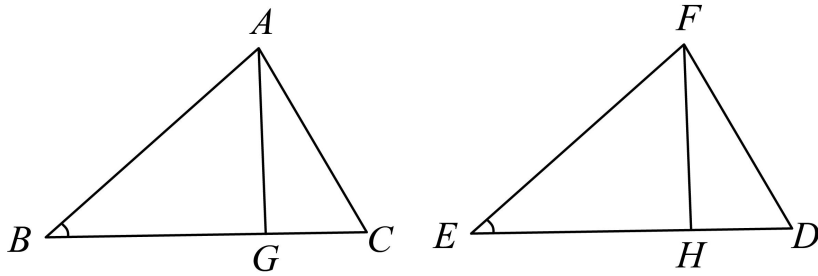
【答案】 B

【解析】

【分析】根据各选项提供的条件，分别画出图形，结合全等三角形的判定与性质逐一分析即可．

【详解】解：如图，由题意得： $\angle B = \angle E$ ， $BC = ED$ ，

增加：高 $AG = FH$ ，



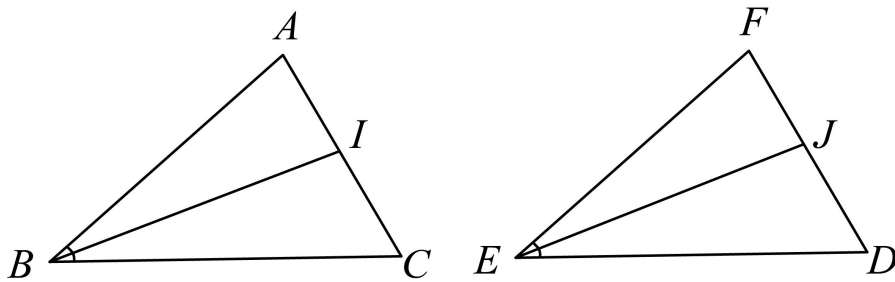
$$\therefore \angle AGB = \angle FHE = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABG \cong \triangle FEH,$$

$$\therefore AB = FE,$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle FED$ ，故 A 不符合题意；

增加：角平分线 $BI = EJ$ ，



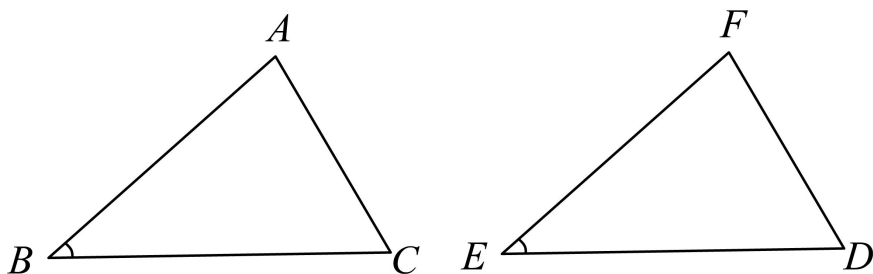
由角平分线的性质可得： $\angle IBC = \angle JED$ ，而 $BC = ED$ ，

$$\therefore \triangle IBC \cong \triangle JED,$$

$$\therefore \angle C = \angle D, \text{ 而 } \angle ABC = \angle FED, \quad BC = ED,$$

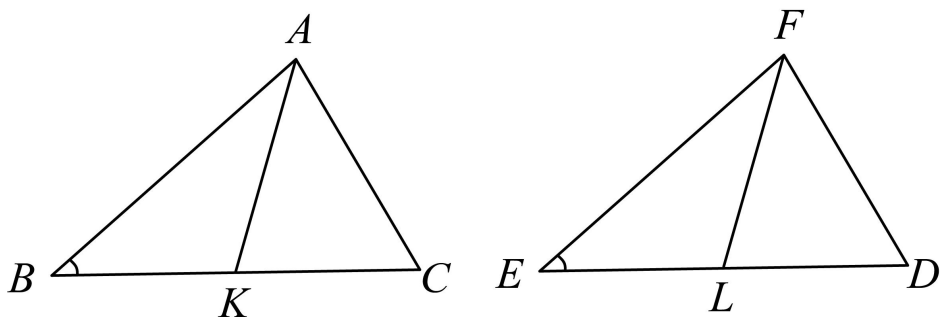
$\therefore \triangle ABC \cong \triangle FED$ ，故 C 不符合题意；

