

2024 学年第二学期七年级期终学情调研

数学试卷

(时间 90 分钟, 满分 100 分)

考生注意:

1. 本试卷含三个大题, 共 26 题; 答题时, 考生务必按答题要求在答题纸规定的位置上作答, 在草稿纸、本试卷上答题一律无效;
2. 除第一、二大题外, 其余各题如无特别说明, 都必须在答题纸的相应位置上写出证明或计算的主要步骤.

一、选择题: (本大题共 6 题, 每题 2 分, 满分 12 分) 【下列各题的四个选项中, 有且只有一个是正确的, 请选择正确项的代号并填涂在[M] (线的相应位置上)

1. 已知 $a < b$, 下列各式中正确的是 ()

- A. $|a| < |b|$ B. $3a > 3b$ C. $a - b > 0$ D. $1 - 3a > 1 - 3b$

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查不等式的基本性质, 解题的关键是熟练运用不等式的基本性质对各选项进行分析判断. 根据不等式的基本性质, 逐一分析每个选项, 判断其正确性.

【详解】解: A、当 $a = -3$, $b = 1$ 时, 满足 $a < b$, 但 $|a| = 3$, $|b| = 1$, 此时 $|a| > |b|$, 所以仅由 $a < b$ 不能得出 $|a| < |b|$, 该选项错误;

B、不等式两边同时乘同一个正数, 不等号方向不变. 因为 $a < b$, 两边同时乘 3, 应该是 $3a < 3b$, 而不是 $3a > 3b$, 该选项错误;

C、因为 $a < b$, 移项可得 $a - b < 0$, 而不是 $a - b > 0$, 该选项错误;

D、不等式两边先同时乘 -3 , 不等号方向改变, 由 $a < b$ 可得 $-3a > -3b$; 再在两边同时加 1, 不等号方向不变, 即 $1 - 3a > 1 - 3b$, 该选项正确.

故选: D.

2. 一个底面半径为 2cm, 高为 5cm 的圆柱的表面积是 ()

- A. $28\pi\text{cm}^2$ B. $24\pi\text{cm}^2$ C. $20\pi\text{cm}^2$ D. $16\pi\text{cm}^2$

【答案】A

【解析】

【分析】 本题考查了圆柱的表面积计算. 根据圆柱的表面积由两个底面的面积和侧面积组成, 利用公式计算即可.

【详解】 解: $\because$ 圆柱的底面半径为 2cm , 高为 5cm ,

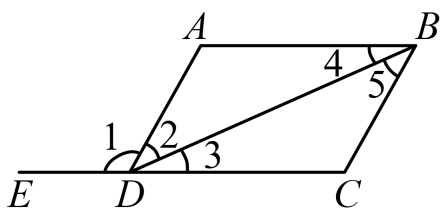
$$\therefore \text{两个底面面积为 } 2 \times \pi \times 2^2 = 8\pi \text{cm}^2$$

$$\text{圆柱的侧面积是 } 2\pi rh = 2\pi \times 2 \times 5 = 20\pi \text{cm}^2,$$

$$\therefore \text{底面积与侧面积之和为 } 8\pi + 20\pi = 28\pi \text{cm}^2,$$

故选: A.

3. 如图, 下列能判断 $AB \parallel CD$ 的条件是 ()



- A. $\angle A = \angle C$ B. $\angle 2 = \angle 5$ C. $\angle 3 = \angle 4$ D. $\angle 1 = \angle C$

【答案】 C

【解析】

【分析】 本题考查平行线的判定, 掌握平行线的判定定理, 关键在于找准两个角之间的位置关系. 先确定两角的位置关系, 再直接利用平行线的判定进行逐一判断即可.

【详解】 解: A、 $\angle A = \angle C$, 这两个角不是同位角、内错角或同旁内角的关系, 不能判定 $AB \parallel CD$.

B、 $\angle 2 = \angle 5$, 此时可判定 $AD \parallel BC$ (内错角相等, 两直线平行), 不能判定 $AB \parallel CD$.

C、 $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 3$ 与 $\angle 4$ 是内错角, 根据“内错角相等, 两直线平行”, 可以判定 $AB \parallel CD$.

D、 $\angle 1 = \angle C$, 不能判定 $AB \parallel CD$.

$\therefore$ 能判断 $AB \parallel CD$ 的条件是 $\angle 3 = \angle 4$,

故选: C.

4. 下列各组线段中, 能组成三角形的是 ()

- A. 1, 2, 3 B. 2, 3, 4 C. 1, 2, 4 D. 1, 1, 2

【答案】 B

【解析】

【分析】 本题考查了三角形三边之间的关系, 解题的关键是掌握三角形两边之和大于第三边, 两边之差小于第三边. 根据三角形三边之间的关系, 逐个判断即可.