增加： $AB = FE$ ，



显然： $\triangle ABC \cong \triangle FED$ ，故 D 不符合题意；

增加：中线 $AK = FL$ ，



无法证明 $\triangle ABK, \triangle FEL$ 全等, 无法证明 $\triangle AKC, \triangle FLD$ 全等,

$\therefore$ 得不到 $\triangle ABC, \triangle FED$ 全等, 故 B 符合题意;

故选 B

【点睛】 本题考查的是全等三角形的判定与性质, 熟记全等三角形的判定方法与性质是解本题的关键.

19. 给出下列说法:

- ①平面内, 过一点有且只有一条直线与已知直线垂直;
- ②一个三角形中至少有两个角为锐角;
- ③从直线外一点到这条直线的垂线段, 叫做这点到直线的距离;
- ④不相交的两条直线叫做平行线;
- ⑤两条直线被第三条直线所截, 同位角相等;

⑥若 $\angle A$ 与 $\angle B$ 互补, 则 $\frac{1}{2}\angle A$ 与 $\frac{1}{2}\angle B$ 互余. 其中正确的有 ()

- A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查了本题主要考查了相交线与平行线的一些基本概念以及三角形内角和定理、余角与补角的定义, 根据垂线的性质, 三角形内角和定理, 点到直线的距离, 平行线的定义与性质, 余角与补角的定义进行判断即可.

【详解】 解: ①平面内, 过一点有且只有一条直线与已知直线垂直, 正确;

②根据三角形内角和为 180° 可知: 在直角三角形和钝角三角形中都只有 2 个锐角, 而锐角三角形的三个内角都是锐角. 故一个三角形中至少有两个角为锐角, 正确;

③从直线外一点到这条直线的垂线段的长度, 叫做这点到直线的距离, 故③错误;

④平面内, 不相交的两条直线叫做平行线, 故④错误;

⑤两条平行线被第三条直线所截, 同位角相等, 故⑤错误;

⑥若 $\angle A$ 与 $\angle B$ 互补, 即 $\angle A + \angle B = 180^\circ$

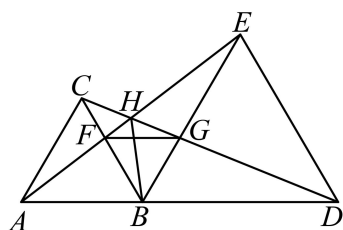
$$\therefore \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = 90^\circ$$

则 $\frac{1}{2}\angle A$ 与 $\frac{1}{2}\angle B$ 互余，故⑥正确.

故说法正确的有 2 个.

故选: C.

20. 如图, 已知 ABC 和 BDE 都是等边三角形 (A, B, D 共线). 下列结论, ① $AE = CD$; ② $BF = BG$; ③ $\angle AHD = 120^\circ$; ④ $\triangle BFG$ 是等边三角形; ⑤ $FG \parallel AD$; ⑥ BH 平分 $\angle CBE$; ⑦ BH 平分 $\angle AHD$; ⑧ $DH > HE + BH$. 其中错误的有 ().



A. 0 个

B. 1 个

C. 2 个

D. 3 个

【答案】C

【解析】

【分析】本题考查全等三角形的判定和性质、等边三角形的性质，直角三角形的性质，解题的关键是正确寻找全等三角形解决问题，属于中考常考题型. 由题中条件可得 $\triangle ABE \cong \triangle CBD$ ，得出 $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle CBD}$ ， $AE = CD$ ， $\angle BDC = \angle AEB$ ， $\angle EAB = \angle BCD$ ，求出 $\angle AHC = \angle CDB + \angle EAB = \angle CDB + \angle BCD = \angle CBA = 60^\circ$ ，得出 $\angle AHD = 180^\circ - \angle AHC = 120^\circ$ ，进而得出 $\triangle BGD \cong \triangle BFE$ ， $BG = BF$ ，从而证明 $\triangle BFG$ 是等边三角形，根据等边三角形的性质证明 $\angle BFG = \angle ABC$ ，得出 $FG \parallel AD$ ，过 B 作 $BM \perp AE$ 于 M ， $BN \perp CD$ 于 N ，得出 $BM = BN$ ，根据角平分线的判定得出 BH 平分 $\angle AHD$ ，求出 $\angle HBM = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ， $\angle HBN = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ，根据直角三角形的性质得出 $BH = 2MH$ ， $BH = 2NH$ ，证明 $\text{Rt}\triangle ABM \cong \text{Rt}\triangle CBN$ (HL)，得出 $AM = CN$ ，进而证明 $DN = EM$ ，从而证明 $HD = BH + HE$ ；根据已知条件，不能证明 BH 平分 $\angle CBE$ ，从而得出答案.