【详解】解：A、 $\because 1+2=3$ ， $\therefore 1, 2, 3$ 不能组成三角形；

B、 $\because 3-2<4<3+2$ ， $\therefore 2, 3, 4$ 能组成三角形，

C、 $\because 1+2<4$ ， $\therefore 1, 2, 4$ 不能组成三角形，

D、 $\because 1+1=2$ ， $\therefore 1, 1, 2$ 不能组成三角形，

故选：B.

5. 用反证法证明“已知：在 ABC 中， $\angle C > \angle B$ ，求证： $AB > AC$ ”时，应先假设（ ）

A. $AB < AC$

B. $AB \neq AC$

C. $\angle C < \angle B$

D. $\angle C \leq \angle B$

【答案】B

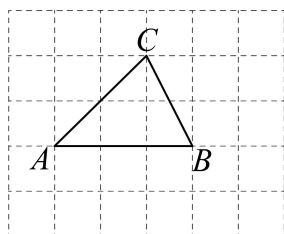
【解析】

【分析】本题考查的是反证法，解此题关键要懂得反证法的意义及步骤. 在假设结论不成立时要注意考虑结论的反面所有可能的情况，如果只有一种，那么否定一种就可以了，如果有多种情况，则必须——否定. 根据反证法的步骤中，第一步是假设结论不成立，反面成立解答即可.

【详解】反证法证明命题：在 ABC 中， $\angle C > \angle B$ ，求证： $AB > AC$ ，
第一步应先假设 $AB \neq AC$ ，

故选：B.

6. 如图， ABC 的三个顶点分别在小正方形的顶点（格点）上，称这样的三角形为格点三角形. 那么图中与 ABC 有一条公共边且全等（不含 ABC ）的所有格点三角形的个数是（ ）



A. 5 个

B. 6 个

C. 7 个

D. 8 个

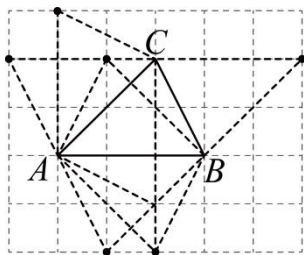
【答案】C

【解析】

【分析】本题考查全等三角形的判定，解题的关键是熟练掌握全等三角形的判定定理，按公共边的不同情况分类寻找全等格点三角形.

分别以 AB 、 BC 、 AC 为公共边，依据全等三角形判定条件，找出与 ABC 全等的格点三角形，统计数量.

【详解】如图：



共 7 个点符合,

故选: C.

二、填空题: (本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分) 【在答题纸相应题号后的空格内直接填写答案】

7. x 的 2 倍减去 3 的差不小于 4, 用不等式表示为_____.

【答案】 $2x - 3 \geq 4$

【解析】

【分析】 此题主要考查了列一元一次不等式, 正确的列出不等式是解题关键. 根据题意列出不等式, 即可求解.

【详解】 解: 依题意: $2x - 3 \geq 4$

故答案为: $2x - 3 \geq 4$.

8. 不等式组 $\begin{cases} -3x < 1 \\ 2x < x + 1 \end{cases}$ 的整数解是_____.

【答案】 0

【解析】

【分析】 分别求出不等式组中两不等式的解集, 找出两解集的公共部分确定出不等式组的解集, 进而求出正整数解即可.

【详解】 解: $\begin{cases} -3x < 1 \text{ ①} \\ 2x < x + 1 \text{ ②} \end{cases}$

解不等式①得: $x > -\frac{1}{3}$

解不等式②得: $x < 1$

$\therefore$ 不等式组的解集为: $-\frac{1}{3} < x < 1$,

$\therefore$ 不等式组的正整数解为 0,

故答案为: 0.

9. 已知 $a < 0$, 关于 x 的不等式 $ax \geq 1$ 的解集是_____.

【答案】 $x \leq \frac{1}{a}$

【解析】

【分析】 此题主要考查了一元一次不等式的解法，要注意系数化为 1 时，因为 $a < 0$ ，所以不等式的方向要改变．把系数化为 1，即可求出答案．

【详解】 解： $ax \geq 1$ ，

$\because a < 0$ ，

$\therefore x \leq \frac{1}{a}$ ，

故答案为： $x \leq \frac{1}{a}$ ．

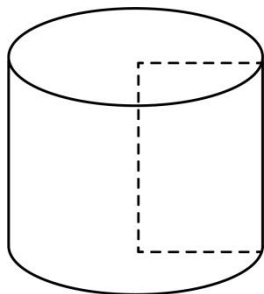
10. 现有一个长为 4cm，宽为 2cm 的长方形，将该长方形绕着它的长所在的直线旋转一周，得到的圆柱的体积是_____ cm^3 ．（结果保留 π ）

【答案】 16π

【解析】

【分析】 本题考查的是圆柱的形成，圆柱的体积的计算，画出长为旋转轴旋转后的圆柱，再利用圆柱的体积公式计算即可．掌握立体图形的认识是解题的关键．

【详解】 解：如图，以长为旋转轴旋转后得到的圆柱的体积为：



$V = \pi \times 2^2 \times 4 = 16\pi$ ．

故答案为： 16π ．

11. 已知一个圆锥形零件的底面积是 10cm^2 ，高是 9cm，那么这个零件的体积是_____ cm^3 ．

【答案】 30

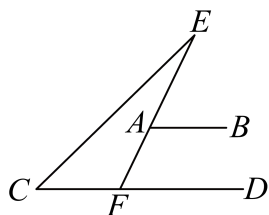
【解析】

【分析】 本题考查圆锥的体积，根据圆锥的体积公式计算，即可求解．

【详解】 解：这个零件的体积是 $\frac{1}{3} \times 10 \times 9 = 30\text{cm}^3$

故答案为： 30．

12. 如图, 已知 $AB \parallel CD$, E 、 A 、 F 三点共线, 连接 EC , 如果 $\angle C = 45^\circ$, $\angle E = 20^\circ$, 那么 $\angle EAB$ 的度数为_____.



【答案】 65° ## 65 度

【解析】

【分析】 本题主要考查了平行线的性质及三角形的外角的性质, 根据三角形的外角的性质可得 $\angle EFD = \angle C + \angle E = 65^\circ$, 进而根据平行线的性质, 即可求解.

【详解】 解: $\because \angle C = 45^\circ$, $\angle E = 20^\circ$,

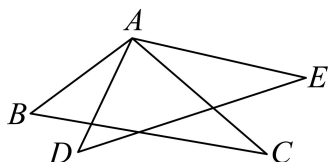
$$\therefore \angle EFD = \angle C + \angle E = 65^\circ,$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle EAB = \angle EFD = 65^\circ,$$

故答案为: 65° .

13. 如图, 已知 $AC = AE$, $\angle BAD = \angle CAE$, 要使 $\triangle ABC \cong \triangle ADE$, 还需添加一个条件, 这个条件可以是_____. (写出一个即可)



【答案】 $AB = AD$ (或 $\angle B = \angle D$ 或 $\angle E = \angle C$)

【解析】

【分析】 此题考查了全等三角形的判定, 熟记全等三角形的判定定理是解题的关键. 根据全等三角形的判定定理求解即可.

【详解】 解: $\because \angle BAD = \angle CAE$,

$$\therefore \angle BAD + \angle DAC = \angle CAE + \angle DAC \text{ 即 } \angle BAC = \angle DAE$$

$$\text{又} \because AC = AE$$

当 $AB = AD$ 时, $\triangle ABC \cong \triangle ADE$ (SAS)

当 $\angle B = \angle D$ 时, $\triangle ABC \cong \triangle ADE$ (AAS)

当 $\angle E = \angle C$ 时, $\triangle ABC \cong \triangle ADE$ (ASA)

故答案为: $AB = AD$ 或 $\angle B = \angle D$ 或 $\angle E = \angle C$.

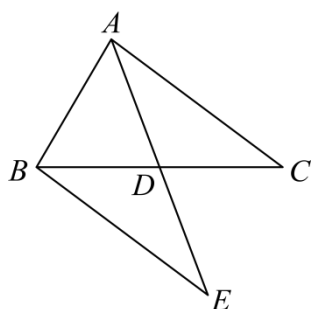
14. 把 $\triangle ABC$ 的中线 AD 延长到点 E , 使 $DE = AD$, 连接 BE , 如果 $AB = 3$, $\triangle ACD$ 的周长比 $\triangle ABD$ 的周长大 2, 那么 $BE =$ _____.

【答案】 5

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的性质与判定, 三角形中线的定义, 根据题意得出 $AC = 5$, 进而证明 $\triangle ADC \cong \triangle EDB$ 得出 $BE = AC = 5$, 即可求解.

【详解】 解: 如图



$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线,

$\therefore BD = CD$,

$\because \triangle ACD$ 的周长比 $\triangle ABD$ 的周长大 2,

$\therefore AD + CD + AC - (AB + BD + AD) = 2$,

$\therefore AC - AB = 2$

$\because AB = 3$

$\therefore AC = 5$

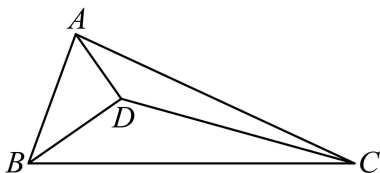
$\because AD = DE, BD = CD, \angle ADC = \angle EDB$,

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle EDB$

$\therefore BE = AC = 5$

故答案为: 5.