【详解】解: $\because ABC$ 与 BDE 为等边三角形,

$$\therefore AB = BC, BD = BE, \angle ABC = \angle DBE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle CBD, \text{ 即 } AB = BC, BD = BE, \angle ABE = \angle CBD,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBD (\text{SAS}),$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} = S_{\triangle CBD}, \quad AE = CD, \quad \angle BDC = \angle AEB, \quad \angle EAB = \angle BCD,$$

$$\therefore \angle CBA = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AHC = \angle CDB + \angle EAB = \angle CDB + \angle BCD = \angle CBA = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AHD = 180^\circ - \angle AHC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle FBE = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DBG = \angle FBE = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle BGD \cong \triangle BFE \text{ (ASA)},$$

$$\therefore BG = BF,$$

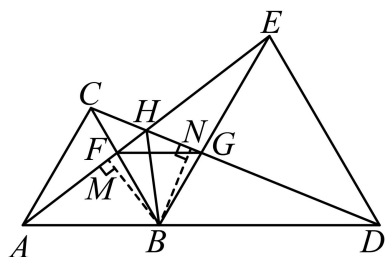
$$\therefore \triangle BFG \text{ 是等边三角形},$$

$$\therefore \angle BFG = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BFG = \angle ABC,$$

$$\therefore FG \parallel AD, \text{ 故①②③④⑤正确};$$

过 B 作 $BM \perp AE$ 于 M , $BN \perp CD$ 于 N , 如图所示:



$$\therefore S_{\triangle ABE} = S_{\triangle CBD}, \quad AE = CD,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times AE \times BM = \frac{1}{2} \times CD \times BN,$$

$$\therefore BM = BN,$$

$$\therefore BH \text{ 平分 } \angle AHD, \text{ ⑦正确};$$

$$\therefore \angle AHB = \angle DHB = \frac{1}{2} \angle AHD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BMH = \angle BNH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HBM = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ, \quad \angle HBN = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore BH = 2MH, \quad BH = 2NH,$$

$$\therefore MH = NH,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABM \text{ 和 Rt}\triangle CBN \text{ 中} \begin{cases} AB = BC \\ BM = BN \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABM \cong \text{Rt}\triangle CBN (\text{HL}),$$

$$\therefore AM = CN,$$

$$\therefore AE = CD,$$

$$\therefore AE - AM = CD - CN,$$

$$\therefore DN = EM,$$

$$\therefore HE + BH = HE + 2HN$$

$$= HE + HM + HN$$

$$= EM + HN$$

$$= DN + HN$$

$$= HD,$$

即 $HD = BH + HE$ ，故③错误；

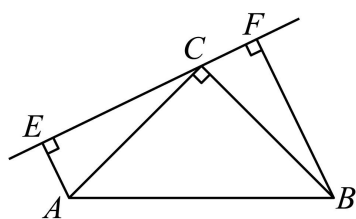
根据已知条件，不能证明 BH 平分 $\angle CBE$ ，故⑥错误；

综上分析可知：错误的有 2 个．

故选：C．

三．解答题（共 4 小题）

21. 已知 $\triangle ABC$ 中， $CA = CB$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，一直线过顶点 C ，过 A ， B 分别作其垂线，垂足分别为 E ， F ，求证： $\triangle AEC \cong \triangle CFB$ ．



【答案】见解析

【解析】

【分析】本题考查了全等三角形的判定，根据垂直的定义和余角的性质得到 $\angle FCB = \angle EAC$ ，再根据 AAS 证明 $\triangle AEC \cong \triangle CFB$ ．