15. 如图, 点 D 为 $\triangle ABC$ 内一点, DB 平分 $\angle ABC$, $DA \perp DB$, 连接 DC , 如果 $\triangle ABC$ 的面积为 s , 那么 $\triangle BCD$ 的面积为_____. (用含 s 的式子表示)

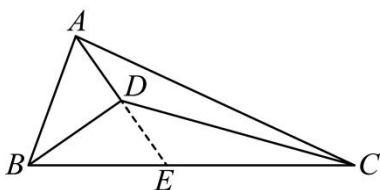


【答案】 $\frac{1}{2}s$ ## 0.5s

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的性质与判定，三角形中线的性质；延长 AD 交 BC 于点 E ，证明 $\triangle ABD \cong \triangle EBD$ (ASA) 得出 $AD = DE$ ，进而根据三角形中线的性质，即可求解。

【详解】 解：如图，延长 AD 交 BC 于点 E ，



$\because BD$ 平分 $\angle ABC$ ，

$\therefore \angle ABD = \angle EBD$ ，

$\because DA \perp DB$ ，

$\therefore \angle BDA = \angle BDE$

又 $\because BD = BD$ ，

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle EBD$ (ASA)

$\therefore AD = DE$

$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABE} + S_{\triangle AEC} = 2S_{\triangle BDE} + 2S_{\triangle CDE} = 2S_{\triangle BDC}$

$\because \triangle ABC$ 的面积为 s ，

$\therefore \triangle BCD$ 的面积为 $\frac{1}{2}s$

故答案为： $\frac{1}{2}s$.

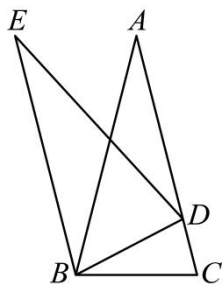
16. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle A = 28^\circ$ ， 将 $\triangle ABC$ 绕着点 B 旋转， 点 C 恰好落在边 AC 上的点 D 处， 点 A 落在点 E 处， 那么 $\angle EBA =$ _____ 度.

【答案】 28

【解析】

【分析】 本题考查了旋转的性质， 等边对等角， 根据题意得出旋转角为 28° ， 即可求解.

【详解】解：如图



$$\because AB = AC, \angle A = 28^\circ,$$

$$\therefore \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 76^\circ,$$

$\because$ 将 ABC 绕着点 B 旋转，点 C 恰好落在边 AC 上的点 D 处，

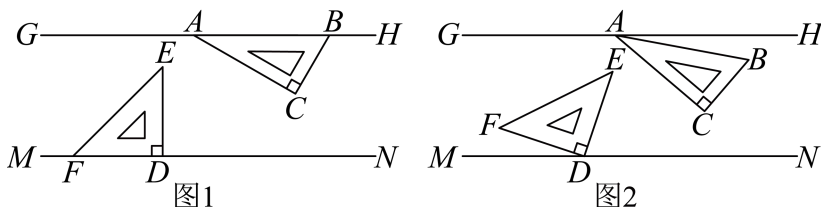
$$\therefore BC = BD,$$

$$\therefore \angle CBD = 180^\circ - 2\angle C = 28^\circ,$$

$$\therefore \angle EBA = \angle DBC = 28^\circ,$$

故答案为：28.

17. 将一副三角尺如图 1 所示摆放， AB 、 FD 分别在直线 GH 、 MN 上， $\angle BAC = 30^\circ$ ， $\angle E = 45^\circ$ ，直线 $GH \parallel MN$ 。现将三角尺 ABC 绕点 A 以每秒 1° 的速度顺时针旋转，同时三角尺 DEF 绕点 D 以每秒 2° 的速度顺时针旋转，如图 2，设时间为 t 秒，当 $0 \leq t \leq 180$ 时，如果边 BC 与三角尺 DEF 的一条直角边平行（旋转过程中三角尺任意两边所在的直线不重合），那么所有满足条件的 t 的值为_____。



【答案】30 或 120

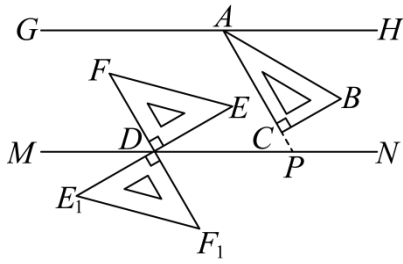
【解析】

【分析】本题主要考查了平行线的性质，先根据题意画出旋转后的图形，由已知条件，利用平行线的性质，求出旋转角之间的关系，列出方程解答即可。解题关键是根据题意，画出旋转后的图形。

【详解】解：由题意得： $\angle HAC = \angle BAH + \angle BAC = t^\circ + 30^\circ$ ， $\angle FDM = 2t^\circ$ ，