【详解】证明： $\because \angle ACB = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle ECA + \angle FCB = 90^\circ,$$

又 $\because AE \perp EF, BF \perp EF$,

$\therefore \angle AEF = \angle CFB = 90^\circ$,

$\therefore \angle ECA + \angle EAC = 90^\circ$,

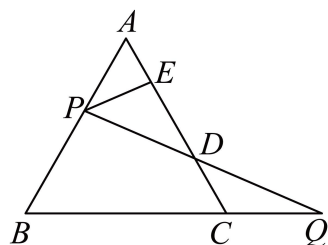
$\therefore \angle FCB = \angle EAC$,

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle CBF$ 中,

$$\begin{cases} \angle AEC = \angle CFB \\ \angle EAC = \angle FCB, \\ AC = BC \end{cases}$$

$\therefore \triangle AEC \cong \triangle CFB (\text{AAS})$.

22. 如图, 过等边 ABC 的边 AB 上一点 P , 作 $PE \perp AC$ 于 E , Q 为 BC 延长线上一点, 且 $PA = CQ$, 连 PQ 交 AC 边于 D .



(1) 求证: $PD = DQ$;

(2) 线段 DE 与 AC 有什么样的数量关系? 请说明理由.

【答案】 (1) 见解析 (2) $DE = \frac{1}{2}AC$, 见解析

【解析】

【分析】 本题综合考查等边三角形的性质、三线合一以及三角形全等的判定与性质等知识点. 正确作出辅助线是解答本题的关键.

(1) 过 P 作 BC 的平行线至 AC 于 F , 易证 $\triangle APF$ 是等边三角形, 再证明 $\triangle PFD$ 与 $\triangle QCD$ 全等, 得出结论;

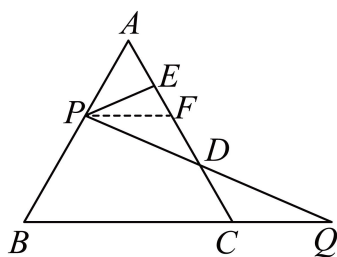
(2) 利用 $\triangle APF$ 是等边三角形, $PE \perp AC$, 得出 $AE = EF$, 再由 $\triangle PFD \cong \triangle QCD$, 得出 $CD = DF$, 由此得出 DE 与 AC 的关系解决问题.

【小问1详解】

证明: $\because ABC$ 是等边三角形,

$\therefore \angle A = \angle ABC = \angle ACB = 60^\circ$,

过 P 作 BC 的平行线至 AC 于 F ,



$$\therefore \angle AFP = \angle ACB = 60^\circ, \angle APF = \angle ABC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle APF = \angle AFP = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle APF$ 是等边三角形;

$$\therefore PA = PF,$$

$$\therefore PA = CQ,$$

$$\therefore PF = CQ,$$

$$\therefore PF \parallel BQ,$$

$$\therefore \angle PFD = \angle QCD,$$

$$\text{又 } \angle PDF = \angle QDC, \quad PF = CQ,$$

$$\therefore \triangle PFD \cong \triangle QCD (\text{AAS}),$$

$$\therefore PD = DQ;$$

【小问 2 详解】

解: 结论: $DE = \frac{1}{2} AC$, 理由:

$$\because PE \perp AC, \quad \triangle APF \text{ 是等边三角形},$$

$$\therefore AE = EF,$$

$$\because \triangle PFD \cong \triangle QCD,$$

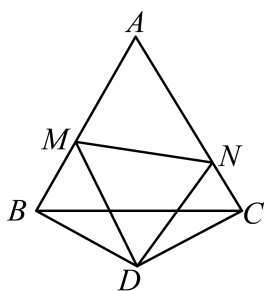
$$\therefore CD = DF,$$

$$\therefore DE = EF + DF = \frac{1}{2} AC.$$

23. 如图, $\triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形, $\triangle BDC$ 是等腰三角形, 且 $\angle BDC = 120^\circ$. 以点 D 为顶点作一个 60° 角, 使其两边分别交 AB 于点 M, 交 AC 于点 N, 连接 MN.

(1) 求证: $MN = BM + NC$;

(2) 求 $\triangle AMN$ 的周长.



【答案】(1) 证明见解析；(2) 6.

【解析】

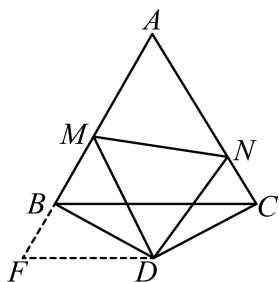
【分析】(1) 先证明 $\triangle BDF \cong \triangle CDN$ ，得出 $\angle BDF = \angle CDN$ ， $DF = DN$ ，同时再证明 $\triangle DMN \cong \triangle DMF$ ，得出 $MN = MF = MB + BF = MB + CN$.

(2) 根据 $MN = MB + CN$ ，得出 $\triangle AMN$ 的周长为 $AM + AN + MN = AM + MB + AN + CN = AB + AC = 6$.

【详解】解：(1) $\because \triangle BDC$ 是等腰三角形，且 $\angle BDC = 120^\circ$ ， $\therefore \angle BCD = \angle DBC = 30^\circ$.

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形， $\therefore \angle ABC = \angle BCA = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle DBA = \angle DCA = 90^\circ$ ，



延长 AB 至 F，使 $BF = CN$ ，连接 DF，

由 SAS 可证 $\triangle BDF \cong \triangle CDN$ ，

$\therefore \angle BDF = \angle CDN$ ， $DF = DN$ ，

$\therefore \angle MDN = 60^\circ$ ， $\therefore \angle FDM = \angle BDM + \angle CDN = 60^\circ$ ，

由 SAS 可证 $\triangle DMN \cong \triangle DMF$ ，

$\therefore MN = MF = MB + BF = MB + CN$

(2) 由(1)知 $MN = MB + CN$ ，

$\therefore \triangle AMN$ 的周长为 $AM + AN + MN = AM + MB + AN + CN = AB + AC = 6$

【点睛】本题属于开放性应用题，适当的构建三角形是解题的关键。题中构建辅助线的方法是“延长 AB 至 F，使 $BF = CN$ ，连接 DF”，这是本题的重点。

24. 数学模型可以用来解决一类问题，是数学应用基本途径。通过探究图形的变化规律，再结合其他数学知识的内在联系，最终可以获得宝贵的数学经验，并将其运用到更广阔的数学天地。

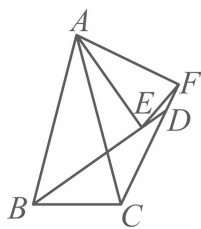


图1

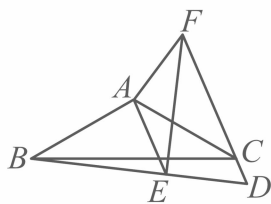
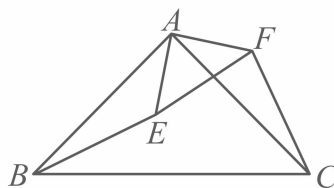


图2



备用图

- (1) 发现问题: 如图 1, 在 ABC 和 $\triangle AEF$ 中, $AB = AC$, $AE = AF$, $\angle BAC = \angle EAF = 30^\circ$, 连接 BE , CF , 延长 BE 交 CF 于点 D . 则 BE 与 CF 的数量关系: _____, $\angle BDC =$ _____;
- (2) 类比探究: 如图 2, 在 ABC 和 $\triangle AEF$ 中, $AB = AC$, $AE = AF$, $\angle BAC = \angle EAF = 120^\circ$, 连接 BE , CF , 延长 BE , FC 交于点 D . 请猜想 BE 与 CF 的数量关系及 $\angle BDC$ 的度数, 并说明理由;
- (3) 拓展应用: 在 ABC 和 $\triangle AEF$ 中, $AB = AC$, $AE = AF$, $\angle BAC = \angle EAF = 90^\circ$, 连接 BE , CF , 将 $\triangle AEF$ 绕它们共同的顶点 A 旋转一定的角度后, 若 B, E, F 三点刚好在同一直线上, 求此时 $\angle AFC$ 的度数.