(1) 当 $BC \parallel DE$ 时，

如图所示：延长 AC 交 MN 于点 P ，



① DE 在 MN 上方,

$\because DE \parallel BC, DE \perp DF, AC \perp BC,$

$\therefore AP \parallel DF,$

$\therefore \angle FDM = \angle MPA,$

$\because MN \parallel GH,$

$\therefore \angle MPA = \angle HAC,$

$\therefore \angle FDM = \angle HAC,$

即 $2t = t + 30,$

解得: $t = 30;$

② DE_1 在 MN 下方时, $\angle F_1DP = (2t - 180)^\circ,$

$\because DE_1 \parallel BC, DE_1 \perp DF_1, AC \perp BC,$

$\therefore AP \parallel DF_1,$

$\therefore \angle F_1DM = \angle MPA,$

$\because MN \parallel GH,$

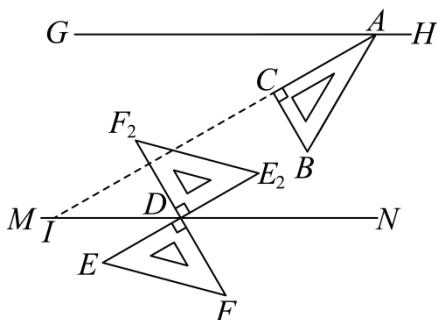
$\therefore \angle MPA = \angle HAC,$

$\therefore \angle F_1DM = \angle HAC,$

即 $2t - 180 = t + 30,$

解得: $t = 210$ (舍去);

如图: 当 $BC \parallel DF$ 时, 延长 AC 交 MN 于点 $I,$



① DF 在 MN 上方, $\angle FDN = (180 - 2t)$ 度,

$\because DF \parallel BC, AC \perp BC,$

$\therefore AI \parallel DE,$

$\angle FDN + \angle MIA = 90^\circ,$

$\because MN \parallel GH,$

$\angle MIA = \angle HAC,$

$\angle FDN + \angle HAC = 90^\circ,$

即 $180 - 2t + t + 30 = 90$, 解得: $t = 120$;

② DF 在 MN 下方, $\angle F_2DN = (2t - 180)$ 度,

$\because DF_2 \parallel BC, AC \perp BC, ED_2 \perp DF_2,$

$\therefore AC \parallel DE_2,$

$\therefore \angle AIM = \angle MDE_2,$

$\because MN \parallel GH,$

$\angle MIA = \angle HAC,$

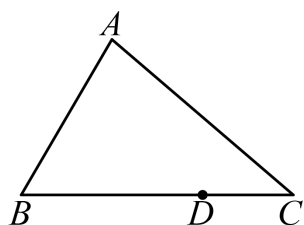
$\therefore \angle E_2DM = \angle HAC,$

即 $2t - 270 = t + 30$, 解得: $t = 300$ (舍去),

综上所述: 所有满足条件的 t 的值为: 30 或 120,

故答案为: 30 或 120.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2, BC = 3, \angle B = 60^\circ$, 点 D 是边 BC 上一点, 且 $BD = 2CD$ (如图). 将 $\triangle ABC$ 折叠, 使点 C 与点 A 重合, 折痕分别交边 AC 、 BC 于点 F 、 E , 点 Q 是线段 FE 上一点, 连接 QC 、 QD , 那么 $\triangle QDC$ 周长的最小值为_____.



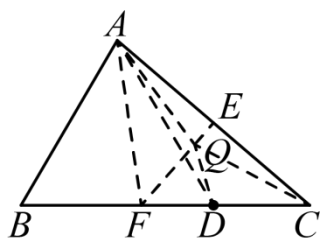
【答案】 3

【解析】

【分析】 本题考查了等边三角形的性质与判定, 折叠的性质, 垂直平分线的性质, 先证明 $\triangle ABD$ 是等边三

角形，根据垂直平分线的性质可得 $AQ = QC$ ， Q 在 AD 上时， $AQ + QD$ 取得最小值，进而根据三角形的周长公式计算即可求解。

【详解】解：如图，



$$\because AB = 2, BC = 3, \angle B = 60^\circ, BD = 2CD$$

$$\therefore BD = AB = 2, CD = 1,$$

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形，

$$\therefore AD = AB = 2$$

$\because EF$ 是折痕，点 C 与点 A 重合，

$\therefore EF$ 垂直平分 AC ，

$\therefore$ 点 Q 是线段 FE 上一点，

$$\therefore AQ = QC$$

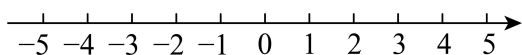
$\therefore Q$ 在 AD 上时， $AQ + QD$ 取得最小值，

$$\text{即 } \triangle QDC \text{ 周长最小值为: } (CQ + QD + DC)_{\min} = (AQ + QD + DC)_{\min} = AD + DC = 2 + 1 = 3$$

故答案为：3.

三、解答题：（本大题共 8 题，满分 52 分）【将下列各题的解答过程，做在答题纸上】

19. 解不等式组：
$$\begin{cases} 9x \geq 7x - 6 & \text{①} \\ x - 4 < \frac{8 - 2x}{3} & \text{②} \end{cases}$$
，并将该不等式组的解集在数轴上表示出来。



【答案】 $-3 \leq x < 4$ ，数轴表示见解析

【解析】

【分析】本题主要考查了一元一次不等式组解集的求法，其简便求法就是用口诀求解。求不等式组解集的口诀：同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小找不到（无解）。先求出两个不等式的解集，再求其公共解，再在数轴上画出来即可。

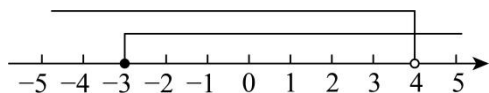
【详解】解：
$$\begin{cases} 9x \geq 7x - 6 & ① \\ x - 4 < \frac{8 - 2x}{3} & ② \end{cases}$$

解不等式①得： $x \geq -3$

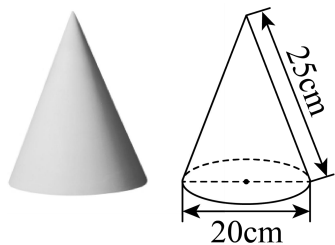
解不等式②得： $x < 4$

$\therefore$ 不等式组的解集为： $-3 \leq x < 4$

在数轴上表示如下：



20. 如图，已知圆锥形石膏像的底面直径 $d = 20\text{cm}$ ，母线长 $l = 25\text{cm}$ ，求它的表面积（结果保留 π ）和侧面展开图的圆心角.



【答案】表面积为 $350\pi\text{cm}^2$ ；侧面展开图的圆心角为 144°

【解析】

【分析】本题考查了圆锥的计算，根据圆的面积，圆锥的侧面积公式以及根据弧长的公式进行计算，即可求解.

【详解】解： $\because$ 圆锥形石膏像的底面直径 $d = 20\text{cm}$ ，母线长 $l = 25\text{cm}$ ，

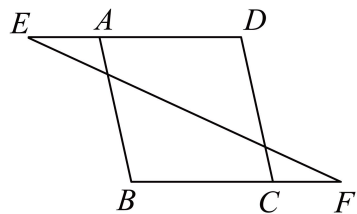
$$\therefore \text{表面积为: } \pi \times \left(\frac{20}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times 20\pi \times 25 = 100\pi + 250\pi = 350\pi\text{cm}^2$$

$$\text{根据弧长的公式 } l = \frac{n\pi r}{180} \text{ 得到: } 20\pi = \frac{n\pi \cdot 25}{180},$$

解得 $n = 144^\circ$.

侧面展开图的圆心角为 144° .

21. 如图，已知 $AB \parallel CD$ ， $\angle B = \angle D$ ， $\angle E = 25^\circ$ ，求 $\angle F$ 的度数.



【答案】 $\angle F = 25^\circ$

【解析】

【分析】 本题考查平行线的判定与性质，根据 $AB \parallel CD$ 得出 $\angle B = \angle DCF$ ，结合已知可得 $\angle D = \angle DCF$ ，即可证明 $ED \parallel BF$ ，根据平行线的性质，即可求解.

【详解】 解： $\because AB \parallel CD$ ，

$$\therefore \angle B = \angle DCF,$$

$$\because \angle B = \angle D,$$

$$\therefore \angle D = \angle DCF,$$

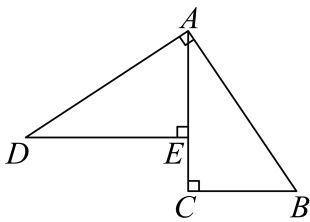
$$\therefore ED \parallel BF,$$

$$\therefore \angle F = \angle E$$

$$\text{又} \because \angle E = 25^\circ,$$

$$\therefore \angle F = \angle E = 25^\circ.$$

22. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $BC = 2$ ， $AC = 3$ ，过点 A 作 $AD \perp AB$ ，且 $AD = AB$ ，过点 D 作 $DE \perp AC$ ，垂足为点 E，求线段 EC 的长.



【答案】 $EC = 1$

【解析】

【分析】 本题考查了全等三角形的性质与判定，证明 $\triangle ADE \cong \triangle BAC$ (AAS)，得出 $AE = BC = 2$ ，进而根据 $EC = AC - AE$ ，即可求解.