【答案】(1) $BE = CF$, 30

(2) $BE = CF$, $\angle BDC = 60^\circ$, 理由见解析

(3) $\angle AFC = 135^\circ$ 或 45°

【解析】

【分析】本题考查全等三角形的判定, 等腰三角形以及等腰直角三角形的判定与性质, 灵活运用相关知识成为解题的关键.

(1) 设 AC 交 BD 于点 G , 由 $\angle BAC = \angle EAF = 30^\circ$ 可得 $\angle BAE = \angle CAF = 30^\circ + \angle CAE$, 而 $AB = AC$, $AE = AF$, 即可根据 “SAS” 证明 $\triangle ABE \cong \triangle ACF$, 所以 $BE = CF$, $\angle ABE = \angle ACF$, 则 $\angle BDC = \angle AGD - \angle ACF = \angle AGD - \angle ABE = \angle BAC = 30^\circ$ 即可解答;

(2) 根据等腰三角形的性质, 利用 SAS 证明 $\triangle ABE \cong \triangle ACF$ 可得 $BE = CF$, $\angle AEB = \angle AFC$, 然后再根据等腰三角形的性质即可解答;

(3) 根据等腰直角三角形的性质, 利用 SAS 证明 $\triangle ABE \cong \triangle ACF$ 可得 $\angle AFC = \angle AEB$, $AE = AF$, 再分两种情况说明 $\angle AEB = 135^\circ$ 或 45° 即可.

【小问 1 详解】

解: 如图 1, 设 AC 交 BD 于点 G ,

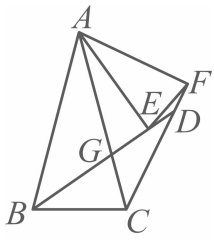


图1

$$\because \angle BAC = \angle EAF = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle CAF = 30^\circ + \angle CAE,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACF$ 中,

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAE = \angle CAF, \\ AE = AF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACF (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle ABE = \angle ACF, \quad BE = CF,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle AGD - \angle ACF = \angle ACD - \angle ABE = \angle BAC = 30^\circ.$$

故答案为: $BE = CF$, 30 .

【小问 2 详解】

解: $BE = CF$, $\angle BDC = 60^\circ$, 理由如下:

$$\because \angle BAC = \angle EAF = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC - \angle EAC = \angle EAF - \angle EAC, \text{ 即 } \angle BAE = \angle CAF,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACF$ 中,

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAE = \angle CAF, \\ AE = AF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACF (\text{SAS}),$$

$$\therefore BE = CF, \angle AEB = \angle AFC,$$

$$\because \angle EAF = 120^\circ, AE = AF,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle AFE = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle BEF - \angle EFD = \angle AEB + 30^\circ - (\angle AFC - 30^\circ) = 60^\circ.$$

【小问 3 详解】

解：如图 3 所示：

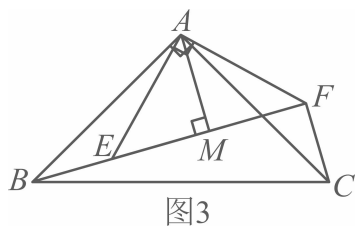


图3

$\therefore \triangle ABC$ 和 $\triangle AEF$ 都是等腰三角形,

$\therefore \angle CAB = \angle EAF = 90^\circ$, $AB = AC$, $AE = AF$,

$\therefore \angle CAB - \angle CAE = \angle FAE - \angle CAE$, 即: $\angle BAE = \angle CAF$,

$\therefore \triangle BAE \cong \triangle CAF$ (SAS),

$\therefore \angle AFC = \angle AEB$, $AE = AF$,

$\therefore \angle EAF = 90^\circ$,

$\therefore \angle AEF = 45^\circ$,

$\therefore \angle AEB = 180^\circ - \angle AEF = 135^\circ$,

$\therefore \angle AFC = \angle AEB = 135^\circ$;

当 F 点在线段 BE 上时,

同法可证得: $\triangle BAE \cong \triangle CAF$,

$\therefore \angle AFC = \angle AEB$,

$\therefore \angle EAF = 90^\circ$, $AE = AF$,

$\therefore \angle AEF = 45^\circ$,

$\therefore \angle AFC = 45^\circ$;

综上, $\angle AFC = 135^\circ$ 或 45° .