【详解】 解： $\because DE \perp AC$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle AED = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE + \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\because AD \perp AB,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ADE,$$

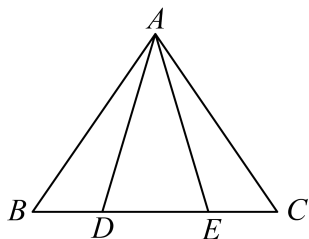
$$\text{又} \because AD = AB,$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BAC (\text{AAS}),$$

$$\therefore AE = BC = 2,$$

$$\therefore EC = AC - AE = 3 - 2 = 1.$$

23. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 在边 BC 上， $\angle B = \angle C$ ， $AD = AE$ 。求证： $BD = CE$ 。

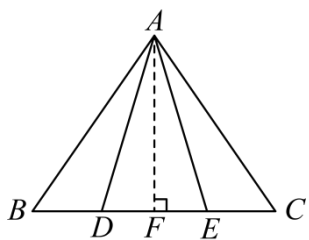


【答案】见解析

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的判定与性质，作 $AF \perp BC$ 于点 F ，由等腰三角形的性质可得 $DF = EF$ ，再证明 $BF = CF$ ，即可得证，熟练掌握等腰三角形的判定与性质是解此题的关键。

【详解】证明：作 $AF \perp BC$ 于点 F ，



$$\because AD = AE,$$

$$\therefore DF = EF,$$

$$\because \angle B = \angle C$$

$$\therefore AB = AC$$

$$\therefore BF = CF$$

$$\therefore BF - DF = CF - EF \text{ 即 } BD = CE.$$

24. 一件商品的成本是 50 元.

(1) 如果售价是 58 元，那么盈利率是多少？

(2) 如果按原价的八五折销售，至少可获得 10% 的利润；如果按原价的九折销售，能获得不足 20% 的利润，那么商品的原价（正整数）是多少元？

【答案】(1) 16%

(2) 65 或 66 元

【解析】

【分析】本题主要考查了有理数的运算以及一元一次不等式组的应用，根据题意列出不等式组解题的关键.

(1) 根据盈利率等于售价减去成本再比上成本，即可求解；

(2) 设商品的原价（正整数）是 x 元，根据题意列出一元一次不等式组求解即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: } \frac{58-50}{50} \times 100\% = 16\%,$$

答: 如果售价是 58 元, 那么盈利率是 16%.

【小问 2 详解】

解: 设商品的原价（正整数）是 x 元, 根据题意得,

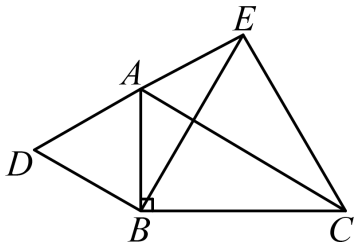
$$\begin{cases} \frac{0.85x-50}{50} \geq 10\% \\ \frac{0.9x-50}{50} < 20\% \end{cases},$$

$$\text{解得: } 64\frac{12}{17} \leq x < 66\frac{2}{3},$$

$\because x$ 是正整数, 则 $x = 65$ 或 66 ,

答: 商品的原价（正整数）是 65 或 66 元.

25. 已知: 如图, 分别以 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的两条直角边 AB 、 BC 为边作等边三角形 ABD 和等边三角形 BCE , 连接 DE , 且点 A 在线段 DE 上.



(1) 求证: $DE = AC$;

(2) 求证: $BE \perp AC$.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】本题考查等边三角形的性质及全等三角形的判定，掌握等边三角形的性质及全等三角形的判定是解题关键.

(1) 根据等边三角形的性质得出 $AB = DB$, $BE = BC$, $\angle ABD = \angle CBE = 60^\circ$, 进而证明 $\triangle DBE \cong \triangle ABC$, 即可得证;

(2) 根据等边三角形的性质以及三角形内角和定理得出 $\angle DEB = \angle ABE$ ，即可证明 $AB = AE$ ，根据等边三角形的性质可得 $CB = CE$ ，即可证明 AC 垂直平分 BE ，即可得证。

【小问 1 详解】

证明： $\because \triangle ABD, \triangle EBC$ 是等边三角形，

$$\therefore AB = DB, BE = BC, \angle ABD = \angle CBE = 60^\circ$$

$$\therefore \angle DBE = \angle ABC$$

$$\therefore \triangle DBE \cong \triangle ABC$$

$$\therefore DE = AC;$$

【小问 2 详解】

$\because \triangle ABC$ 是直角三角形， AB, BC 为直角边，

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ$$

$\because \triangle BEC$ 是等边三角形，则 $\angle EBC = 60^\circ$ ， $CB = CE$

$$\therefore \angle ABE = \angle ABC - \angle EBC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

由 (1) 可得 $\triangle DBE \cong \triangle ABC$

$$\therefore \angle DBE = \angle ABC = 90^\circ$$

$\because \triangle ABD$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle D = 60^\circ$$

$$\therefore \angle DEB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

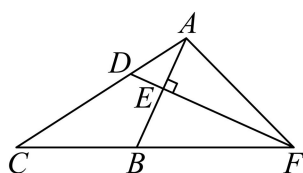
$$\therefore \angle DEB = \angle ABE$$

$$\therefore AB = AE$$

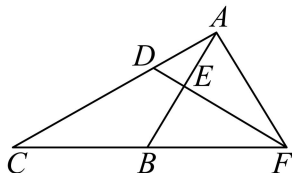
$\therefore AC$ 垂直平分 BE

$$\therefore BE \perp AC.$$

26. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = BC$ ， AB 的垂直平分线分别交边 AC 、边 AB 和直线 CB 于点 D 、 E 、 F ，连接 AF 。



①图



②图

(1) 点 F 在 CB 的延长线上，

①如图，求证： $\angle ABC = 2\angle ADE$ ；

②如图，当 $DC = DF$ ， $BC = 1$ 时，求 $\triangle ABF$ 的周长；

(2) 当 $\triangle ACF$ 是等腰三角形时，请直接写出 $\angle C$ 的度数.

【答案】(1) ①见解析；②3

$$(2) \angle ACB = 36^\circ \text{ 或 } \angle ACB = \frac{180^\circ}{7}$$

【解析】

【分析】本题考查了等腰三角形的性质与判定，等边三角形的性质与判定，三角形内角和定理的应用；

(1) ①根据三角形内角和定理分别表示出 $\angle ABC, \angle ADE$ ，即可得证；

②证明 $\triangle ABF$ 是等边三角形，根据等边三角形的性质，即可求解；

(2) 分三种情况讨论，根据等腰三角形的性质以及三角形内角和定理，求解即可.

【小问1详解】

①证明： $\because DF \perp AB$ ，

$$\therefore \angle ADE = 90^\circ - \angle BAC,$$

$$\because AB = BC,$$

$$\therefore \angle CAB = \angle BCA,$$

$$\text{又} \because \angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle ACB = 180^\circ - 2\angle BAC,$$

$$\therefore \angle ABC = 2\angle ADE;$$

② $\because DC = DF$ ，

$$\therefore \angle DFC = \angle C,$$

$$\therefore \angle ADF = 2\angle C,$$

$$\text{又} \because \angle ABC = 2\angle ADE,$$

$$\therefore \angle ABC = 4\angle C,$$

$$\text{又} \because \angle ABC + 2\angle C = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 30^\circ, \angle ABC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF = 180^\circ - \angle ABC = 60^\circ,$$

$\because DF$ 是 AB 的垂直平分线，

$$\therefore FA = FB,$$

$\therefore \triangle ABF$ 是等边三角形，

$$\therefore \triangle ABF \text{ 的周长为 } 3AB = 3BC = 3;$$

【小问2详解】

解：设 $\angle ACB = \alpha$

当 $CA = CF$ 时,

$$\therefore AB = BC$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ACB = \alpha$$

$$\therefore \angle ABF = 2\angle ACB = 2\alpha$$

$\therefore DF$ 是 AB 的垂直平分线,

$$\therefore FA = FB,$$

$$\therefore \angle FAB = \angle FBA = 2\alpha$$

$$\therefore \angle CAF = \angle CFA = \angle CAB + \angle FAB = 3\alpha$$

在 CAF 中, $\angle C + 2\angle CAF = 180^\circ$ 即 $\alpha + 2 \times 3\alpha = 180^\circ$

$$\text{解得: } \alpha = \frac{180^\circ}{7}, \text{ 即 } \angle ACB = \frac{180^\circ}{7};$$

当 $AC = AF$ 时, $\angle AFC = \angle ACB = \alpha$,

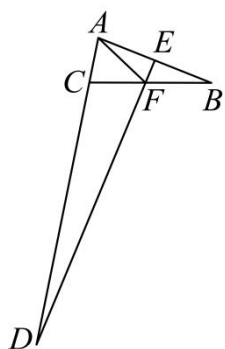
同理可得 $\angle CAF = \angle CAB + \angle FAB = 3\alpha$,

$$\therefore 2\alpha + 3\alpha = 180^\circ,$$

解得: $\alpha = 36^\circ$, 即 $\angle ACB = 36^\circ$;

当 $FA = FC$ 时, $\angle FAC = \angle ACB = \alpha$,

如图,



在 ABC 中, $\angle ABC = 180^\circ - 2\angle ACB = 180^\circ - 2\alpha$

$\therefore DF$ 是 AB 的垂直平分线,

$$\therefore FA = FB,$$

$$\therefore \angle FAB = \angle FBA = 180^\circ - 2\alpha$$

$$\therefore \angle BAC = \angle CAF + \angle FAB = \alpha + 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - \alpha$$

$$\therefore BA = BC$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ACB$$

$$\therefore \alpha = 180^\circ - \alpha$$

解得: $\alpha = 90^\circ$ (舍去)

$\therefore$ 此情形不存在,

综上所述, 当 $\triangle ACF$ 是等腰三角形时, $\angle ACB = 36^\circ$ 或 $\angle ACB = \frac{180^\circ}{7}$.